Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Производная функции в точке. Дифференциал.

1. Производная функции в точке.
2. Геометрический и механический смыслы производной.
3. Дифференцирование сложных функций.
4. Дифференциал функции, свойства, приложения.
5. Производные и дифференциалы высших порядков.

Задачи, приводящие к понятию производной

1. Задача о касательной

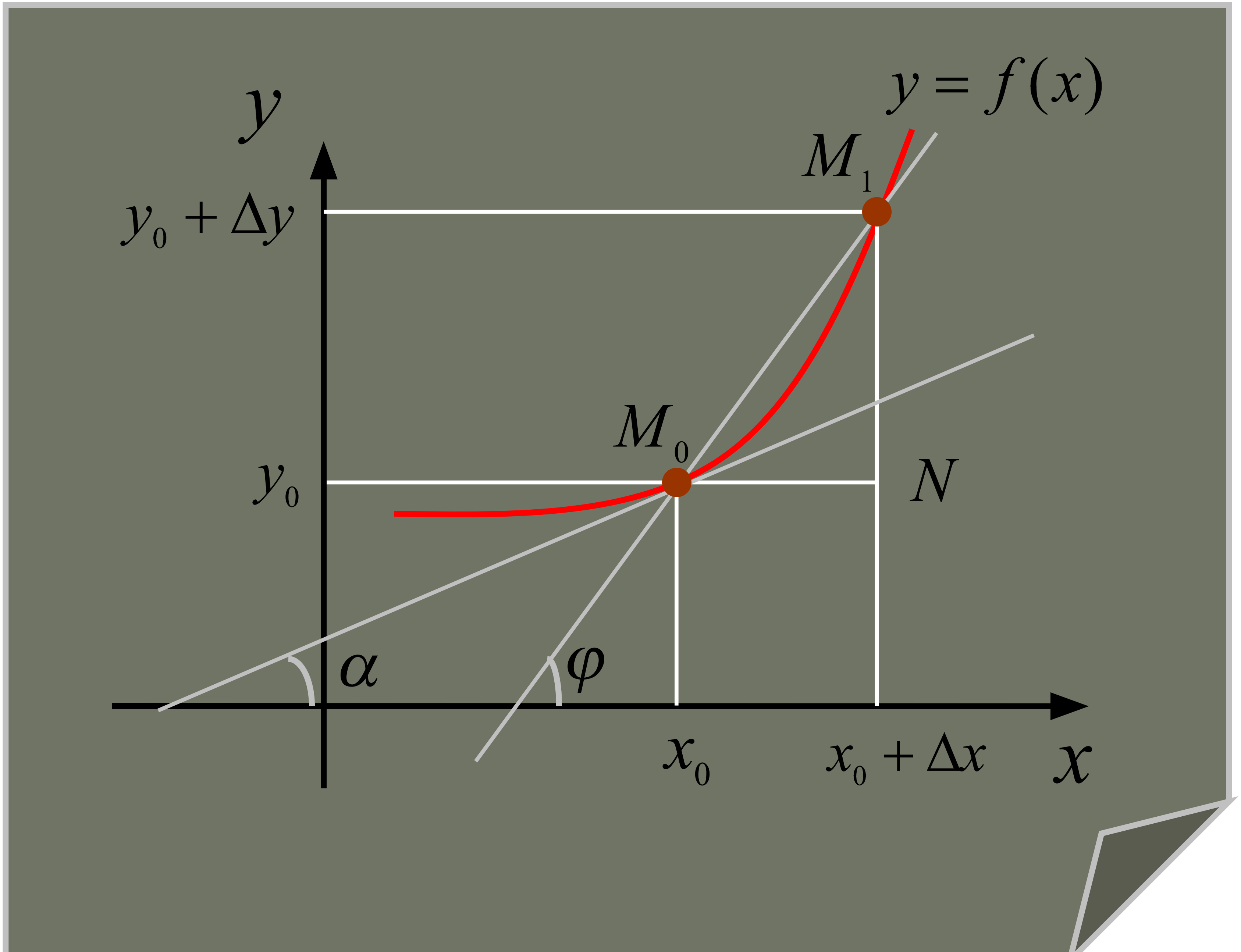
Пусть на плоскости XOY задана непрерывная кривая y=f(x).

Необходимо найти уравнение касательной к этой кривой в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Дадим аргументу x_0 приращение Δx и перейдем на кривой от точки $M_0(x_0, f(x_0))$ к точке $M_1(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$.

Проведем секущую M_0M_1.

Под касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ понимают предельное положение секущей M_0M_1 при приближении точки M_1 к точке M_0, т.е. при $\nabla x \to 0$


$y = f(x)$
y
M_1
$y_0 + \Delta y$
M_0
y_0
N
α
φ
x_0
$x_0 + \Delta x$
x

Уравнение прямой, проходящей через точку M_0 имеет вид:

$$y - f(x_0) = k(x - x_0)$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник M_0M_1N:

$$k_{M_0M_1} = tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- угловой коэффициент секущей M_0M_1.

Тогда угловой коэффициент касательной к кривой в точке M_0:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} k_{M_0 M_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2. Задача о скорости движения

Пусть вдоль некоторой прямой движется точка по закону $S=S(t)$, где S – пройденный путь, t – время движения.

Требуется найти скорость в момент времени t_0.

На момент времени t_0 пройденный путь составит $S_0=S(t_0)$, на момент времени $t_0+\Delta t$ пройденный путь составит $S_0+\Delta S=S(t_0+\Delta t)$.

Тогда за промежуток времени Δt средняя скорость составит:

$$v_{cp}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Чем меньше Δt, тем лучше средняя скорость характеризует движение в момент t_0.

Поэтому под скоростью точки в момент времени t_0 понимают:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Определение производной

Пусть функция *y=f(x)* определена на промежутке Х.

Выберем точку $x \in X$

Дадим аргументу *x* приращение Δ*x*, тогда функция получит приращение

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

<u>Производной</u> функции y=f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению независимого аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Обозначения производной:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}; \quad \frac{df(x)}{dx}$$

Нахождение производной функции называется дифференцированием.

Если функция имеет конечную производную в некоторой точке, то она называется дифференцируемой в этой точке.

Вернемся к рассматриваемым задачам.

Из задачи о касательной вытекает

геометрический смысл производно

Производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной, проведенной к кривой $y=f(x)$ в точке x_0:

$$k = f'(x_0)$$

Тогда уравнение касательной к кривой в данной точке будет иметь вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Из задачи о скорости движения вытекает

механический смысл производн

Производная пути по времени $S'(t_0)$ есть скорость точки в момент времени t_0:

$$v(t_0) = S'(t_0)$$

ТЕОРЕМА

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Непрерывность функции является необходимым, но не достаточным условием дифференцируемости функции.

Если функция имеет непрерывную производную на промежутке X, то она называется гладкой на этом промежутке.

Если производная функции имеет конечное число точек разрыва 1 рода, то такая функция называется кусочно-гладкой.

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Производная функции может быть найдена по схеме:

1

Дадим аргументу x приращение Δx и найдем значение функции $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$

2

Находим приращение функции

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

3

Составляем отношение: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

4

Находим $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

ПРИМЕР.

Найдем производную функции $y = x^3$

1. **Дадим аргументу *x* приращение *Δx* и найдем значение функции *y+Δy*:**

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$$

2. **Находим приращение функции**

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= \cancel{x^3} + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - \cancel{x^3} =$$

$$= \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)$$

3 **Составляем отношение** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$$

4

Находим $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}(3x^2 + \underbrace{3x\Delta x}_{0} + \underbrace{\Delta x^2}_{0}) = 3x^2$$

Полученный результат является частным случаем производной от степенной функции

$$y = x^n$$

Можно показать, что в общем случае

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

производная степенной функции

Таблица производных основных элементарных функций.

- 1. $(C)' = 0$
- 2. $(x^n)' = n x^{n-1}$

  $(x)' = 1$

  $(x^2)' = 2x$

  $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- 3. $(a^x)' = a^x \ln a$
- 4. $(e^x)' = e^x$
- 5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
- 6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

- 7. $(\sin x)' = \cos x$
- 8. $(\cos x)' = -\sin x$
- 9. $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- 10. $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

14. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1

Производная постоянной величины равна 0:

$$C' = 0 \quad (C = const)$$

2

Производная аргумента равна 1:

$$x' = 1$$

3

Производная алгебраической суммы (разности) конечного числа дифференцируемых функций равна сумме (разности) производных этих функций:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

Следствие 1.

Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(C\cdot u)' = C\cdot u'$$

Следствие2.

Производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждого из сомножителей на все остальные:

$$(u\cdot v\cdot w)' = u'\cdot v\cdot w + v'\cdot u\cdot w + w'\cdot u\cdot v$$

5

Производная частного двух дифференцируемых функций находится по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

ПРИМЕРЫ.

1

Найти производную функции

$$y = 15 \cdot (x^4 - 1)$$

и вычислить ее значение в точке х=1.

Решение.

$$y' = \underset{0}{15'} \cdot (x^4 - 1) + 15 \cdot (x^4 - 1)' =$$

$$= 15 \cdot (4x^3) = 60x^3$$

Находим значение производной в точке *x=1*:

$$y'(1) = 60 \cdot 1^3 = 60$$

2

Найти производную функции

$$y = x^3 \cdot (\sqrt[4]{x} + 1)$$

и вычислить ее значение в точке x=1.

Решение.

$$y' = \left(x^3\right)' \cdot (\sqrt[4]{x} + 1) + x^3 \cdot (\sqrt[4]{x} + 1)' =$$

$$= 3x^2 \cdot (\sqrt[4]{x} + 1) + \frac{1}{4} \cdot x^3 \cdot x^{-\frac{3}{4}} =$$

$$= 3x^{\frac{9}{4}} + 3x^2 + \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{9}{4}} = \frac{13}{4} x^{\frac{9}{4}} + 3x^2$$

Находим значение производной в точке *x=1*:

$$y'(1) = \frac{13}{4} \cdot 1^{\frac{9}{4}} + 3 \cdot 1^2 = \frac{25}{4}$$

3

Найти производную функции

$$y = \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x}}$$

и вычислить ее значение в точке x=1.

Решение.

$$y' = \frac{\left(x^3-1\right)' \cdot \sqrt{x} - (x^3-1)\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}{x} =$$

$$= \frac{3x^2 \cdot \sqrt{x} - (x^3-1)\cdot \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{x} =$$

$$= \frac{3x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x} = \frac{\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x}$$

Находим значение производной в точке *x=1*:

$$y'(1) = \frac{\frac{5}{2}\cdot 1^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\cdot 1^{-\frac{1}{2}}}{1} = 3$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть переменная *y* есть функция от переменной *u*, *y=f(u)*.

И пусть переменная *u* есть функция от переменной *x*, *u=φ(x)*.

То есть задана сложная функция

$$y = f\left[\varphi(x)\right]$$

ТЕОРЕМА

Если y=f(u), u=φ(x) – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной:

$$y' = f'(u) \cdot u'_x$$

Правило дифференцирования сложной функции можно записать иначе:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Примеры.

Найти производные сложных функций:

1

$$y = \left(\sqrt{x} + 5\right)^3$$

Решение:

$$y' = 3\cdot\left(\sqrt{x}+5\right)^2\cdot\left(\sqrt{x}+5\right)' =$$

$$= 3\cdot\left(\sqrt{x}+5\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{x}+5\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

2

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$$

Решение:

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{(x^2-1)'\cdot(x^2+1)-(x^2+1)'\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^2} =$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{2x\cdot(x^2+1)-2x\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{\cancel{2x^3}+2x-\cancel{2x^3}+2x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть *$y=f(x)$* – дифференцируемая и монотонная функция на промежутке *X*.

Если переменную *y* рассматривать как аргумент, а переменную *x* как функцию, то функция *$x=\varphi(y)$* является обратной функцией к данной, непрерывной на соответствующем промежутке *Y*.

ТЕОРЕМА

Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной исходной функции:

$$\boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}}$$

ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ

Пусть функция *y=f(x)* определена на промежутке *X* и дифференцируема в некоторой окрестности точки $x \in X$

Тогда существует конечная производная

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

Где $\alpha(\Delta x)$ **- бесконечно малая величина при** $\Delta x \to 0$

Следовательно,

$$\Delta y = \underline{f'(x)\cdot\Delta x} + \underline{\underline{\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x}}$$

Таким образом, приращение функции Δy

состоит из двух слагаемых:

1. **линейного относительно** Δx
2. **нелинейного, являющегося бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем** Δx

Дифференциалом функции называется главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

Пример.

Найти приращение и дифференциал функции

$$y = 2x^2 - 3x$$

при x=10 и Δx=0.1

Решение:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) =$$

$$= 2(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) - 2x^2 - 3x =$$

$$= (4x + 2\Delta x - 3) \cdot \Delta x$$

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = 4x \cdot \Delta x - 3\Delta x$$

при x=10 и Δx=0.1

$$\Delta y = 3.72 \qquad dy = 3.7$$

Пример.

Найти дифференциал функции

$$y = x$$

Решение:

$$dy = dx = f'(x) \cdot \Delta x = x' \cdot \Delta x = \Delta x$$

Следовательно, дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной:

$$\Delta x = dx$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Выберем на графике функции *y=f(x)* произвольную точку *M(x,y)*.

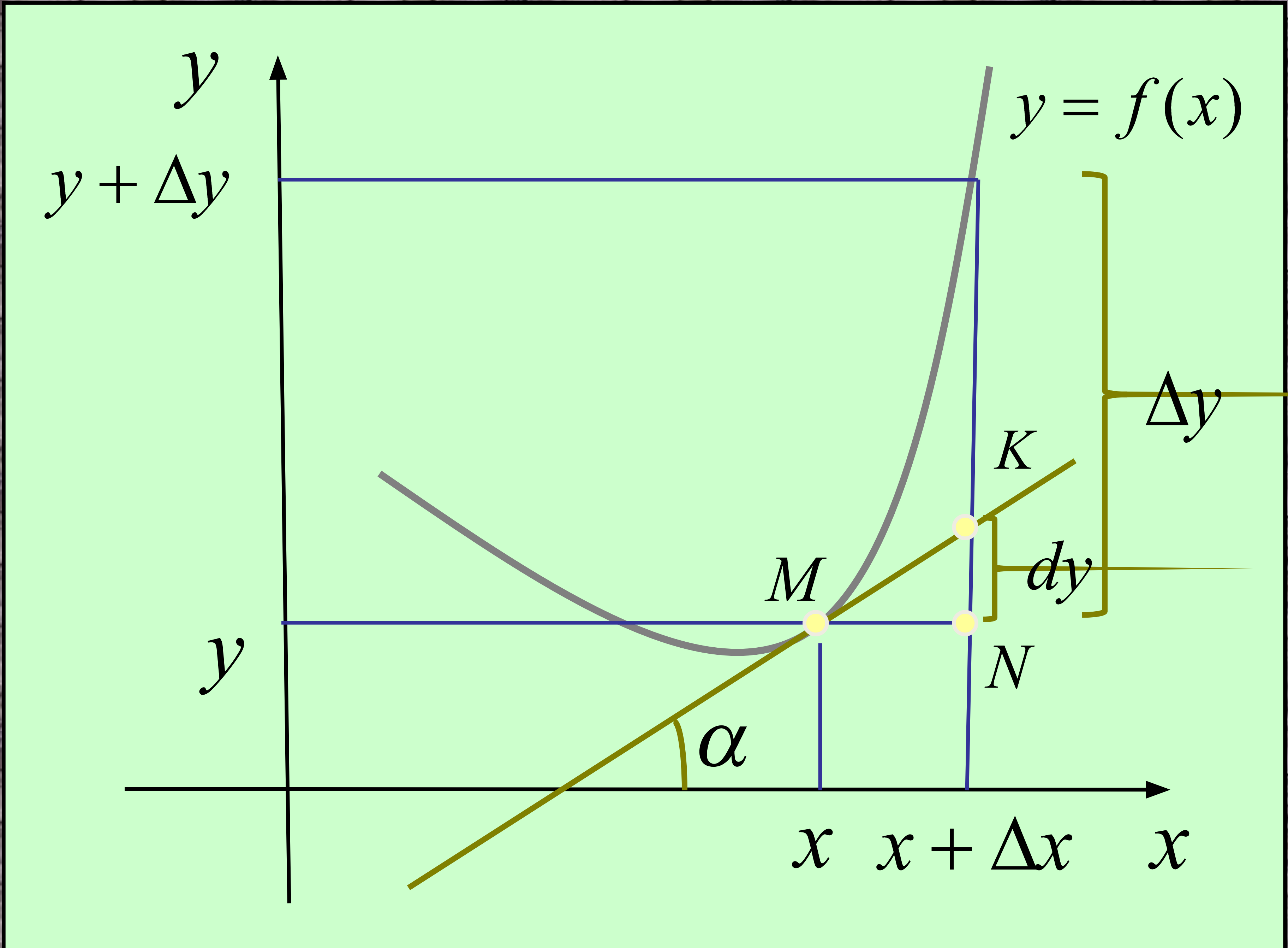
Дадим аргументу *x* приращение *Δx*. Тогда функция получит приращение

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

Проведем касательную к кривой *y=f(x)* в точке *M (x,y)*.

Из геометрического смысла производной следует, что

$$f'(x) = tg\alpha$$



y
$y = f(x)$
$y + \Delta y$
Δy
K
dy
M
y
N
α
x
$x + \Delta x$
x

Треугольник MNK – прямоугольный, следовательно

$$KN = MN \cdot tg\alpha = \Delta x \cdot f'(x)$$

$$KN = dy$$

Дифференциал функции есть приращение ординаты касательной, проведенной к графику функции y=f(x) в данной точке, когда x получает приращение Δx.