АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ

Постановка задачи

1. **Простейшая задача:** в дискретные моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ наблюдаются значения функции $f(t_i), \quad i = \overline{1, n}$; требуется восстановить её значения при других t. .

2. Для функции $f(x)$ известно её аналитическое представление, но вычисление каждого значения сопряжено с большим объёмом вычислений. Например,

$$f(x) = \cos\left(\sin\left(\sqrt{x^2 + \sum_{k=1}^{700} \cos^2 kx}\right)\right), \quad a \le x \le b$$

3. Функция задаётся своими значениями в узлах

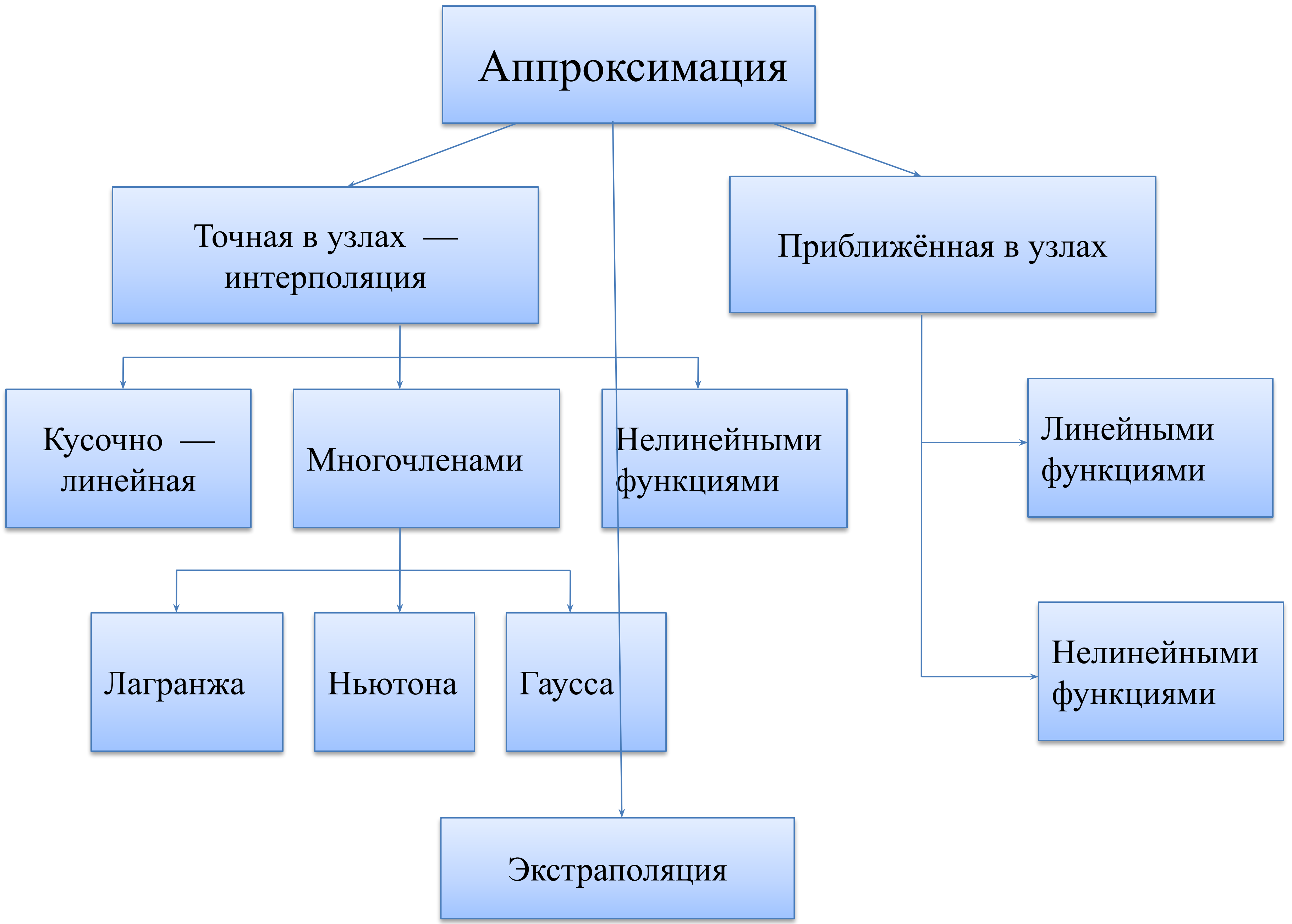
$x_i, \quad i = \overline{1, n}$ из интервала $a \le x \le b$

В вычислительном процессе используется эта таблица.

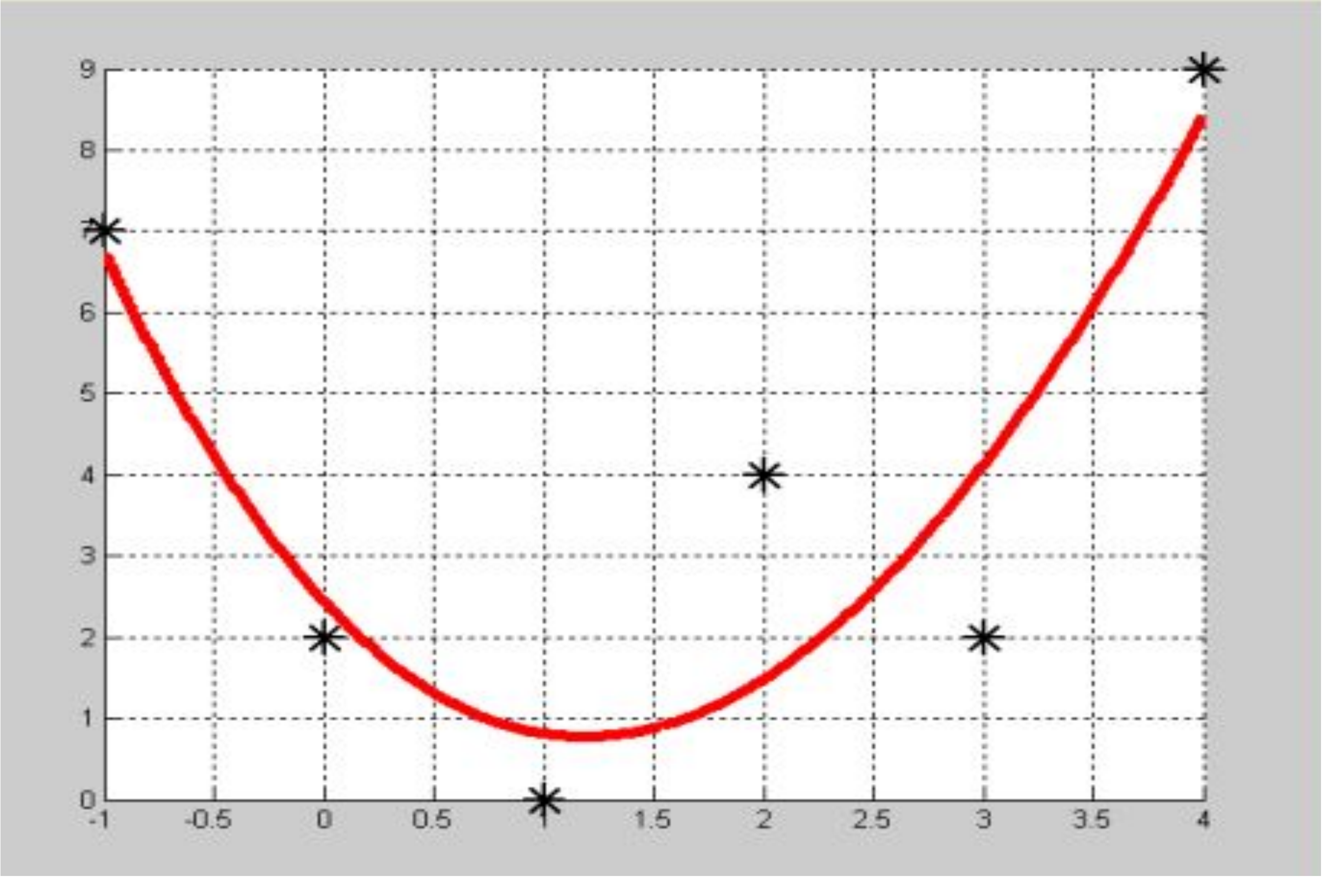
4. Задача численного решения определённого интеграла или дифференциального уравнения.

Области использования аппроксимации :

- моделирование;
- планирование и статистическая обработка данных;
- определение значений функции при аргументах отсутствующих в таблице;
- табулирование функции;
- представление сложной функции более простой в определённых границах значений её аргументов;
- во всех других случаях, где нужно выполнить приближение одних функций другими, более простыми, с допустимой для практики точностью.


Аппроксимация
Точная в узлах — интерполяция
Приближённая в узлах
Кусочно — линейная
Многочленами
Нелинейными функциями
Линейными функциями
Нелинейными функциями
Лагранжа
Ньютона
Гаусса
Экстраполяция

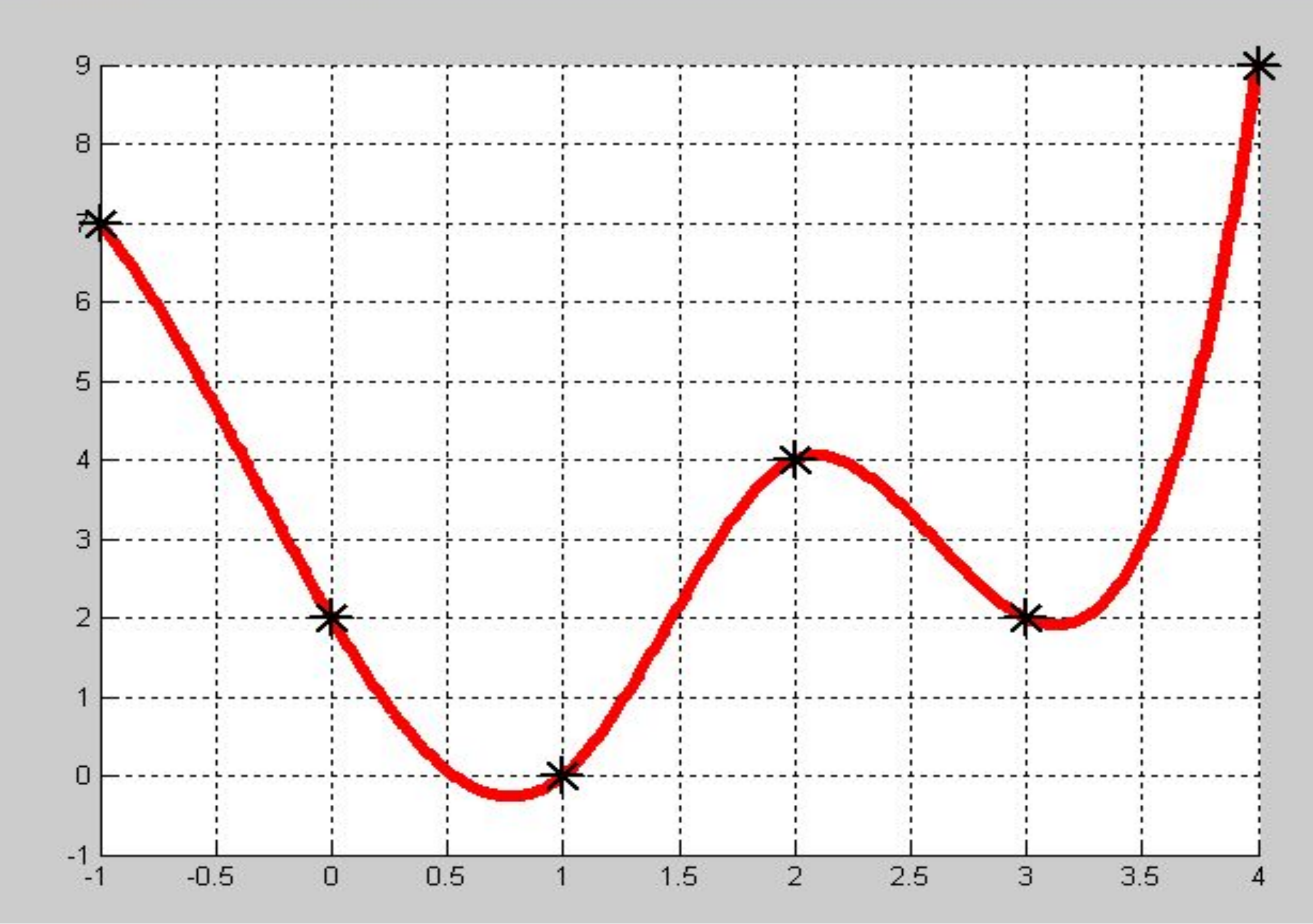
Аппроксимация



Если аппроксимация функции происходит в промежуточных узлах, т.е. $g(x_i) = f(x_i)$ $a \le x \le b$, причём тогда говорят о точной *интерполяции*.

Интер – между.

Интерполирование



Если аппроксимация функции происходит вне рассматриваемого отрезка $\tilde{x} \notin [x_0, x_n]$, тогда говорят об *экстраполяции*.

экстра – вне.

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

Основные понятия.

Задано множество точек $x_0, x_1, ..., x_n$, принадлежащих отрезку $[a,\ b]$ и значения функции

$$f(x_0), f(x_1), \quad ..., f(x_n)$$

в этих точках.

Требуется найти функцию $y = \varphi(x)$, определённую на этом отрезке такую, что $\varphi(x_i) = f(x_i)$ в указанных точках

ОБОБЩЁННЫЙ ПОЛИНОМ

$$\varphi(x) = C_0\varphi_0(x) + C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} C_i\varphi_i(x)$$

C_i – числовые коэффициенты,

$\{\varphi_i(x)\}_0^n$ – множество функций, определённых на рассматриваемом отрезке и линейно независимых на нём.

Такие функции называются *БАЗИСНЫМИ*.

1. Последовательность степеней $\left\{x^i\right\}$.

2. Последовательность тригонометрических функций $\left\{\cos t_i x, \sin t_i x\right\}$.

3. Последовательность экспонент $\left\{e^{\alpha_i x}\right\}$.

4. Последовательность дробно-рациональных функций $\left\{\dfrac{P_i(x)}{Q_i(x)}\right\}$.

Многочлен Тейлора m-ой степени:

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Для $x_0 = 0$ можно использовать известные разложения функций.

Погрешность метода — остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа:

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}$$

где c лежит между x и x_0.

Если c не принадлежит интервалу сходимости ряда Тейлора, то погрешность не уменьшается.

Существование и единственность интерполяционного многочлена

Теорема.

Для таблично заданной функции $f(x)$ на множестве узлов $x_i, i = \overline{0, n}$ существует единственный интерполяционный многочлен степени $m \le n$, удовлетворяющий условию $L_m(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$

Доказательство:

Будем искать многочлен $L_m(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$

Нужно найти коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Они должны удовлетворять СЛУ

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_m x_0^m = f(x_0), \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_m x_1^m = f(x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_m x_n^m = f(x_n). \end{cases}$$

В системе *(m+1)* неизвестных, *(n+1)* уравнение.

Если система крамеровская, то решение

СУЩЕСТВУЕТ и ЕДИНСТВЕННОЕ.

Пусть $m+1 = n+1$, т.е. m $= n$. Главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

— определитель Вандермонда.

$$\Delta = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$$

Если все узлы различны, то $\Delta \neq 0$.

<u>Теорема доказана.</u>

Метод нахождения коэффициентов, используемый при доказательстве теоремы, называется *методом неопределённых коэффициентов*.

Если $m < n$, СЛУ может быть несовместна.

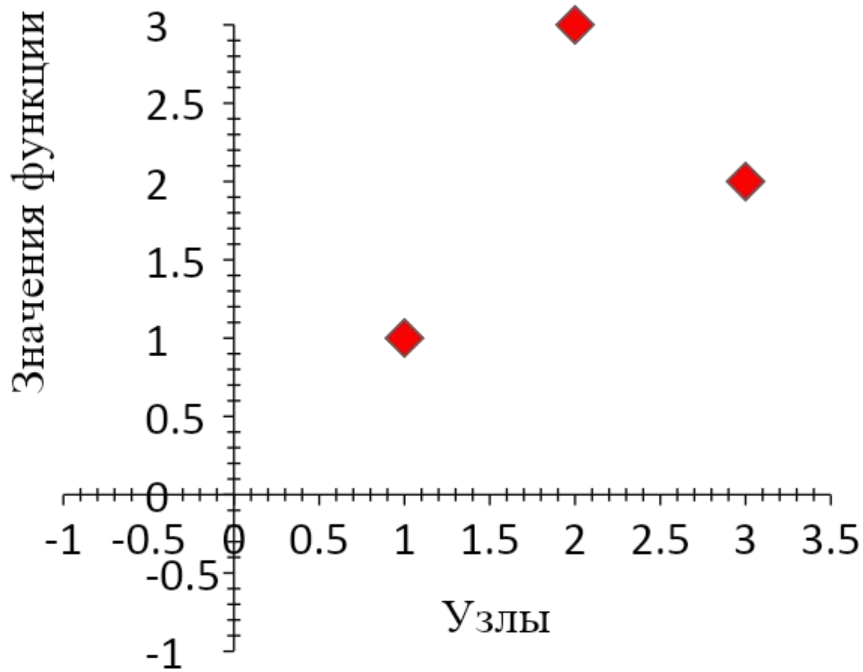
Например, $m = 1$, $n = 2$,

найти линейную

функцию (прямую),

проходящую

через три точки:



Если $m > n$, СЛУ имеет бесконечно много решений.

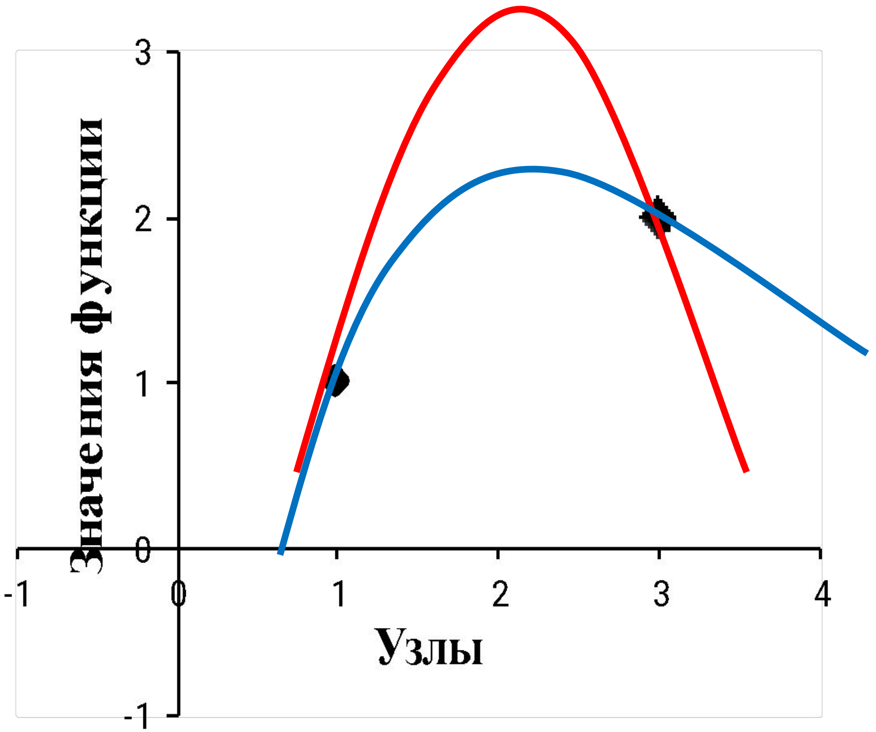
Например, $m = 2$, n = 1,

найти квадратичную

функцию (параболу),

проходящую

через две точки:



Интерполяционный многочлен Лагранжа

Выразим многочлен $L_n(x)$ как линейную комбинацию значений $f_0, f_1, ..., f_n$:

$$L_n(x) = \Phi_0(x) \cdot f_0 + \Phi_1(x) \cdot f_1 + \dots + \Phi_n(x) \cdot f_n$$

Рассмотрим в качестве подсказки частные случаи.

1) $n = 1$: x_0, x_1 — узлы, f_0, f_1 — значения в узлах

Найти $\Phi_0(x)\cdot f_0 + \Phi_1(x)\cdot f_1 = f(x)$

при x_0 $f_0 = 1\cdot f_0 + 0\cdot f_1 \Rightarrow \Phi_0(x_0) = 1, \quad \Phi_1(x_0) = 0$

при x_1 $f_1 = 0\cdot f_0 + 1\cdot f_1 \Rightarrow \Phi_0(x_1) = 0, \quad \Phi_1(x_1) = 1$

$$\Phi_0(x) = (x - x_1)\cdot\frac{1}{x_0 - x_1} \quad \text{и} \quad \Phi_1(x) = (x - x_0)\cdot\frac{1}{x_1 - x_0}$$

2) n=2: x_0, x_1, x_2 — узлы, $f_0,\ f_1\ ,\ f_2$— значения в узлах

Найти $$\Phi_0(x)\cdot f_0+\Phi_1(x)\cdot f_1+\Phi_2(x)\cdot f_2=f(x)$$

при x_0 $\quad f_0=1\cdot f_0+0\cdot f_1+0\cdot f_2 \Longrightarrow \Phi_0(x_0)=1,\ \Phi_1(x_0)=0,\ \Phi_2(x_0)=0$

при x_1 $\quad f_1=0\cdot f_0+1\cdot f_1+0\cdot f_2 \Longrightarrow \Phi_0(x_1)=0,\ \Phi_1(x_1)=1,\ \Phi_2(x_1)=0$

при x_3 $\quad f_2=0\cdot f_0+0\cdot f_1+1\cdot f_2 \Longrightarrow \Phi_0(x_2)=0,\ \Phi_1(x_2)=0,\ \Phi_2(x_2)=1$

$$\Phi_0(x)=\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)};\qquad \Phi_1(x)=\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)};$$

$$\Phi_2(x)=\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)}$$

Опр. Интерполяционным многочленом Лагранжа называется полином $$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) \cdot f_i$$

.

Опр. Лагранжевы коэффициенты — $$\Phi_i(x) = \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$ для каждого $i = 0, ..., n$.

Замечание:

Лагранжевы коэффициенты удовлетворяют тождеству

$$\sum_{i=0}^{n} \Phi_i(x) \equiv 1$$, т.к. обладают свойством:

$$\Phi_i(x_j) \equiv \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases}$$

Пример 1.

Построить интерполяционный полином Лагранжа для функции, заданной таблицей

x_i	-1	2	3	5
$f(x_i)$	-1	3	2	4

Так как задано 4 узла интерполяции, то степень полинома не выше третьей.

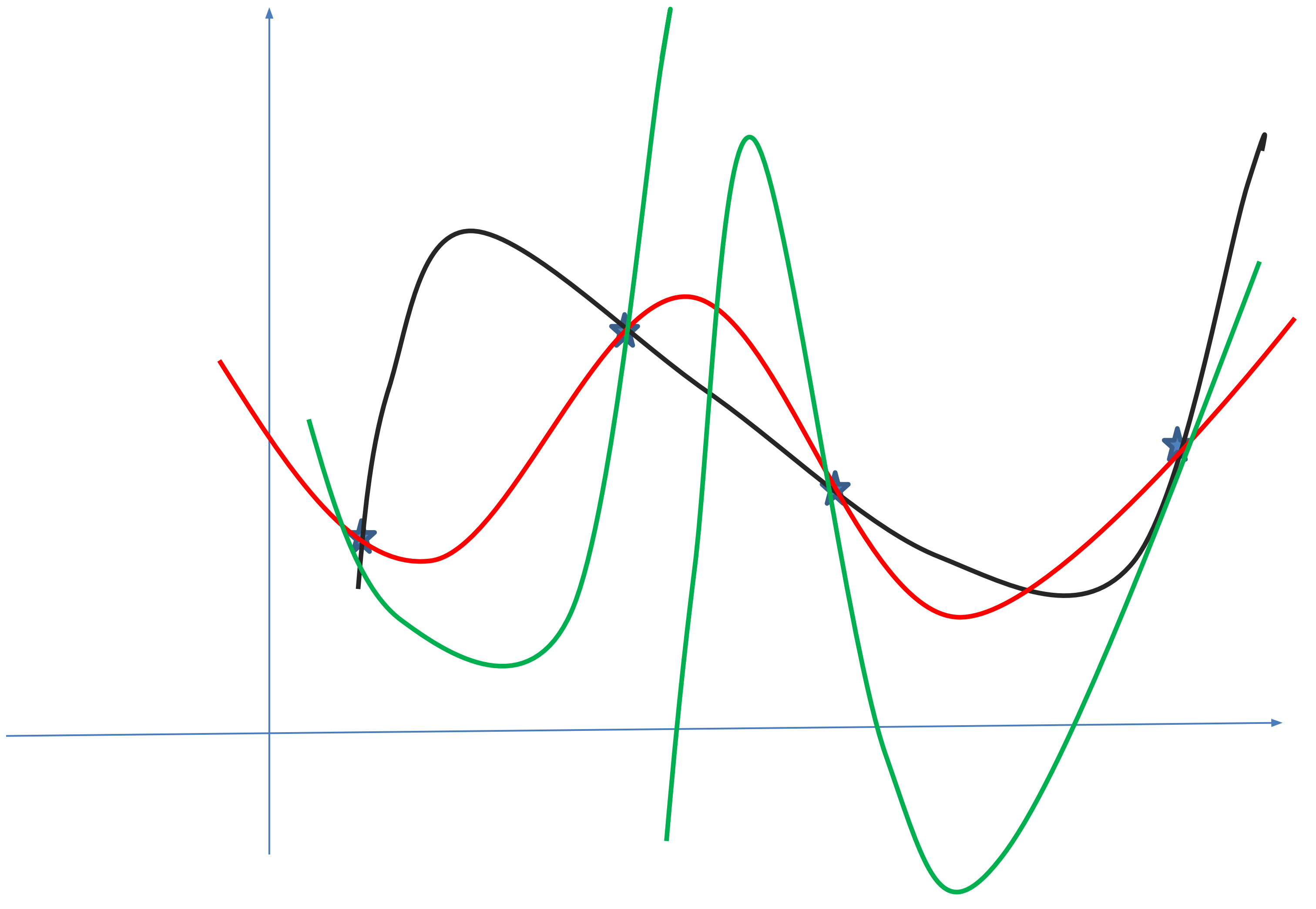
$$L_3(x) = (-1)\cdot\frac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-5)}{(-1-2)\cdot(-1-3)\cdot(-1-5)} + 3\cdot\frac{(x+1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)}{(2+1)\cdot(2-3)\cdot(2-5)} +$$

$$+2\cdot\frac{(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-5)}{(3+1)\cdot(3-2)\cdot(3-5)}+4\cdot\frac{(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{(5+1)\cdot(5-2)\cdot(5-3)}.$$

Можно вычислить приближённое $f(x)$ значение в точке $\tilde{x}=2.5$.

$$f(2.5)\approx L_3(2.5)=2.4635$$

Погрешность интерполяции



Погрешность интерполяционного многочлена Лагранжа

Предполагаем, что $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$

$L_n(x)$ — многочлен Лагранжа: $L_n(x_i) = f(x_i)$ для всех i=0,...,n

$[a,b]$ — отрезок, содержащий узлы $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Найдем оценку отличия значения $f(x)$ от значения $L_n(x)$ в точке $\tilde{x} \in [a, b]$, не совпадающей ни с одним из узлов, иначе, величину *остаточного члена*

$$R_n(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) - L_n(\tilde{x})$$

Запишем равенство

$$f(x) = L_n(x) + R(x) = L_n(x) + \omega_{n+1}(x) \cdot C$$

где $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ – многочлен определённый через узлы $x_0, x_1, \ldots, x_n$

C – некоторая постоянная (параметр).

Подберём параметр C так, чтобы $f(x)$ обращалась в нуль в точке , для которой делаем оценку, т.е. $\tilde{x} \in [a, b]$ и

$\tilde{x} \neq x_i, \quad i = \overline{0, n}$.

К функции $f(x)$ на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{0, n}$ применима теорема Ролля

Введём в рассмотрение функцию

$$\varphi(t) = L_n(t) + \underbrace{\omega_{n+1}(t)\cdot C}_{R(x)} - f(t)$$

$\varphi(t) = 0$	если $t = x_0, x_1, \ldots, x_n, \widetilde{x}$	всего (n+2) точки	по т. Ролля, если функция в двух точках равна 0, то между этими точками существует точка, в которой производная обращается в 0
$\varphi'(t) = 0$		(n+1) точка на $[a,b]$	
$\varphi''(t) = 0$		n точек на $[a,b]$	
…			
$\varphi^{(n+1)}(t) = 0$		1 точка на $[a,b]$	

Итак, существует $\xi \in [a,b]$: $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Тогда
$$\varphi^{(n+1)}(x) = \cancelto{0}{L_n^{(n+1)}(x)} + \omega_{n+1}^{(n+1)}(x) \cdot C - f^{(n+1)}(x)$$

и $\omega_n^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, т. к. $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$

получаем
$$(n+1)! \cdot C - f^{(n+1)}(\xi) = 0$$

Отсюда
$$C = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$f(x) - L_n(x) = R_n(x) \quad \Rightarrow \; f(x) - L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \cdot C$$

$$\Rightarrow \qquad f(x) - L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Для остаточного члена получаем выражение

$$R_n(x) = \omega_{n+1}(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Точное представление $f(x)$ через её интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$:

$$f(x) = L_n(x) + \omega_{n+1}(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

где $\xi \in [a,b]$ и зависит от x.

Можно оценить предельную абсолютную погрешность интерполирования на отрезке $[a,b]$ с помощью формулы

$$\max_{[a,b]} |R(x)| \le \max_{[a,b]} |\omega_{n+1}(x)| \cdot \frac{\max\limits_{[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|}{(n+1)!}$$

Пример 2.

Оценить с какой точностью можно вычислить по формуле Лагранжа $\ln 100.5$, если известны значения $\ln 100,\ \ln 101,\ \ln 102,\ \ln 103.$

$$f(x) = \ln x, \quad n = 3, \quad a = x_0 = 100, \quad x_n = b = 103,$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}, \ \Rightarrow \ \max_{[a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right| = \frac{6}{100^4}$$

$$\left| \ln 100.5 - L(100.5) \right| \le \frac{6}{100^4 \cdot 4!} \cdot \underbrace{0.5 \cdot 0.5 \cdot 1.5 \cdot 2.5}_{|\omega_4(x)|} = 2.344 \cdot 10^{-9}$$