

XVIII Командная олимпиада школьников Санкт- Петербурга по информатике и программированию

Разбор задач

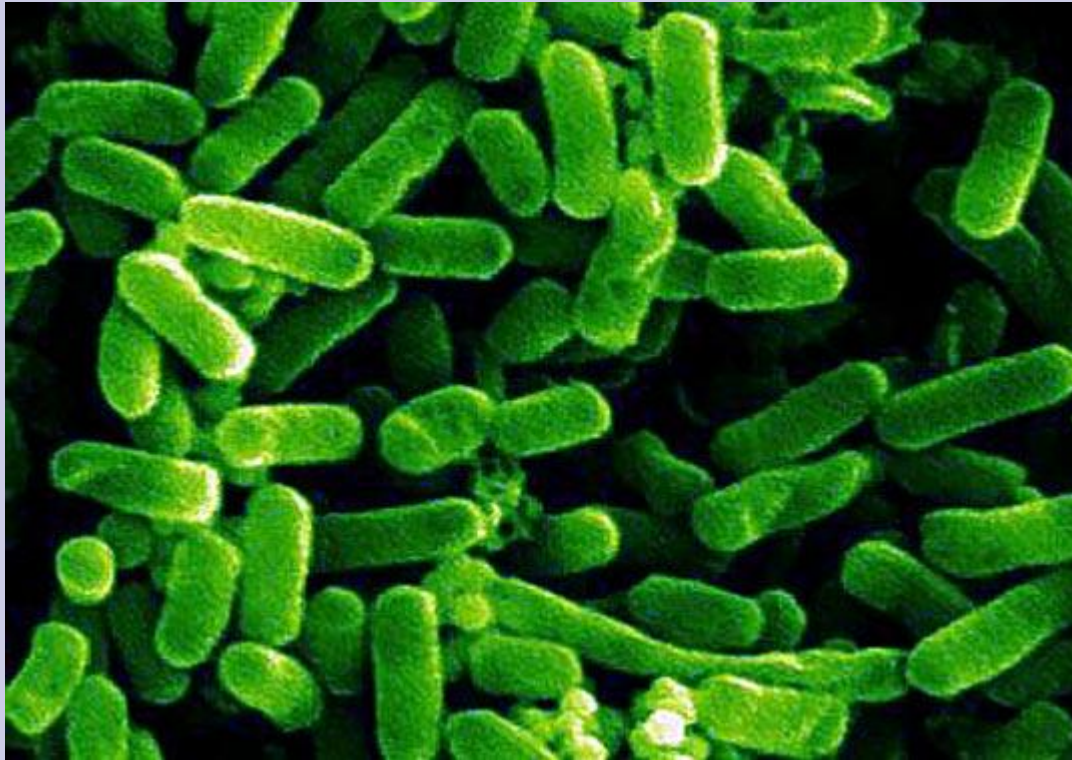
31 октября 2010 года

Санкт-Петербург



Задача А

Бактерии



- Автор задачи – Михаил Дворкин
- Условие – Михаил Дворкин
- Подготовка тестов – Сергей Мельников
- Разбор – Антон Ахи

Постановка задачи

- Дано целое число n
- За один шаг можно:
 - Разделить n на любой его простой делитель
 - Возвести число n в квадрат
- Требуется за минимальное число шагов получить число m

Идея решения

- Определить, возможно ли получить m
 - Разложить m на простые делители
 - Если хотя бы один из них не является делителем n , то ответ «Impossible»

Нахождение решения

- Рассмотреть задачу с конца — получить из t число n , если разрешены операции:
 - Извлечь корень
 - Домножить на произвольное простое число

Решение

- Разложить оба числа на простые множители
- Пока существует простой делитель, который входит в m в большей степени, чем в n , доводим каждый простой делитель m до четной степени и извлекаем корень
- Домножаем на оставшиеся простые

Почему это работает?

- Единственный способ уменьшить показатель простого делителя — извлечение корня, которое возможно лишь при условии четности всех степеней
- Перед любым извлечением корня невыгодно увеличивать показатель более чем на один

Задача В

Шахматная

ГОЛОВОЛОМКА



- Автор задачи – Виталий Аксенов
- Условие – Сергей Поромов
- Подготовка тестов – Владимир Ульянов
- Разбор – Антон Ахи

Условие задачи

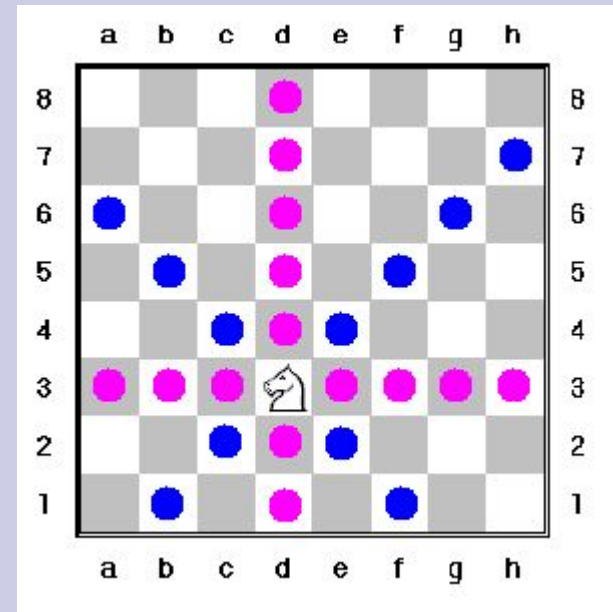
- Дано расположение коня на доске
- Требуется поставить ладью и слона на доску, чтобы они били коня, но не били друг друга

Как решать?

- Если слон или ладья бьют коня, то конь их не бьет
- Позичий на доске мало
- Переберем все возможные позиции ладьи и слона, из которых они бьют коня
- Проверим, что поставленные фигуры не бьют друг друга

Интересные клетки

- Ладья бьет все поля в том же столбце или строке
- Слон бьет все поля с такой же разницей номеров строки и столбца



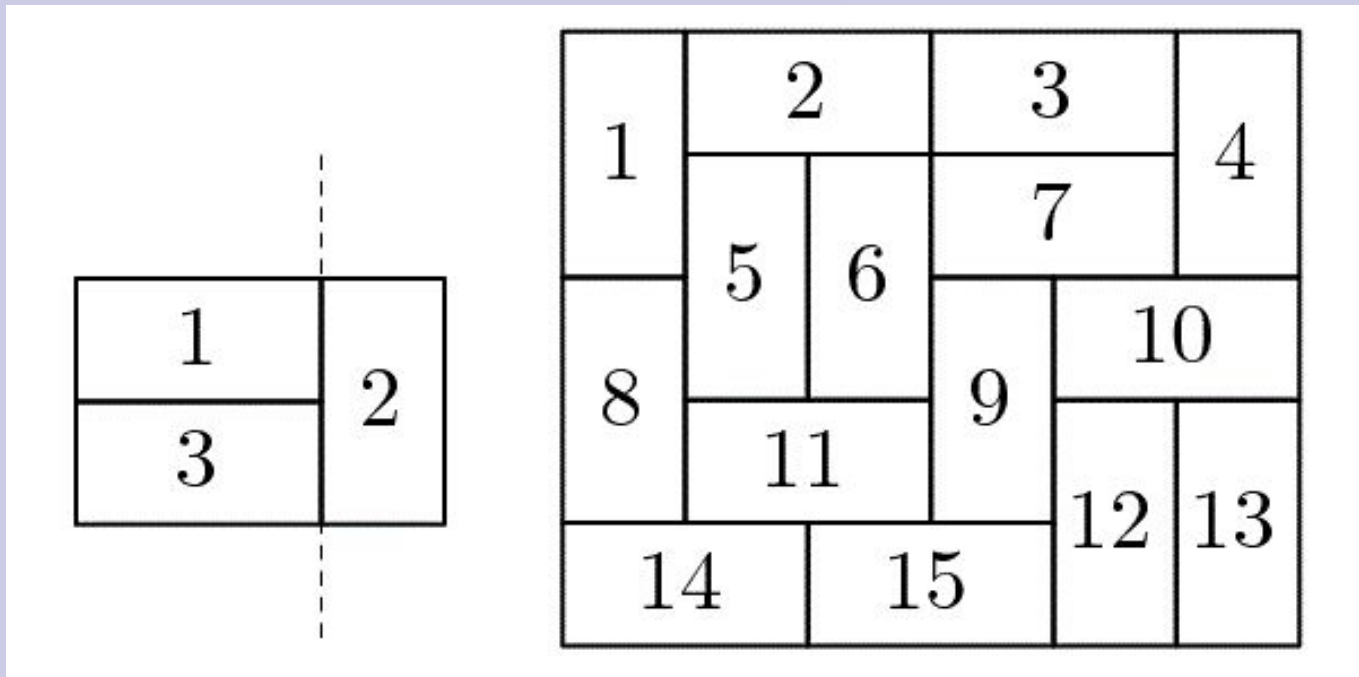
Задача С

Шоколад



- Автор задачи – Виталий Аксенов
- Условие – Антон Ахи
- Подготовка тестов – Нияз Нигматуллин
- Разбор – Сергей Поромов

О чем задача?



Как решать?

- Перебрать всевозможные вертикальные и горизонтальные разрезы
- Проверить, можно ли хоть один из них провести: с разных сторон от разреза должны быть различные дольки, то есть различные числа

Задача D

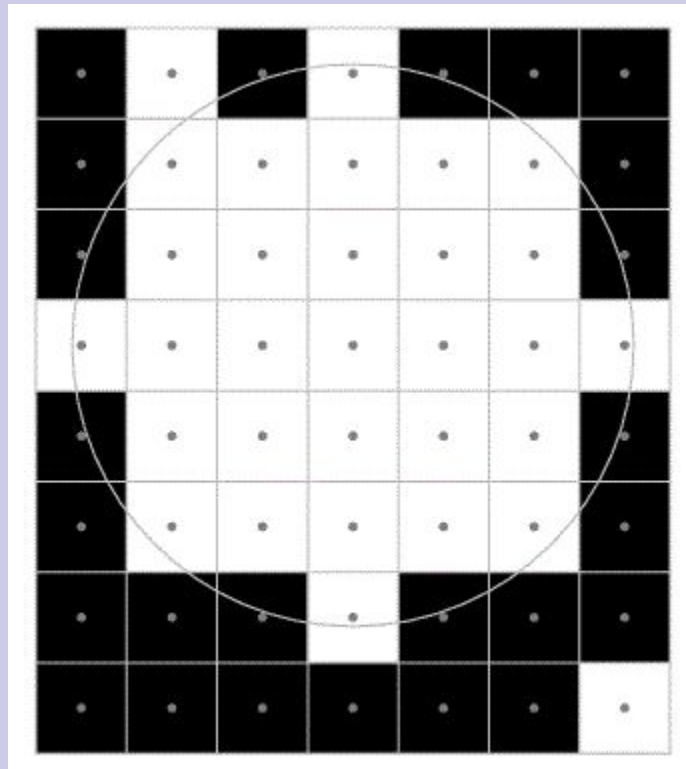
Луна



- Автор задачи – Юрий Петров
- Условие – Юрий Петров
- Подготовка тестов – Владимир Ульянов
- Разбор – Сергей Порохов

О чем задача?

- Необходимо найти луну на фотографии



Как решать?

- Ограничения небольшие – можно и достаточно проверить всевозможные положения и размеры луны, выбрать наибольший размер
- Не забыть, что луна должна быть целиком на фотографии

Как проверить луну?

- Проверить, что все точки фотографии на расстоянии не более радиуса от центра луны белые
- Расстояние можно считать в целых числах: $\|x - x_0\|^2 + \|y - y_0\|^2 \leq r^2$
- Проверка работает за $O(w \cdot h)$.

Задача E

Ожерелье



- Автор задачи – Михаил Дворкин
- Условие – Сергей Поромов
- Подготовка тестов – Нияз Нигматуллин
- Разбор – Сергей Мельников

Как решать?

- Ожерелий из двух, трех, четырех и пяти жемчужин нет
- Для остальных возьмем ожерелье

1 1 0 1 0 ... 0

Оно подходит, так как ось может проходить лишь через 1, но все такие оси не являются осями симметрии

Альтернативное решение

- Генерируем случайное ожерелье
- Проверяем, есть ли ось симметрии

Задача F Гонки



- Автор задачи – жюри олимпиады
- Условие – Антон Банных
- Подготовка тестов – Виталик Аксенов
- Разбор – Сергей Мельников

За какое время проедет машина?

- Проедет $x \operatorname{div} (tv)$ целых сегментов длиной tv , сделает между ними $x \operatorname{div} (tv) - 1$ зарядок батареей
- Если $x \bmod (tv)$ не 0, то надо проехать ещё, а для этого зарядить батарею
- Таким образом, число зарядок: $\operatorname{ceil}(x / (tv)) - 1$
- Остальное время едет со скоростью v

Как решать?

- Время для одной машины

$$x / v + (\text{ceil}(x / (tv)) - 1) * t$$

- Сравнить время, за которое машины достигнут финиша

Задача G Робот



- Автор задачи – Михаил Дворкин
- Условие – Михаил Дворкин
- Подготовка тестов – Алексей Цыпленков
- Разбор – Алексей Цыпленков

О чем задача

- Робот переместился из начала координат в точку $A(x, y)$, при этом робот поворачивал только на 90 градусов направо или налево
- Дана последовательность поворотов
- Определить длины отрезков пути робота или некорректность пути

Как решать?

- Длина каждого отрезка пути не меньше 1 и не больше 10^6
- Для каждого направления (вверх, вниз, вправо, влево) найдем, есть ли отрезок пути робота, на котором он движется по этому направлению

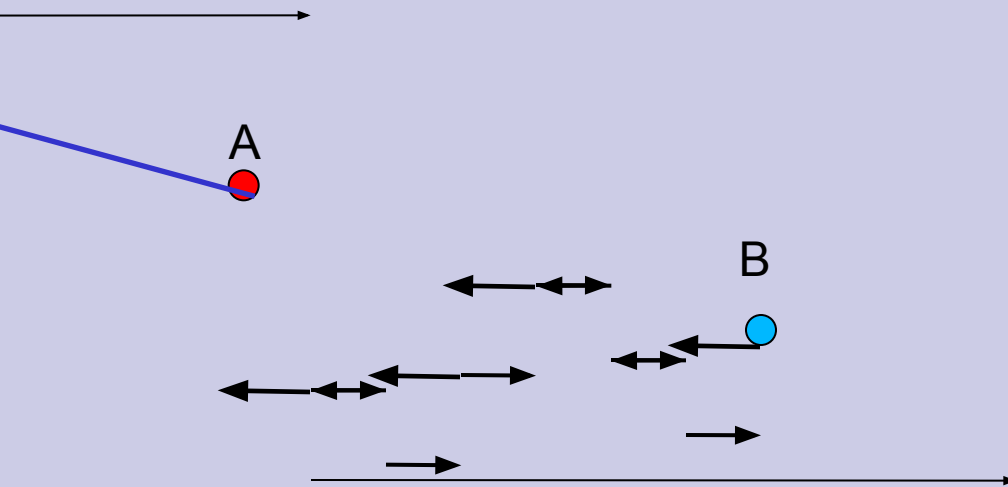
- Пусть робот попадет в точку B , если всегда будет смещаться на 1
- Чтобы попасть из B в A , нужно дополнительно сместиться на вектор $A - B$
- Разложим вектор $A - B$ по направлениям:

$$A - B = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(все числа k_1, k_2, k_3, k_4 неотрицательны и не менее двух были равны нулю)

- Если все направления, коэффициенты при которых не равны 0, были найдены в пути робота, то ответ существует и строится следующим образом:
- Длины всех отрезков принять за 1
- Для каждого направления с ненулевым k взять один произвольный отрезок движения по этому направлению и увеличить его длину на k

- Если какого-то направления с ненулевым k нет в пути, то ответа не существует



Задача Н Санта



- Автор задачи – Виталий Аксенов
- Условие – Сергей Мельников
- Подготовка тестов – Алексей Цыпленков
- Разбор – Алексей Цыпленков

О чем задача

- Даны два списка из K и M натуральных чисел, каждое не больше N . Найти все числа от 1 до N , которых нет в этом списке.
- Каждое число встречается в списках не более одного раза.

Как решать?

- Так как каждое число встречается в списках не более одного раза, то количество чисел, которых нет в списке, равно $N - K$
- Так как N невелико, то за один линейный проход по спискам можно отметить все числа, которые в них есть
- За линейный проход по массиву пометок вывести все числа, которых нет

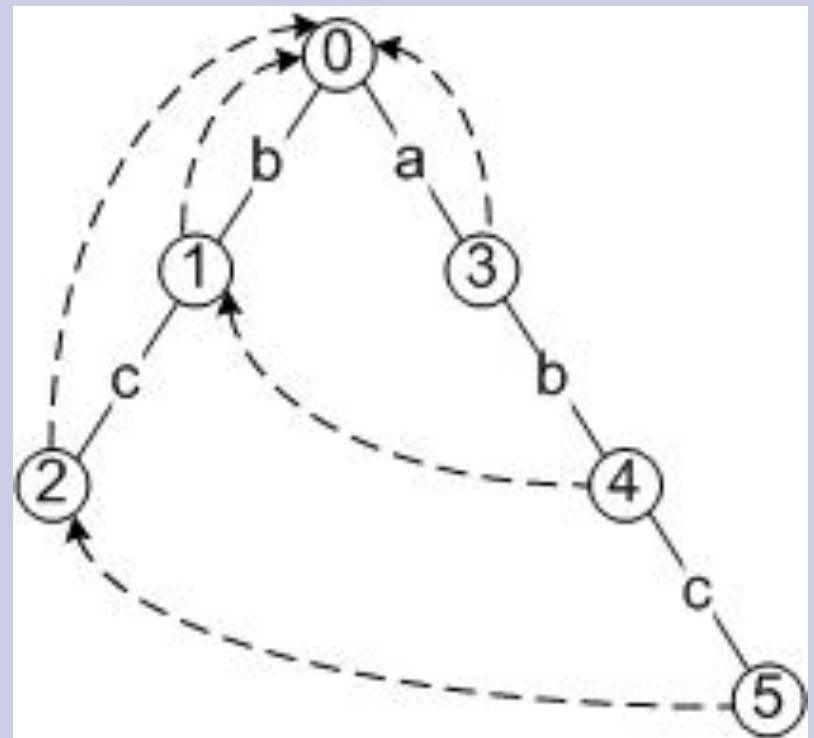
Задача I. Подстрока

a	b	a	c	a	b	a
---	---	---	---	---	---	---

- Автор задачи – Антон Банных
- Условие – Антон Банных
- Подготовка тестов – Антон Банных
- Разбор – Антон Банных

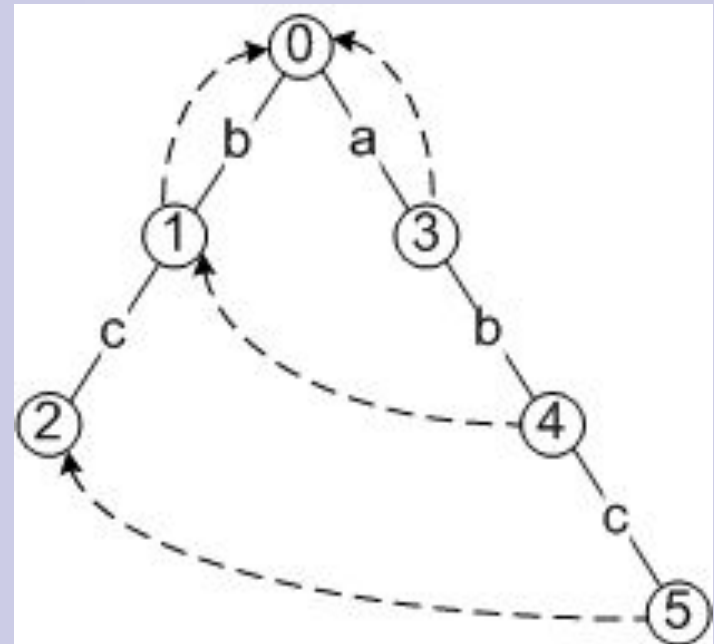
Решение

- Ахо-Корасик
- Строка abc
- Запросы:
 - 2 3 bc
 - 2 3 abc



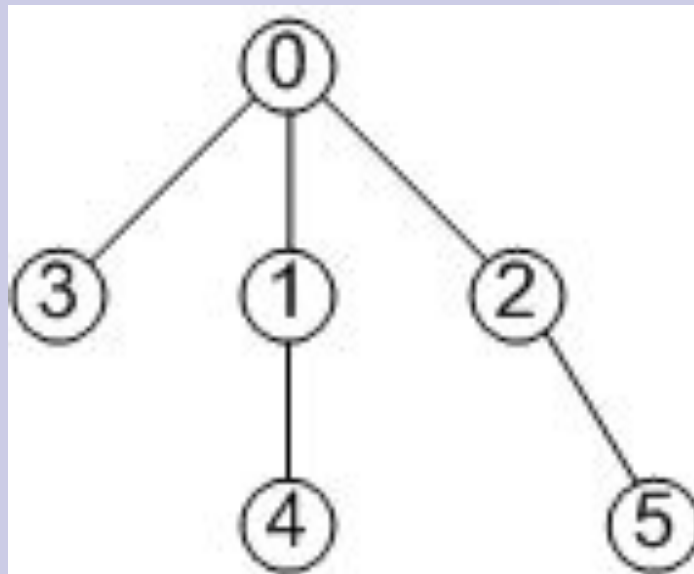
Решение

- Для каждого префикса строки запишем, в какой вершине автомата мы оказались
- a – 3
- ab – 4
- abc - 5



Решение

- Рассмотрим дерево, образованное суффиксными ссылками

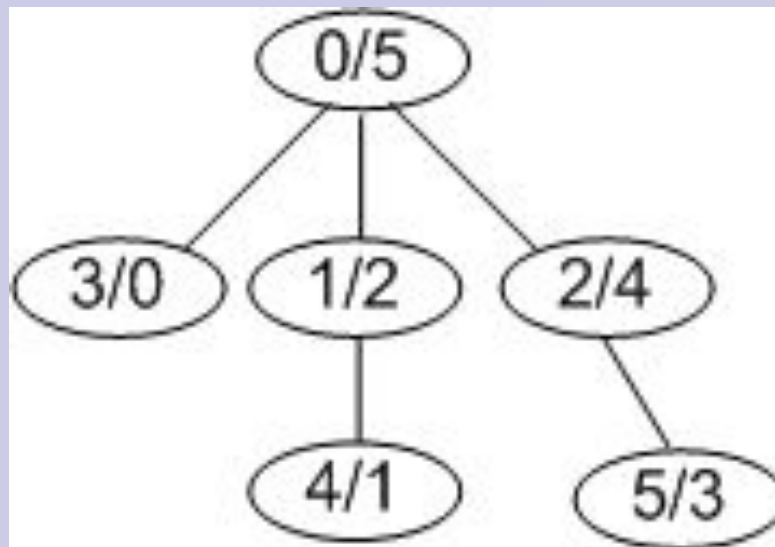


Решение

- Для каждого запроса нужно определить, встречалась ли вершина из соответствующего поддеревя в отрезке

Решение

- Перенумеруем вершины в порядке выхода из обхода в глубину



Решение

- Вершины одного поддерева имеют последовательные номера
- Пусть пара (префикс, номер вершины) — точка
- Запрос — есть ли точка в прямоугольнике

Решение

- Двумерное дерево отрезков — $O(n \log n)$
- Одномерное дерево отрезков на сумму
- События:
 - Начало прямоугольника
 - Конец прямоугольника
 - Точка

Задача I. Подстрока

a	b	a	c	a	b	a
---	---	---	---	---	---	---

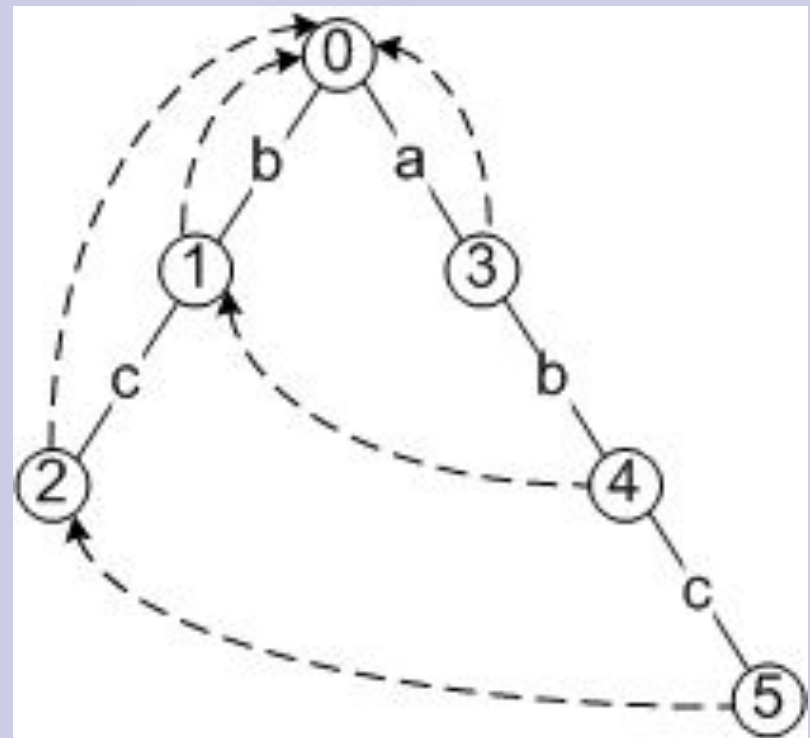
- Автор задачи – Антон Банных
- Условие – Антон Банных
- Подготовка тестов – Антон Банных
- Разбор – Антон Банных

Как решать?

- Ахо-Корасик
- Суффиксный массив
- Суффиксное дерево
- Суффиксный автомат

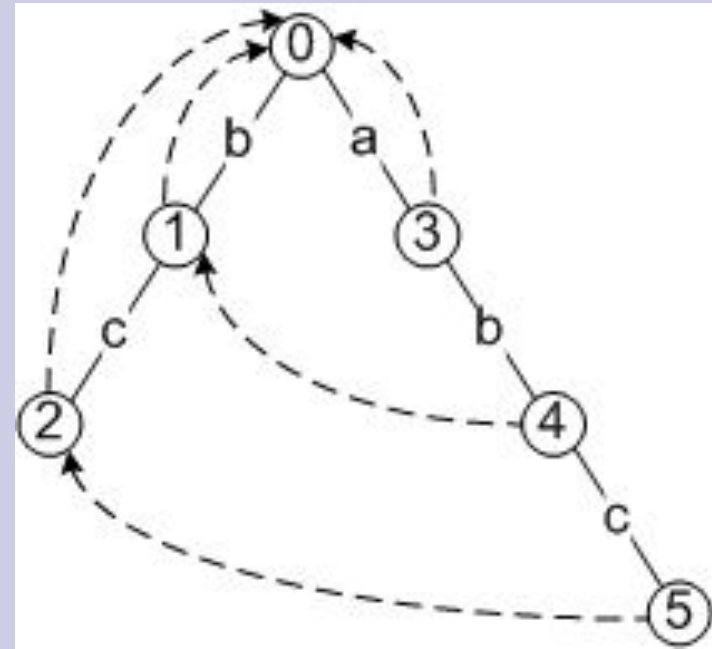
Ахо-Корасик

- Строка abc
- Запросы:
 - 2 3 bc
 - 2 3 abc



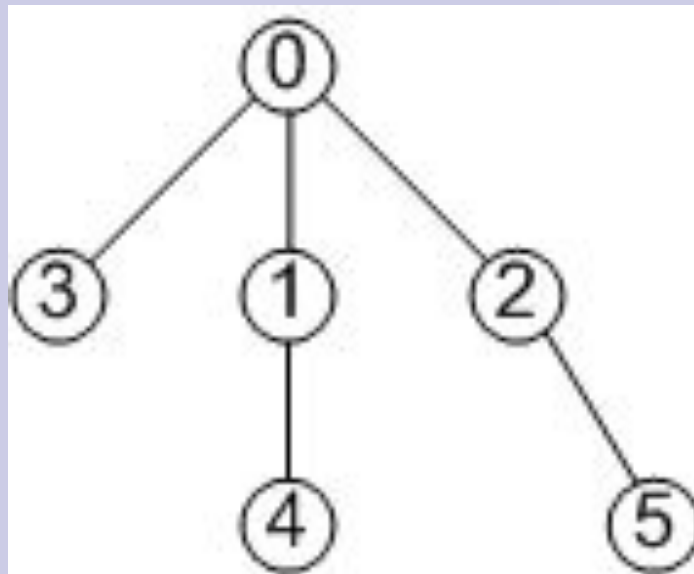
Решение

- Для каждого префикса строки запишем, в какой вершине автомата мы оказались
- $a - 3$
- $ab - 4$
- $abc - 5$
- Обозначим этот массив L



Идея решения

- Рассмотрим дерево, образованное суффиксными ссылками

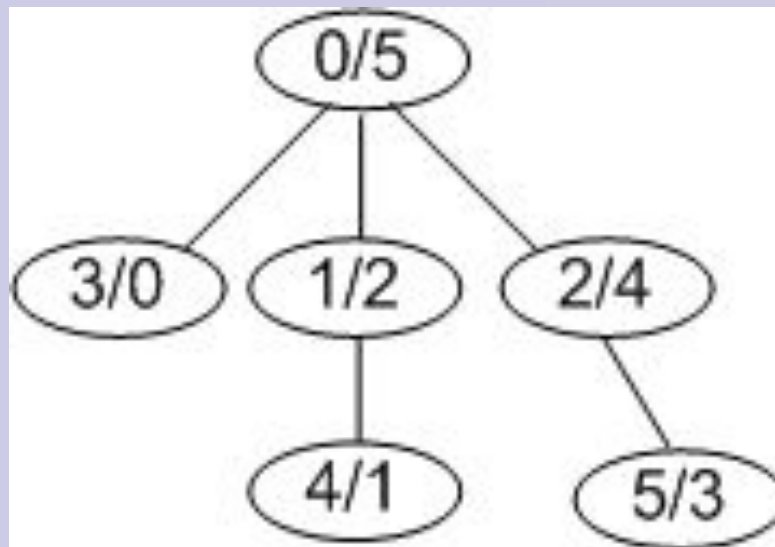


Задача

- Запрос: l , r , длина строки len
- Строке соответствует вершина x
- Определить, встречалась ли вершина из поддерева x в $L[l + len - 1, r]$

Решение

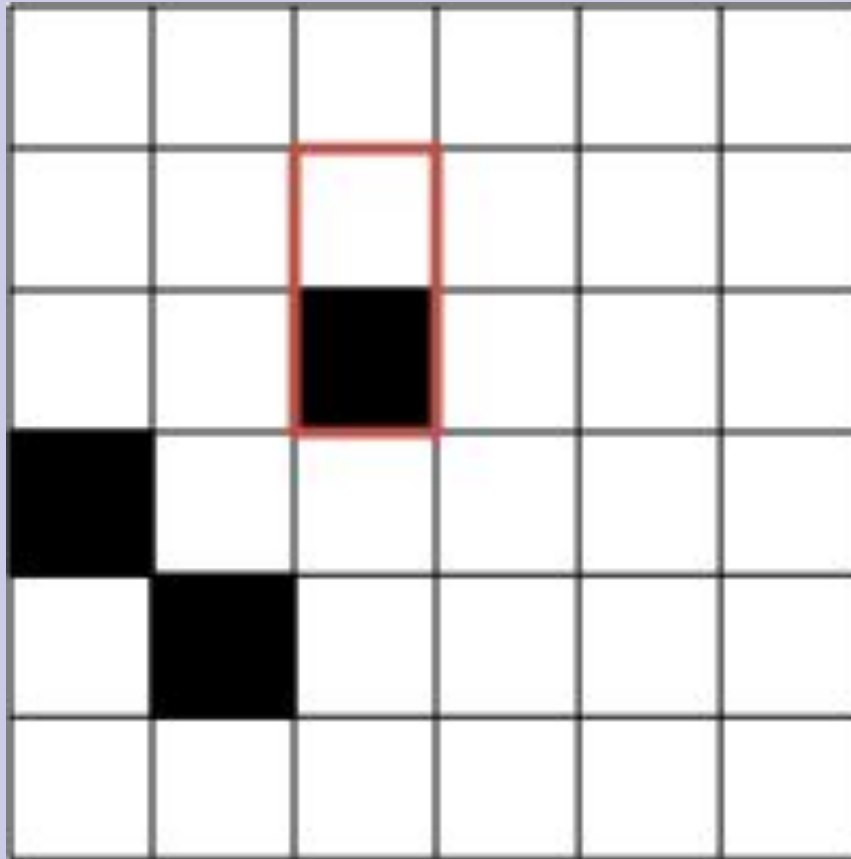
- Перенумеруем вершины в порядке выхода из обхода в глубину



Решение

- Вершины одного поддерева имеют последовательные номера
- Пусть пара (префикс, номер вершины) – точка
- Запрос – есть ли точка в прямоугольнике

Решение



Решение

- Двумерное дерево отрезков: $O(n \log^2 n)$
- Одномерное дерево отрезков на сумму
- События:
 - Начало прямоугольника
 - Конец прямоугольника
 - Точка

Асимптотика

- Ахо-Корасик: $O(n)$
- Перенумерация вершин: $O(n)$
- Обработка запросов: $O(n \log n)$

Задача J

Вода



- Автор задачи – Виталий Аксенов
- Условие – Антон Ахи
- Подготовка тестов – Антон Ахи
- Разбор – Антон Банных

Как решать?

- Поддерживаем текущий уровень воды
- Поддерживаем суммарную скорость вытекания воды
- Обрабатываем события

События

- Уровень воды достиг очередного отверстия
- Запрос на уровень воды
- Появление новой течи
- Устранение течи

Решение

- Определяем ближайшее событие
- Вычисляем уровень воды к моменту наступления события
- Обрабатываем событие

Реализация

- Выделим «интересные высоты» — те, которые встречаются в запросах
- Храним скорость вытекания воды через отверстия на высоте h
- Событие — достижение «интересной высоты»

Реализация

- Появление и починка течи — изменение соответствующего элемента массива и суммарной скорости вытекания
- Запрос на определение уровня воды — вывод текущего уровня
- Достижение «интересной высоты» — изменение суммарной скорости вытекания

Асимптотика

- Выделение «интересных высот»
 - сортировка: $O(n \log n)$
 - хеш-таблица: $O(n)$
- Обработка событий: $O(n)$
- Итого: $O(n)$ или $O(n \log n)$

Спасибо за внимание!
Вопросы?

<http://neerc.ifmo.ru/school>