

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Динамика, прочность машин и сопротивление материалов»

Дисциплина «Основы физики прочности и механики разрушения»

Тема 3. Линейная механика разрушения

**Лекция 3.1. Теория Гриффитса-Ирвина.
Коэффициент интенсивности напряжений
(КИН).**

**Лекция 3.2. Эквивалентность силового и
энергетического критериев разрушения.**

Лектор:

**д.т.н., профессор
Полилов А.Н.**

Аннотация

Изучена линейная (сингулярная) теория упругости, энергетический критерий разрушения. Рассмотрена связь силового и энергетического критериев разрушения, энергетическое условие Гриффитса-Ирвина для роста трещины, а также оценки допустимых напряжений при известных размерах дефектов.

Разделы лекций 3.1, 3.2:

3.1.1. Теория Гриффитса-Ирвина.

3.1.2. Коэффициенты интенсивности напряжений (КИН).

3.2. Эквивалентность силового и энергетического критериев разрушения.



План лекции 3.1:

3.1.1. Теория Гриффитса-Ирвина

3.1.1.1. Энергетический критерий Гриффитса

3.1.1.2. Оценка допустимых: напряжений и длин трещин

3.1.1.3. Экспериментальное определение удельной работы разрушения

3.1.2. Коэффициент интенсивности напряжений (КИН)

3.1.2.1. Модель трещины и асимптотика напряжений

3.1.2.2. Критерий Ирвина для роста трещины

3.1.2.3. Три моды роста трещины

3.1.2.4. Критерий роста наклонной трещины

3.1.2.5. Приближенный метод сечений

3.1.2.6. Экспериментальное определение трещиностойкости.

Численное определение К-тарировки

План лекции 3.2

Эквивалентность силового и энергетического критериев

3.2.1. Анализ работы раскрытия трещины

3.2.2. Область применимости ЛМР

3.1.1. Теория Гриффитса-Ирвина

**Алан Арнольд Гриффитс
(1893-1963) – A.A.Griffith**

1. Механика разрушения

- Теоретическая прочность, концентрация напряжений

2. Механика композитов

- Прочность тонких бездефектных волокон
- Стекло: пузырьки - давление, волокна – эластика Эйлера, испытания петель.



3.1.1.1. Энергетический критерий Гриффитса

$$G = \frac{dU}{dS} = G_c$$

G – удельная работа разрушения, т.е. энергия необходимая для образования единицы поверхности

dU – затраченная работа

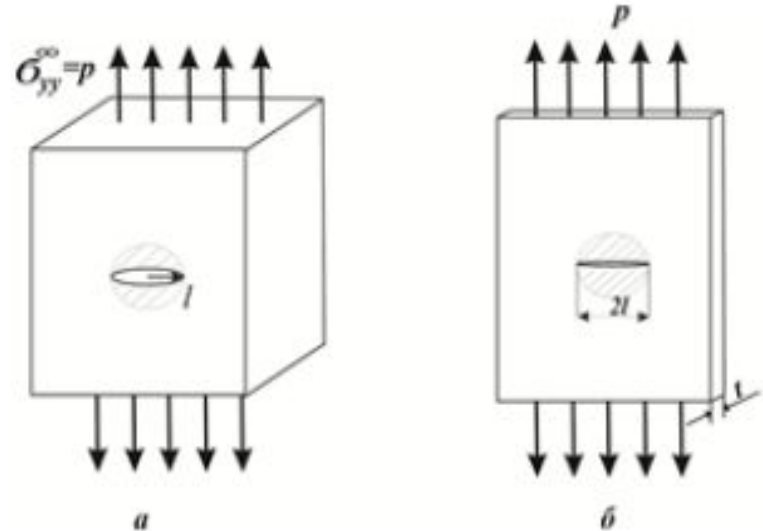
dS – площадь трещины

G_c – критическая скорость высвобождения энергии

$$G = \left[\frac{\text{КГ}}{\text{ММ}} \right] \leftrightarrow \left[\frac{\text{Н}}{\text{М}} \right]$$

Энергетический критерий в упрощенном виде (без учета диссипации энергии и динамических эффектов):

$$-dU = 2\gamma dS.$$



Схемы трещин в растягиваемых: трехмерном теле – а и в пластине – б

Общая накопленная
упругая энергия:

$$U = \sigma^2 (V - k_0 l^3) / (2E)$$

Изменение упругой
энергии:

$$dS = 2\pi l dl \rightarrow$$

$$dU = -3\sigma^2 k_0 l^2 dl / (2E)$$

$$-dU = 2\gamma dS \rightarrow$$

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{EG_c}{k_1 l}}; \quad k_1 = \frac{3k_0}{4\pi}(1-\nu^2)$$



МОСКОВСКИЙ
ПОЛИТЕХ

Качественный результат для
пластины толщиной t ($=1$) со
сквозной трещиной длиной
 $2l$:

$$U = \sigma^2 (V - k_2 t l^2) / (2E);$$

$$dU = -\sigma^2 t k_2 l dl / E; \quad dS = t dl;$$

$$-dU / dS = G_c \Rightarrow \sigma^* = \sqrt{EG_c / (k_2 l)}.$$

Для сквозной трещины в
широкой пластинке в
условиях плоского
напряженного состояния:

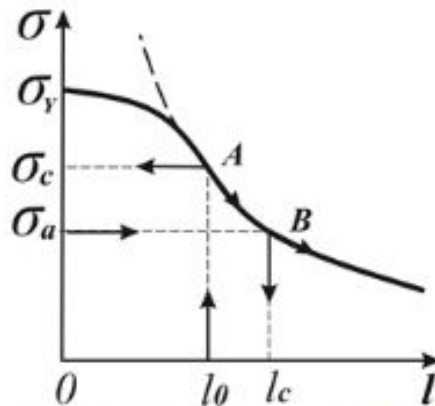
$$\sigma^* = \sqrt{2EG_c / (\pi l)}$$

Для плоской деформации:

$$\sigma^* = \sqrt{2EG_c / [(1-\nu^2)\pi l]}.$$

3.1.1.2. Оценка допустимых: напряжений и длин трещин

Критическое равномерное напряжение для тела с внутренней (или для пластины со сквозной) трещиной с начальной длиной $2l_0$:



$$\sigma_c^* = \sqrt{\frac{EG_c}{k_1 l_0}}$$

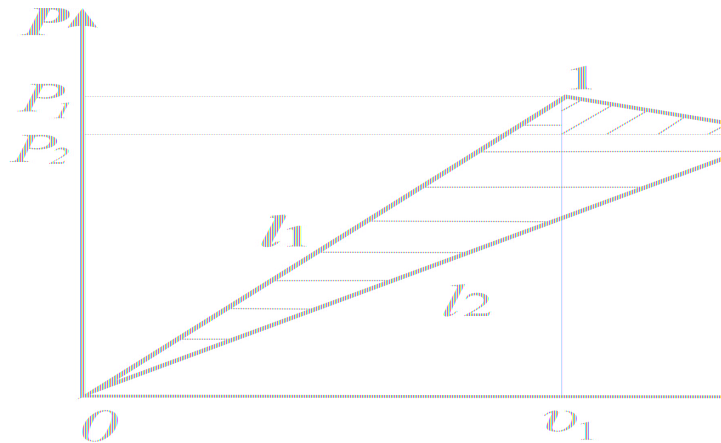
Критическая длина трещины $2l_c$:

$$l_c = \frac{EG_c}{k_1 \sigma_a^2}$$

Зависимости $\sigma-l$: критических напряжений $\sigma^* = \sigma_c$ от длины трещины l_0 и критической длины трещины l_c от приложенного напряжения σ_a



3.1.1.3. Экспериментальное определение удельной работы разрушения



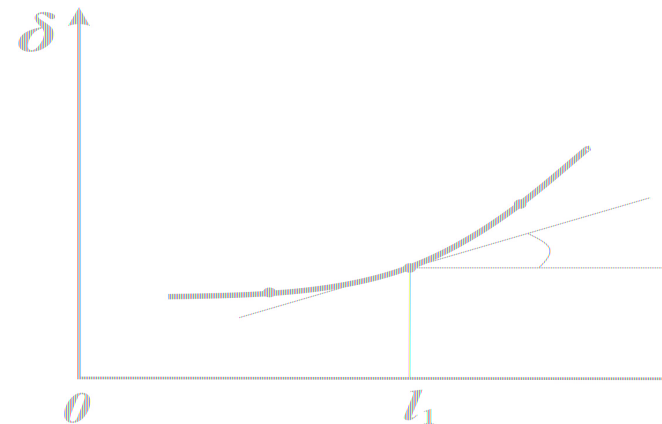
Линейные диаграммы
нагружения образца с трещиной

Накопленную упругую энергию
можно выразить через податливость
и перемещение:

$$U = \frac{1}{2} P v = \frac{1}{2} P^2 \delta = \frac{1}{2} v^2 / \delta$$

Метод податливости

$$\delta = v / P$$



Графическое нахождение
производной от податливости

Критическая скорость
высвобождения энергии:

$$G_c = - \frac{\partial U}{\partial S} = - \frac{v^2}{2t} \frac{\partial(1/\delta)}{\partial l} = \frac{v^2}{2t\delta^2} \frac{\partial \delta}{\partial l} = \frac{P^{*2}}{2t} \frac{\partial \delta}{\partial l} \Big|_{l=l_1},$$

где t – толщина образца;
 $S = lt$ – площадь трещины.



МОСКОВСКИЙ
ПОЛИТЕХ

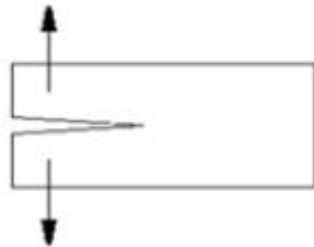
3.1.2. Коэффициент интенсивности напряжений (КИН)

Коэффициент интенсивности напряжений, КИН (англ. Stress Intensity factor) используется в линейной механике разрушения для описания полей напряжений у вершины трещины. Рост трещины начинается когда КИН достигает критического значения $K = K_c$

$$K = \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}} \right] = [\text{МПа} \cdot \sqrt{\text{м}}]$$

Три вида роста трещины

1. Нормальный отрыв



$$K_I = K_{Ic}$$

2. Поперечный сдвиг



$$K_{II} = K_{IIc}$$

3. Продольный сдвиг



$$K_{III} = K_{IIIc}$$



2.2.1. Модель трещины и асимптотика напряжений

$F = k\sqrt{l^2 - z^2}$ - функция напряжений

$$\sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0 \text{ при } |x| \leq l$$

$$u_y = 0 \text{ при } |x| \geq l$$

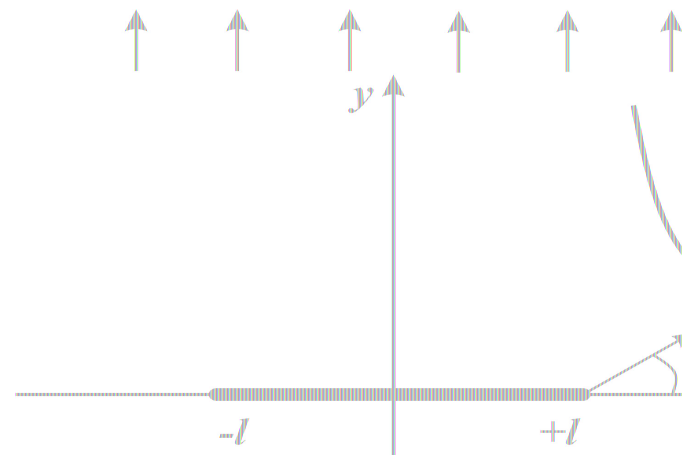
Производная от функции напряжений:

$$\frac{dF}{dz} = -\frac{kz}{\sqrt{l^2 - z^2}}$$

Напряжения вблизи вершины трещины:

$$\sigma_{yy}(x) - \sigma_{yy}^{\infty} = \operatorname{Im} \frac{dF}{dz} = \frac{k(l+r)}{\sqrt{(l+r)^2 - l^2}} = \frac{k(1+r/l)}{\sqrt{2r/l + (r/l)^2}} \xrightarrow{r/l \rightarrow 0} \frac{k\sqrt{\pi l}}{\sqrt{2\pi r}}$$

$$\sigma_{yy}(x) = \sigma_{yy}^{\infty} + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right)$$



Модель трещины в виде «математического» разреза

Коэффициентом интенсивности напряжений (КИН):

$$K_I = k\sqrt{\pi l}$$

КИН при одноосном равномерном растяжении:

$$K_I = \sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\pi l} \times Y(l/w)$$

$Y(l/w)$ – K-тарировка.

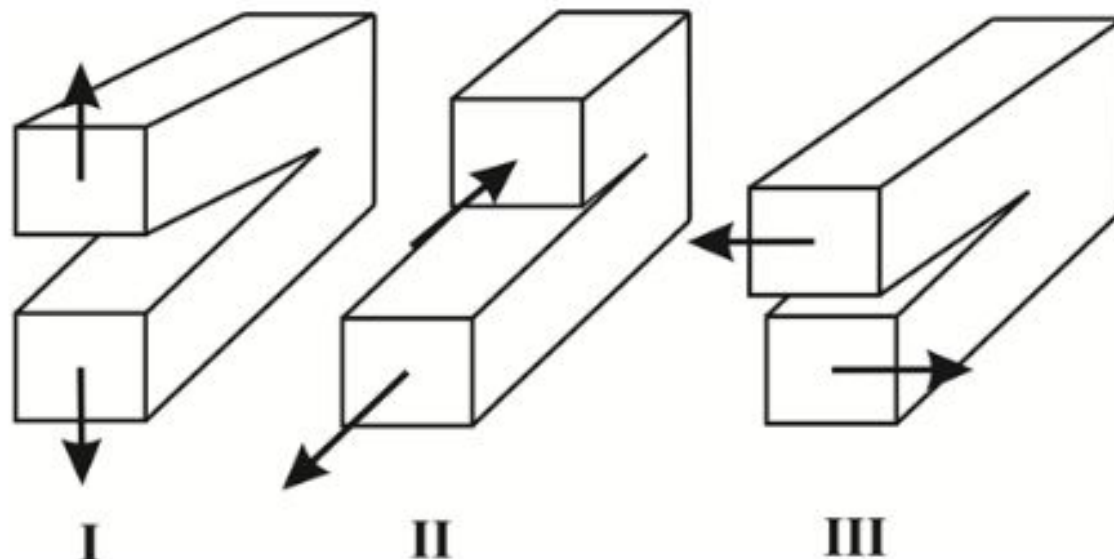
3.1.2.2. Критерий Ирвина для роста трещины

Критерий Ирвина:

$$K_I = K_{Ic}$$

Параметр Ирвина известен как «вязкость разрушения» (трещиностойкость) материала

3.1.2.3. Три моды роста трещины



Три моды роста трещины: I - нормальный отрыв; II - поперечный сдвиг; III - продольный сдвиг



3.1.2.4. Критерий роста наклонной трещины

Критерий суммирования удельных, нормированных энергий разрушения, необходимых для роста трещины:

$$\frac{G_I}{G_{Ic}} + \frac{G_{II}}{G_{IIc}} = 1$$

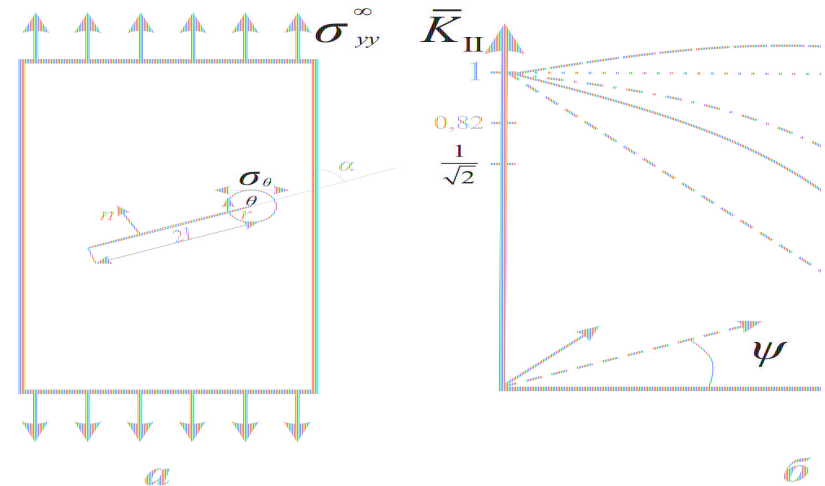


Схема растяжения пластины с наклонной трещиной – а и простейшие виды критерия роста трещины при комбинированной моде перемещения берегов – б

3.1.2.5. Приближенный метод сечений

Коэффициент интенсивности напряжений для широкой пластины с центральной трещиной:

$$l\sigma_{yy}^{\infty} = \frac{2K_I\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow K_I = \sigma_{yy}^{\infty}\sqrt{\pi l}$$

КИН для широкой пластины с наклонной трещиной:

$$K_I = \sigma_{yy}^{\infty} \sin^2 \alpha \sqrt{\pi l};$$

$$K_{II} = \sigma_{yy}^{\infty} \sin \alpha \cos \alpha \sqrt{\pi l}$$

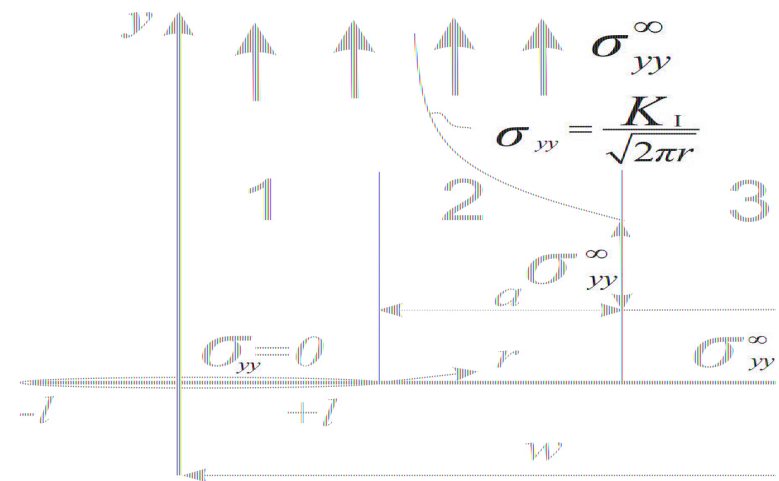


Иллюстрация к методу сечений для определения КИН

3.1.2.6. Экспериментальное определение трещиностойкости. Численное определение К- тарировки

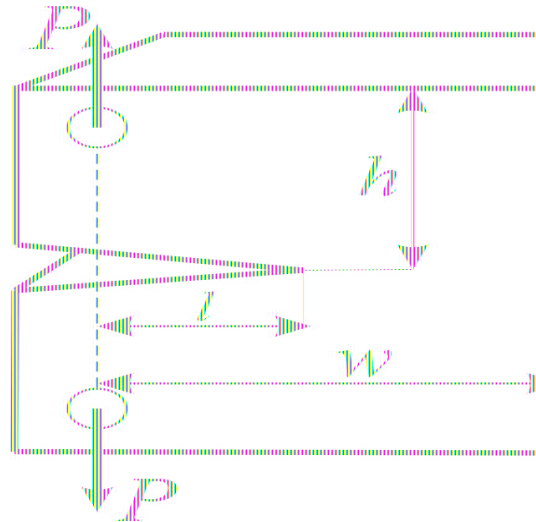


Схема компактного
двухконсольного образца на
внецентренное растяжение

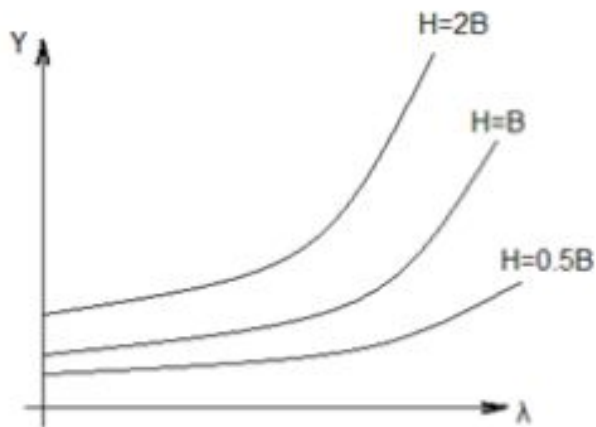
К-тарировка.

- Безразмерный поправочный коэффициент, который вводится при расчёте образца конечного размера.

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi l} Y(\lambda)$$

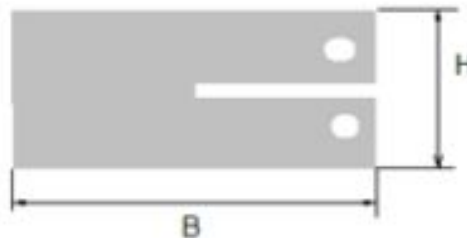
КИН для бесконечной пластины

Семейство тарировочных кривых



- В справочной литературе.
(Calibration curves)

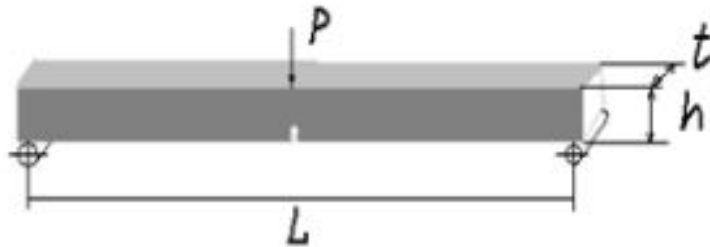
$$\lambda = \frac{2l}{B}$$



Испытания на изгиб (с трещиной)

- 3^х точечный изгиб

$$K = \frac{3PL}{2th^2} \sqrt{l} Y(\lambda) \quad \lambda = \frac{l}{h}$$



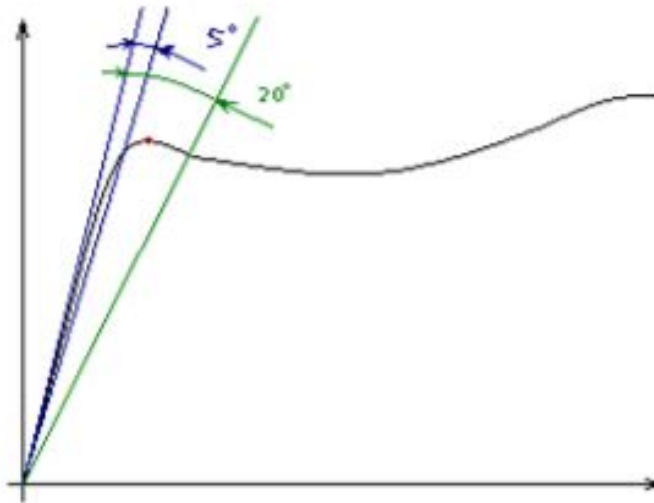
- Разные порядки аппроксимации – разные коэффициенты тарировки.

$$Y(\lambda) = 1.93 - 3.07\lambda + 14.53\lambda^2 - 25.11\lambda^3 + 25.8\lambda^4$$



Определение рабочей нагрузки

- Нелинейная диаграмма «Нагрузка – Прогиб»
- Сложность в определении начала роста трещины



лекция 3.2.

Эквивалентность силового и энергетического критериев

Трещина получает возможность распространяться тогда, когда:

1. Интенсивность освобождающей энергии G достигает критического значения.
2. Коэффициент интенсивности K достигает критического значения.

3.2.1. Анализ работы раскрытия трещины

Прямая связь скорости высвобождения энергии и коэффициента интенсивности напряжений:

для плоской деформации:

$$K_I^2 = \frac{EG_I}{(1-\nu^2)};$$

для плоского напряженного состояния:

$$K_I^2 = EG_I.$$

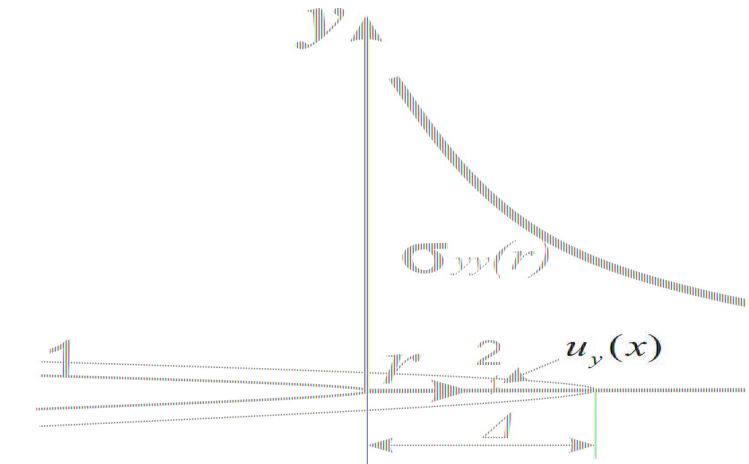


Схема вычисления работы на раскрытие трещины при её подрастании

Эквивалентность силового и энергетического критериев роста трещины:

$$K_{Ic}^2 = EG_{Ic} / (1-\nu^2)$$

или

$$K_{Ic}^2 = EG_{Ic} \Rightarrow K_I = K_{Ic} \Leftrightarrow G_I = G_{Ic}$$

3.2.2. Области применимости ЛМР

ЛМР имеет достаточно узкую область применения – только для материалов с высоким пределом текучести и с низкой трещиностойкостью, поэтому надо четко сформулировать те ограничения, в рамках которых ЛМР поставляет адекватные результаты.



Ограниченность деформаций – геометрическая линейность, которая обеспечивает корректность постановки задач теории упругости на исходных, недеформированных границах, в частности, на прямолинейных берегах трещины.

- Малый размер

это обеспечивается специальными требованиями

$$r_Y \ll K_I^2 / \sigma_Y^2, \quad r_Y \approx \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_Y^2}$$

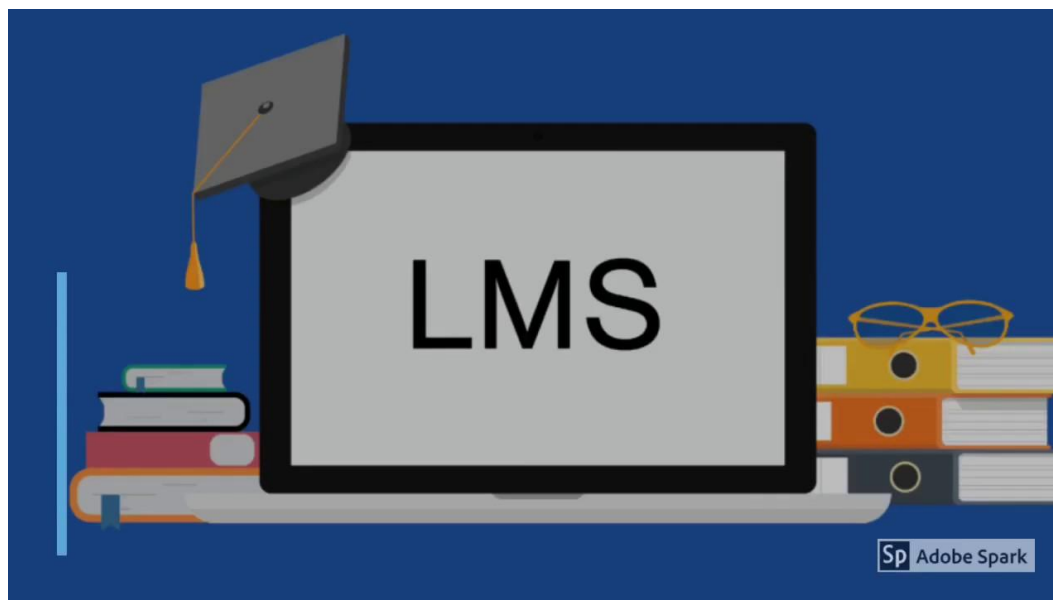
$$l, t, (w-l) \geq 2,5 K_{Ic}^2 / \sigma_Y^2.$$

Существуют широкие области наиболее опасных условий нагружения, когда именно линейная механика роста трещин даёт надёжные оценки условий хрупкого разрушения. К таким условиям нагружения относятся:

- низкие: климатические или криогенные температуры;
- многоосное напряженное состояние, затрудняющее пластическое течение около вершины трещины;
- наличие химически активных сред (морская вода, сернистая нефть, кислоты, щелочи);
- циклические нагрузки (классическая усталость в пределах упругости);
- высокая скорость нагружения;
- облучение нейтронами или тяжелыми частицами.

Заключение

Предлагаем студентам просмотреть дополнительные материалы, размещенные в LMS Политеха (<https://lms.mospolytech.ru>)



МОСКОВСКИЙ
ПОЛИТЕХ

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!