

# Практическое занятие П5

## Краткое содержание

1. Электрическое поле постоянных токов, основные характеристики и уравнения, формальная аналогия уравнений электростационарного и электростатического поля
2. Граничные условия
3. Методы изображений

# Электрическое поле постоянного тока

Мерой направленного движения электрических зарядов в проводниках служит **вектор плотности тока проводимости**:

$$\mathbf{J} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum q_n \mathbf{v}_n}{V}$$

$q_n$  - электрический заряд частицы  $n$ , движущейся со скоростью  $\mathbf{v}_n$ ,  $V$  - объем, в пределах которого производится суммирование.

**Поток вектора плотности тока проводимости** - ток проводимости

$$i = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{s}$$

Плотность тока проводимости и напряженность электрического поля связаны по закону Ома через среднюю проводимость среды:

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$$

(**закон Ома в дифференциальной форме**). В диэлектрике, окружающем проводник с током, так и внутри самих проводников, будут существовать электрическое и магнитное поле постоянного тока, называемые **стационарными**.

# Граничные условия на границе раздела проводник - проводник

На границе раздела проводник-проводник

$$J_{2n} = J_{1n}$$

составляющая вектора плотности тока, **нормальная** к поверхности

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

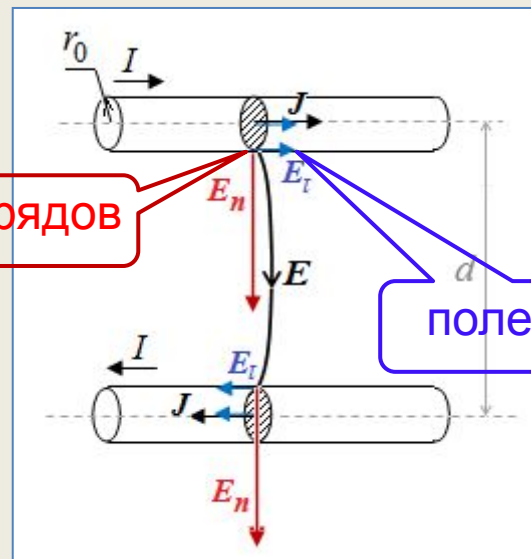
составляющая вектора напряженности электростационарного поля, **касательная** к поверхности

$$\gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n}$$

$$\frac{J_{1\tau}}{\gamma_1} = \frac{J_{2\tau}}{\gamma_2}$$

Поле в диэлектрике, окружающем проводник с током

поле зарядов



Для высоковольтных линий пренебрегаем тангенциальной составляющей, принимаем граничные условия как в электростатике

$$\frac{E_n}{E_\tau} \approx 3,5 \cdot 10^7$$

# Граничные условия на границе раздела проводник - проводник

*На границе раздела проводник-проводник*

$$J_{2n} = J_{1n}$$

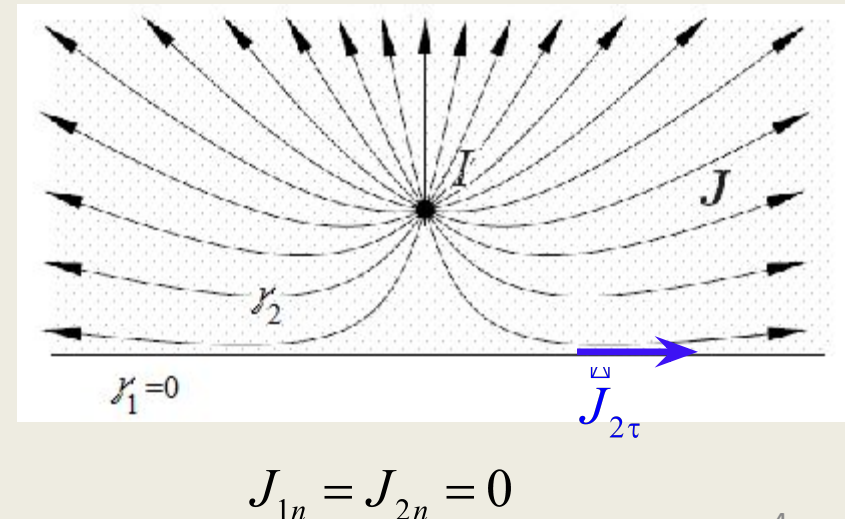
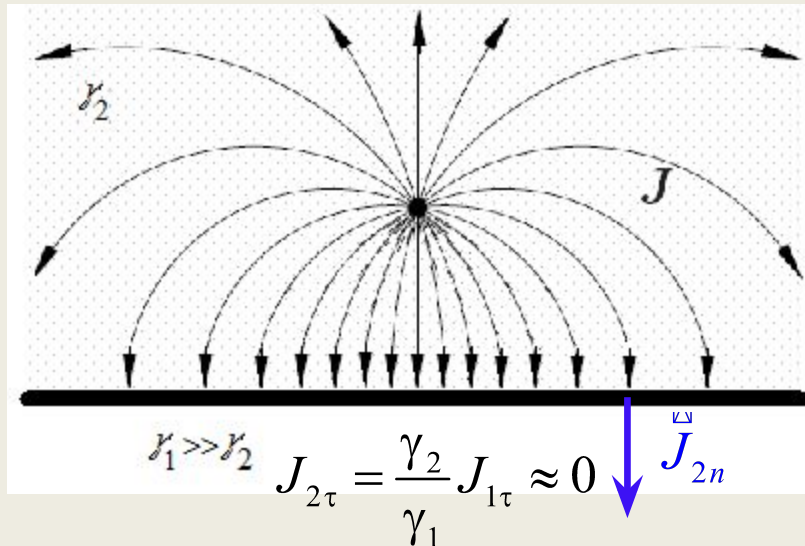
составляющая вектора плотности тока, **нормальная** к поверхности

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

составляющая вектора напряженности электростационарного поля, **касательная** к поверхности

$$\gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n}$$

$$\frac{J_{1\tau}}{\gamma_1} = \frac{J_{2\tau}}{\gamma_2}$$



# Формальная аналогия электростатического и электростационарного поля

Метод формальной аналогии позволяет при расчете токов в проводящей среде воспользоваться известными решениями соответствующих электростатических задач (или наоборот). Так линейная плотность заряда  $\tau$  соответствует току утечки на единицу длины  $I_0$ .

Проводимость  $G$  между двумя электродами в проводящей среде при одинаковой геометрии определяется через емкость  $C$  между теми же электродами в диэлектрике (или наоборот), при наличии аналогии полей выполняется соотношение

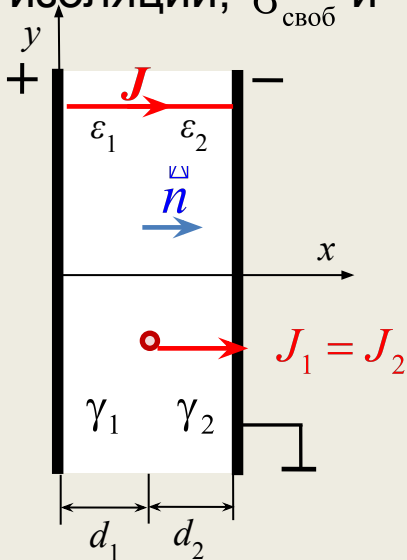
$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\gamma}$$

Так выражения для емкости и проводимости между жилой и оболочкой в случае неидеальной изоляции коаксиального кабеля имеют вид:

$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \Phi_{\text{М/М}} \quad ] \quad G_0 = \frac{2\pi\gamma}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \Phi_{\text{М/М}} \quad ]$$

# Задача 1

Плоский конденсатор с двумя слоями толщиной  $d_1 = d_2 = 1$  см; несовершенная изоляция 1 слоя  $\epsilon_{r1} = 2$ ,  $\gamma_1 = 2 \cdot 10^{-10}$  Ом/см и несовершенная изоляция 2 слоя  $\epsilon_{r2} = 4$ ,  $\gamma_2 = 1 \cdot 10^{-10}$  Ом/см подключили к источнику  $U = 3$  кВ. Найти напряженность поля в каждом слое, удельное сопротивление изоляции конденсатора, мощность, выделяющуюся в единице объема изоляции,  $\sigma_{своб}$  и  $\sigma_{связ}$  на границе слоев изоляции.



Напряжение между пластинами конденсатора (разность потенциалов):

$$U = \int_0^{d_1+d_2} E(x) dx = E_1 d_1 + E_2 d_2 \quad J_1|_{x=d_1} = J_2|_{x=d_1}$$

$$\gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2$$

$$\left. \begin{aligned} 3000 &= 0,01 E_1 + 0,01 E_2 \\ 2 E_1 &= 1 E_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} E_1 &= 200 \text{ В/м} & E_1 &= 2 \text{ кВ/см} \\ E_2 &= 400 \text{ В/м} & E_2 &= 4 \text{ кВ/см} \end{aligned}$$

$$J_1 = J_2 = 2 \cdot 10^{-10} E_1 = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ А/см}^2$$

$$E_n = E_x = E$$

$$J_n = J_x = J$$

$$J \uparrow \uparrow \frac{dx}{dx}$$

$$E \uparrow \uparrow \frac{dx}{dx}$$

$$D_{1n} = D_1 = \epsilon_{r1} \epsilon_0 E_1 = 2 \cdot 10^3 \epsilon_0 E_1$$

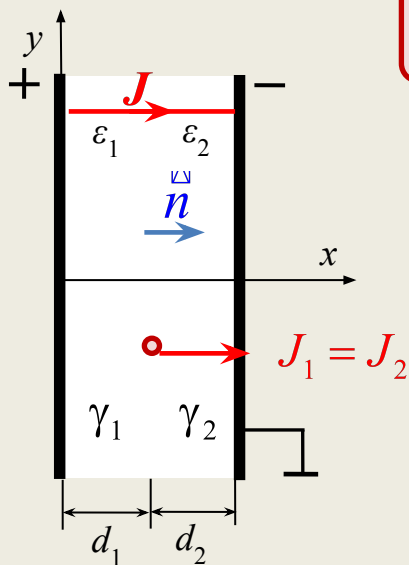
$$D_{2n} = D_2 = \epsilon_{r2} \epsilon_0 E_2 = 4 \cdot 10^3 \epsilon_0 E_2$$

$$\left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \epsilon_0 \left[ \frac{\Phi}{\text{см}} \right]$$

# Задача 1 (продолжение)

$$P_{1n} = P_1 = (\kappa_{r1}/\text{см}) \varepsilon_0 E_1^2 = 10^3 \varepsilon_0^2 \quad \varepsilon_0 \left[ \frac{\text{Ф}}{\text{см}} \right]$$

$$P_{2n} = P_2 = (\kappa_{r2}/\text{см}) \varepsilon_0 E_2^2 = 6 \cdot 10^3 \varepsilon_0^2$$



$$\sigma_{\text{своб}} = D_2 - D_1 = \kappa_{r1}/0^3 \varepsilon_0^2$$

$$\sigma_{\text{связ}} = P_1 - P_2 = -\kappa_{r1}/0^3 \varepsilon_0^2$$

Активная мощность в единице объема:

$$p_1 = \gamma_1 E_1^2 = \text{Вт/см}^3 \quad p_2 = \gamma_2 E_2^2 = \text{Вт/см}^3$$

Удельное сопротивление изоляции:

$$R_0 = \frac{U}{J} = \frac{3000}{0,2 \cdot 10^{-6}} = 0,5 \text{ М/см}^2$$

**Замечание:** Если бы изоляция была совершенная, то граничные условия  $D_1|_{x=d_1} = D_2|_{x=d_1}$

$$E_n = E_x = E$$

$$J_n = J_x = J$$

$$J \uparrow \uparrow dx$$

$$E \uparrow \uparrow dx$$

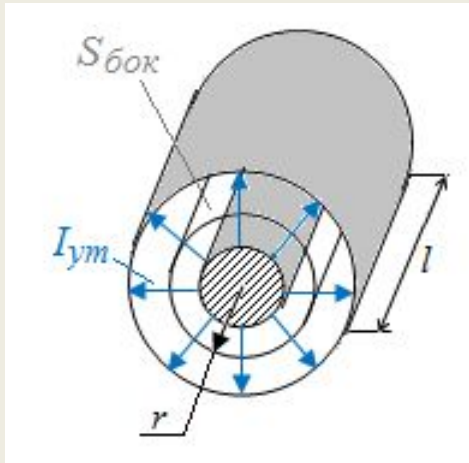
$$\left. \begin{aligned} U &= E_1 d_1 + E_2 d_2 \\ \varepsilon_{r1} \varepsilon_0 E_1 &= \varepsilon_{r2} \varepsilon_0 E_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} E_1 &= \text{кВ/см} \\ E_2 &= \text{кВ/см} \end{aligned}$$

## Задача 2

**Дано:** Изоляция коаксиального кабеля имеет удельную проводимость

$\gamma = 0,1 \text{ М/м}$ . Радиус жилы  $R_1 = 0,4 \text{ см}$ , оболочки  $R_2 = 0,8 \text{ см}$ .

Напряжение между жилой и оболочкой  $U = 600 \text{ В}$ . Определить удельную проводимость кабеля, плотность тока утечки на поверхности жилы и оболочки, удельную мощность в тех же точках, активную мощность в изоляции кабеля на единицу длины.



**Решение:** Выберем в качестве поверхности через которую будем рассчитывать ток утечки с поверхности жилы цилиндр, ось которого совпадает с осью жилы, радиусом  $r$  и длиной  $\ell$ . Поток вектора плотности тока через боковую поверхность определит весь ток утечки (по торцевым поверхностям поток не проходит).

$$\text{Ток утечки } I_{ym} = \int_{S_{\text{цил}}} \mathbf{J} ds = JS_{\text{бок}} = J2\pi r\ell$$

$$J(r) = \frac{I_{ym}}{2\pi r\ell} = \frac{I_0}{2\pi r} \quad \text{модуль!}$$

$I_0$  - ток утечки на единицу длины [А/м]



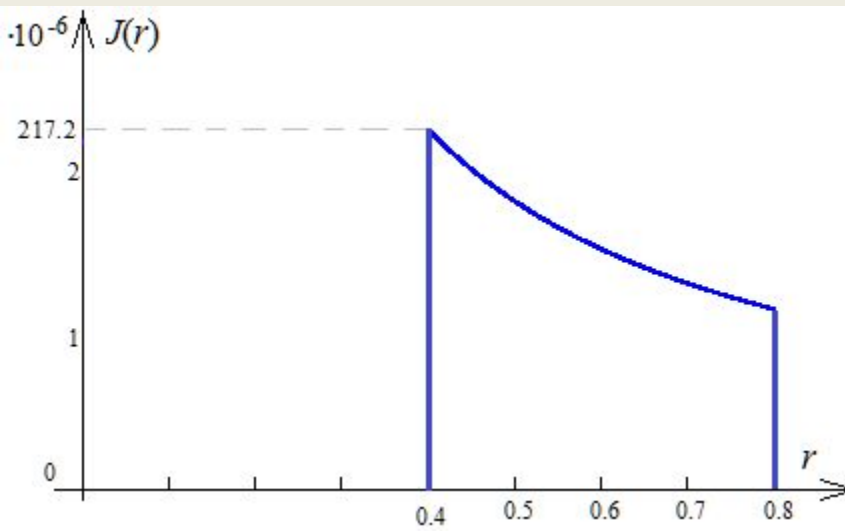
## Задача 2 (продолжение)

Напряженность электрического поля тока утечки также имеет радиальную составляющую и по закону Ома в дифференциальной форме равно:

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I_0}{2\pi\gamma r} \quad \text{модуль!}$$

Напряжение между жилой и оболочкой

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{I_0}{2\pi\gamma r} dr = \frac{I_0}{2\pi\gamma} \ln \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow G_0 = \frac{I_0}{U} = \frac{2\pi\gamma}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi \cdot 10^{-9}}{\ln \frac{0,8}{0,4}} = 0,11 \cdot 10^{-9}$$



$$I_0 = G_0 U = 0,11 \cdot 10^{-9} \cdot 600 = 5,46 \cdot 10^{-6}$$

$$J_1 = J|_{r=R_1} = \frac{I_0}{2\pi R_1} = \frac{5,46 \cdot 10^{-6}}{6,28 \cdot 0,4 \cdot 10^{-2}} = 217 \cdot 10^{-6} \text{ A/m}^2$$

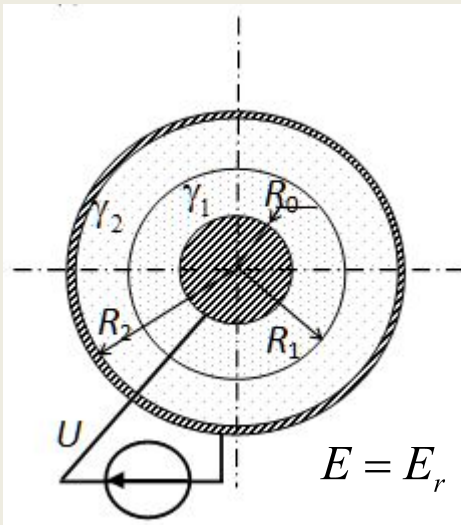
$$J_2 = J|_{r=R_2} = \frac{I_0}{2\pi R_2} = \frac{5,46 \cdot 10^{-6}}{6,28 \cdot 0,8 \cdot 10^{-2}} = 108,5 \cdot 10^{-6} \text{ A/m}^2$$

$$p_1 = \frac{J_1^2}{\gamma_1} = 47,5 \text{ Вт/м}^3 \quad p_2 = \frac{J_2^2}{\gamma_1} = 1,1 \text{ Вт/м}^3$$

$$P_{\text{вкт}} = G U^2 = 3,2 \text{ Вт/м}$$

## Задача 3

**Дано:** Определить ток утечки и сопротивление изоляции двухслойного цилиндрического конденсатора на 1 м длины, если  $U = 100$  В,  $R_0 = 5$  мм,  $R_1 = 20$  мм,  $R_2 = 40$  мм, удельная проводимость неидеальной изоляции первого слоя  $\gamma_1 = 10^{-7}$  М/м, второго слоя  $\gamma_2 = 2 \cdot 10^{-7}$  М/м.



**Решение:** Выберем в качестве поверхности через которую будем рассчитывать ток утечки с поверхности жилы цилиндр, ось которого совпадает с осью жилы, радиусом  $r$  и длиной  $\ell$ . Поток вектора плотности тока через боковую поверхность определит весь ток утечки (по торцевым поверхностям поток не проходит).

Ток утечки 
$$I_{ym} = \int_{S_{цпл}} \mathbf{J} ds = JS_{бок} = J2\pi r\ell \quad R_0 \leq r \leq R_2$$

$$J(r) = \frac{I_{ym}}{2\pi r\ell} = \frac{I_0}{2\pi r} \quad I_0 - \text{ток утечки на единицу длины [А/м]}$$

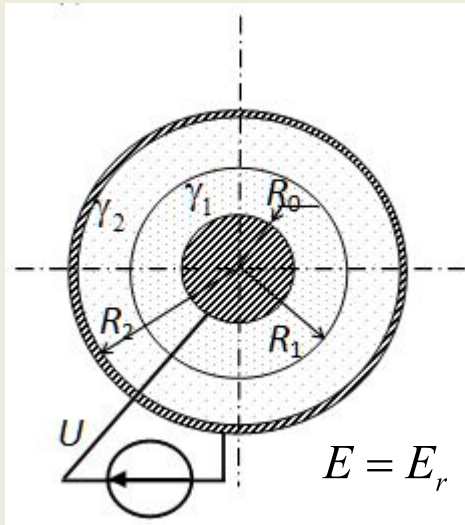
1) в первом слое  $R_0 \leq r \leq R_1$  
$$E_1(r) = \frac{J(r)}{\gamma_1} = \frac{I_0}{2\pi\gamma_1} \frac{1}{r}$$

2) во втором слое  $R_1 \leq r \leq R_2$  
$$E_2(r) = \frac{J(r)}{\gamma_2} = \frac{I_0}{2\pi\gamma_2} \frac{1}{r}$$

## Задача 3

Напряжение между жилой и оболочкой

$$U = \int_{R_0}^{R_1} E_1 dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2 dr = \int_{R_0}^{R_1} \frac{I_0}{2\pi\gamma_1} \frac{1}{r} dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{I_0}{2\pi\gamma_2} \frac{1}{r} dr = \frac{I_0}{2\pi} \left( \frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$



Удельная проводимость двухслойного конденсатора с несовершенной изоляцией

$$G_0 = \frac{I_0}{U} = \frac{2\pi}{\left( \frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{R_2}{R_1} \right)}$$

$$G_0 = \frac{2\pi}{\left( \frac{1}{10^{-7}} \ln \frac{20}{5} + \frac{1}{2 \cdot 10^{-7}} \ln \frac{40}{20} \right)} = 3,624 \cdot 10^{-7}$$

Удельное сопротивление изоляции двухслойного цилиндрического конденсатора

$$R_0 = \frac{U}{I_0} = \frac{1}{G_0} = \frac{1}{3,624 \cdot 10^{-7}} \approx 2,76 \cdot 10^6$$

Ток утечки на единицу длины  $I_0 = \frac{U}{R_0} = G_0 U = 3,624 \cdot 10^{-7} \cdot 100 \approx 36,24 \cdot 10^{-6}$

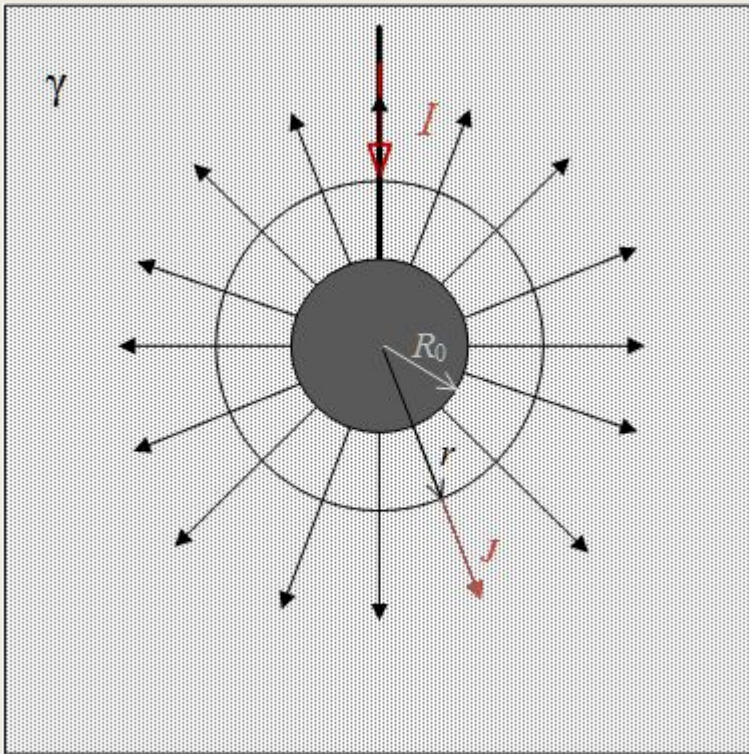
# Сопротивление заземлителя и шаговое напряжение

Для осуществления соединения какой-либо точки электрической цепи (электроустановки) с землей используют **заземлитель** - металлический электрод или систему электродов. Методами теории поля определяются сопротивления при растекании тока по земле с поверхностями погруженных в нее электродов, называемые **сопротивления заземления**. При наличии неоднородности среды (почвы) используют методы изображений.

Важнейшим является расчет **шагового напряжения** - разности потенциалов на поверхности земли на расстоянии, равном ширине шага. Рассчитывается радиус "безопасной зоны", шаговое напряжение вне этой зоны не превышает предельно допустимого значения. В соответствии с граничными условиями на поверхности почвы есть **только тангенциальная составляющая плотности тока**,  $J_{\text{так}}$  как в воздухе. Тангенциальная составляющая плотности тока определяет наличие на поверхности тангенциальной составляющей напряженности электрического поля и разности потенциалов на поверхности земли.

# Сферический заземлитель в однородной среде

Для сферического заземлителя радиусом  $R_0$ , вкопанного в почву с удельной проводимостью  $\gamma$  настолько глубоко, что поверхность земли можно не учитывать, плотность тока растекания может быть определена на расстоянии  $r \geq R_0$



$$I = \int_{S_{\text{сферы}}} \mathbf{J} ds = JS_{\text{сферы}} = J4\pi r^2 \Rightarrow J(r) = \frac{I}{4\pi r^2}$$

напряженность электрического поля тока растекания  $r \geq R_0$  (модуль)

$$E(r) = \frac{J(r)}{\gamma} = \frac{I}{4\pi r^2 \gamma} \quad \text{модуль!}$$

потенциал электрического поля

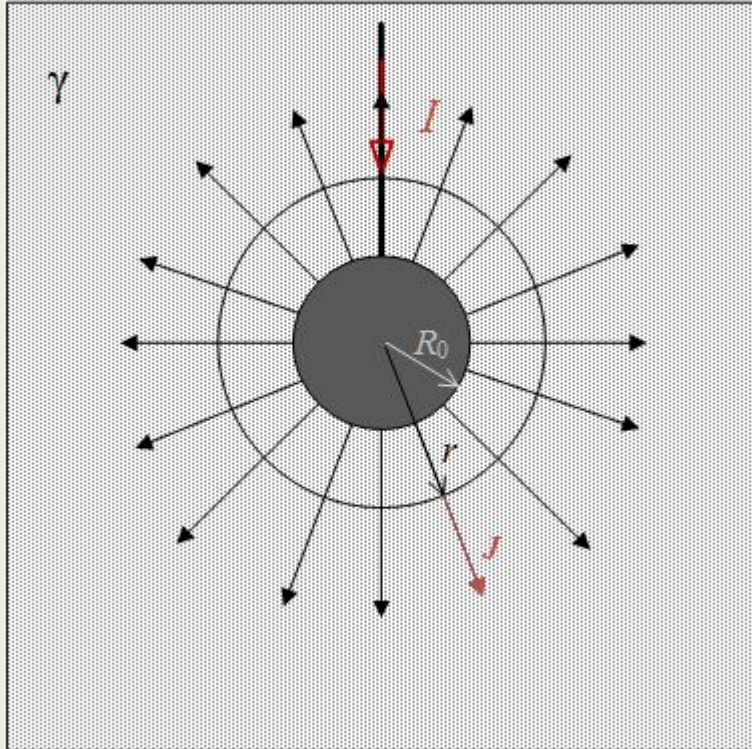
$$\varphi(r) = -\int E(r) dr + C = \frac{I}{4\pi \gamma r} + C \quad r \geq R_0$$

если  $\varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0$  то  $C=0$   $\varphi(r) = \frac{I}{4\pi \gamma r}$

потенциал заземлителя  $\varphi(R_0) = \frac{I}{4\pi \gamma R_0}$

# Задача 4

Дано:  $I = 1000$      $R_0 = 0,5$      $\gamma = 0,01$

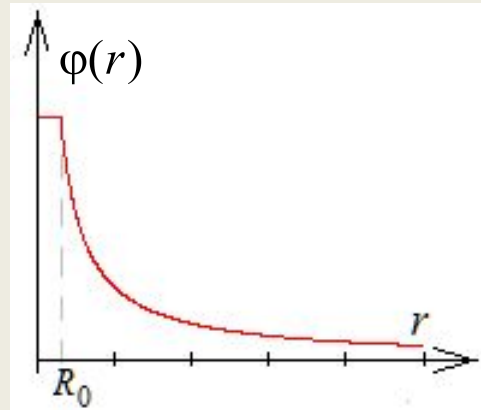


Сопротивление заземлителя

$$R_{\text{заземл}} = \frac{\varphi(R_0)}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma R_0}$$

$$R_{\text{заземл}} = 0,592$$

$$\varphi(R_0) = R_{\text{заземл}} I = 15,92$$



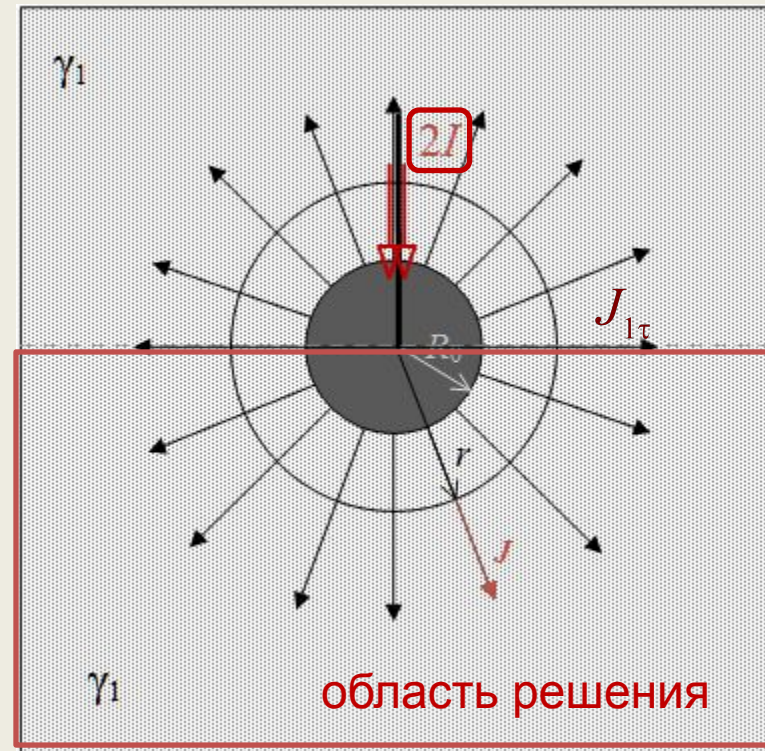
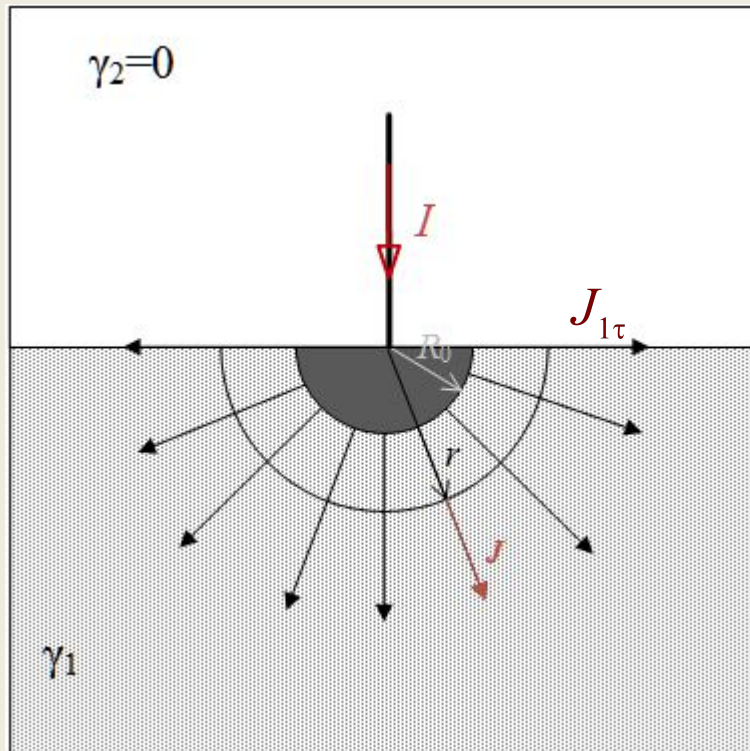
$$\varphi(r) = 15,92 \quad r \leq R_0$$

$$\varphi(r) = \frac{7961,8}{r} \quad r \geq R_0$$

# Полусферический заземлитель

Рассмотрим задачу расчета электростационарного поля полусферического заземлителя радиуса  $R_0$ , расположенного в почве с удельной проводимостью  $\gamma_1$ . Неоднородная среда  $\gamma_2 = 0$ ,  $J_{2n} = J_{1n} = 0$ .

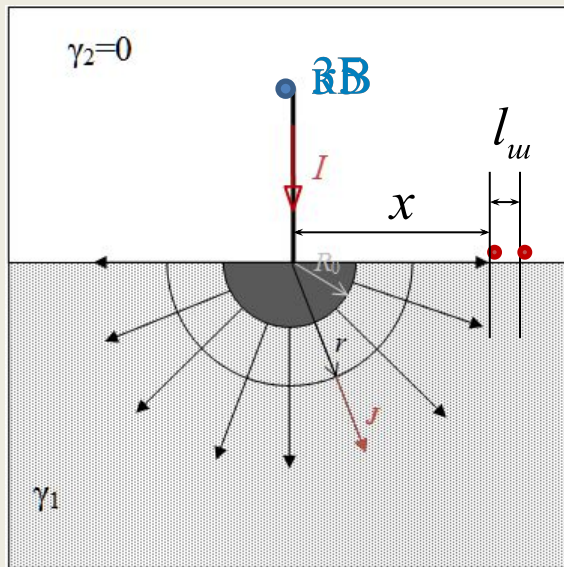
На поверхности есть только  $J_{1\tau}$ .



Поле полусферического заземлителя совпадает с полем сферического заземлителя в однородной среде с током  $2I$  (в нижней полуплоскости)

# Задача 5

**Дано:** Полусферический заземлитель  $R_0 = 0,5$  расположен в почве  $\gamma = 0,01 \text{ М}$ . Определить сопротивление заземлителя относительно «бесконечно» удаленной точки (сопротивление растекания). Полагая, что через заземлитель произошло замыкание с  $U = 380$  найти ток короткого замыкания, шаговое напряжение на расстоянии 20 м от заземлителя, радиус безопасной зоны, в которой шаговое напряжение не превышает 12 В. Длина шага  $l_{ш} = 0,7$



$$2I = JS_{\text{сферы}} = J4\pi r^2$$

$$J(r) = \frac{2I}{4\pi r^2} = \frac{I}{2\pi r^2}$$

$$E(r) = \frac{J(r)}{\gamma_1} = \frac{I}{2\pi r^2 \gamma_1}$$

$$r \geq R_0$$

потенциал электрического поля  $\varphi(r) = \frac{I}{2\pi\gamma r} + C \quad \varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(r) = \frac{I}{2\pi\gamma r}$



## Задача 5

Сопротивление полусферического заземлителя

$$R_{\text{заземл}} = \frac{\varphi(R_0)}{I} = \frac{1}{2\pi\gamma R_0}$$

$$R_{\text{заземл}} = 0,185$$

Ток короткого замыкания  $I = \frac{\varphi(R_0)}{R_{\text{заземл}}} = \frac{U}{R_{\text{заземл}}} = 1100 \text{ A}$

Шаговое напряжение  $U_{\text{ш}}(x) = \varphi(x) - \varphi(x + l_{\text{ш}}) = \int_x^{x+l_{\text{ш}}} E(r) dr$

$$U_{\text{ш}}(x) = \varphi(x) - \varphi(x + l_{\text{ш}}) = \frac{I}{2\pi\gamma x} - \frac{I}{2\pi\gamma(x + l_{\text{ш}})} = \frac{I}{2\pi\gamma} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{x + l_{\text{ш}}} \right] = \frac{I \cdot l_{\text{ш}}}{2\pi\gamma \cdot x \cdot (x + l_{\text{ш}})}$$

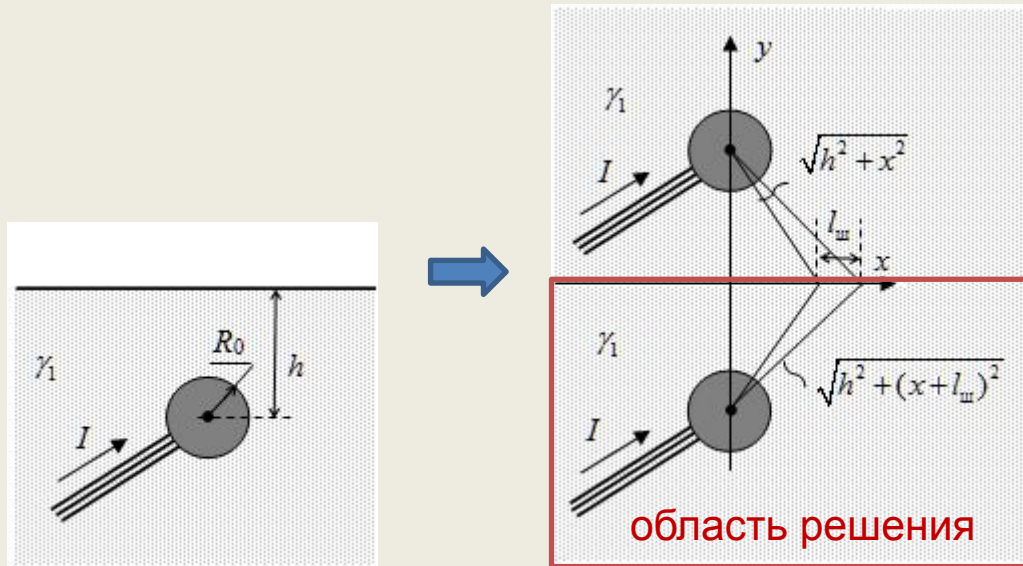
Если  $x = 20$   $l_{\text{ш}} = 0,7$

$$U_{\text{ш}}(x)|_{x=20} = \frac{1100 \cdot 0,7}{2\pi \cdot 0,01 \cdot 20 \cdot (20 + 0,7)} = 29,6 \text{ В}$$

Радиус безопасной зоны  $U_{\text{ш}}(x)|_{x_{\text{б}}} \leq 12 \text{ В}$   $x_{\text{б}} \approx 32$

# Методы изображений

Расчет поля в неоднородной среде проводится с помощью метода изображений (задача Сирла)

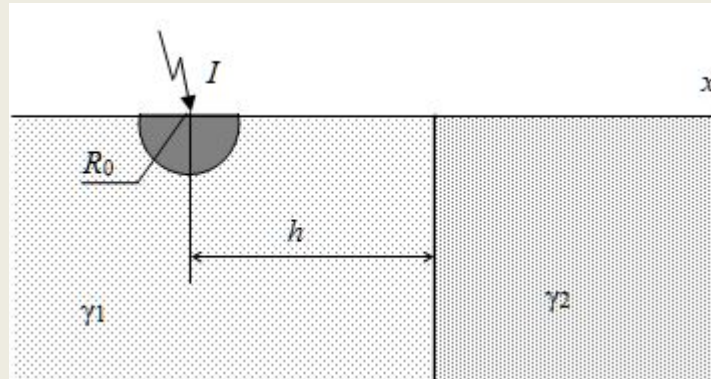


Шаговое напряжение с учетом тока двух заземлителей

$$U_{\text{ш}}(x) = \frac{2I}{4\pi\gamma_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2+h^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+l_{\text{ш}})^2+h^2}} \right\} = \frac{I}{2\pi\gamma_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2+h^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+l_{\text{ш}})^2+h^2}} \right\}$$

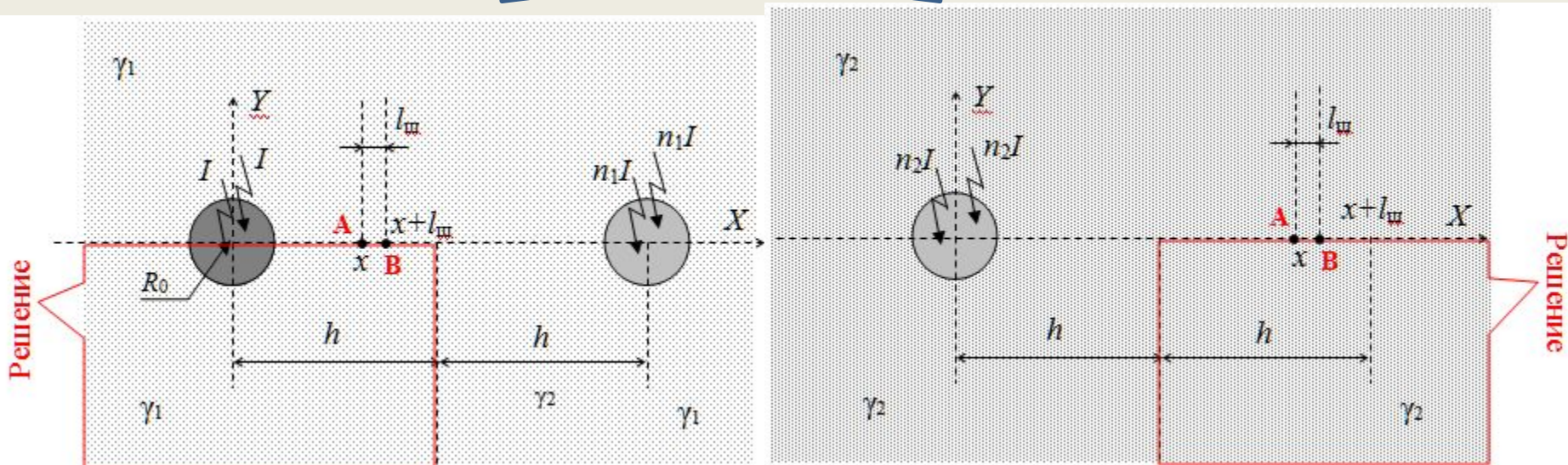
# Методы изображений

Расчет поля в неоднородной среде проводится с помощью метода изображений (задача Сирла)



В первой среде

Во второй среде



Автор доц. каф. ТОЭ НИУ  
«МЭИ»

МП

Жохова М.П.  
ZhokhovaMP@mpei.ru