Лекция №2

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Ряд распределения. Многоугольник распределения

Законом распределения **случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.**

Рассмотрим прерывную случайную величину X с возможными значениями $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Каждое из этих значений возможно, но не достоверно, и величина X может принять каждое из них с некоторой вероятностью. В результате опыта величина X примет одно из этих значений, т. е. произойдет одно из полной группы несовместных событий.

Обозначим вероятности этих событий буквами p с соответствующими индексами:

$$P(X=x_1)=p_1; \quad P(X=x_2) = p_2; \quad \ldots; \quad P(X = x_n) = p_n.$$

Так как несовместные события образуют полную группу, то сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице

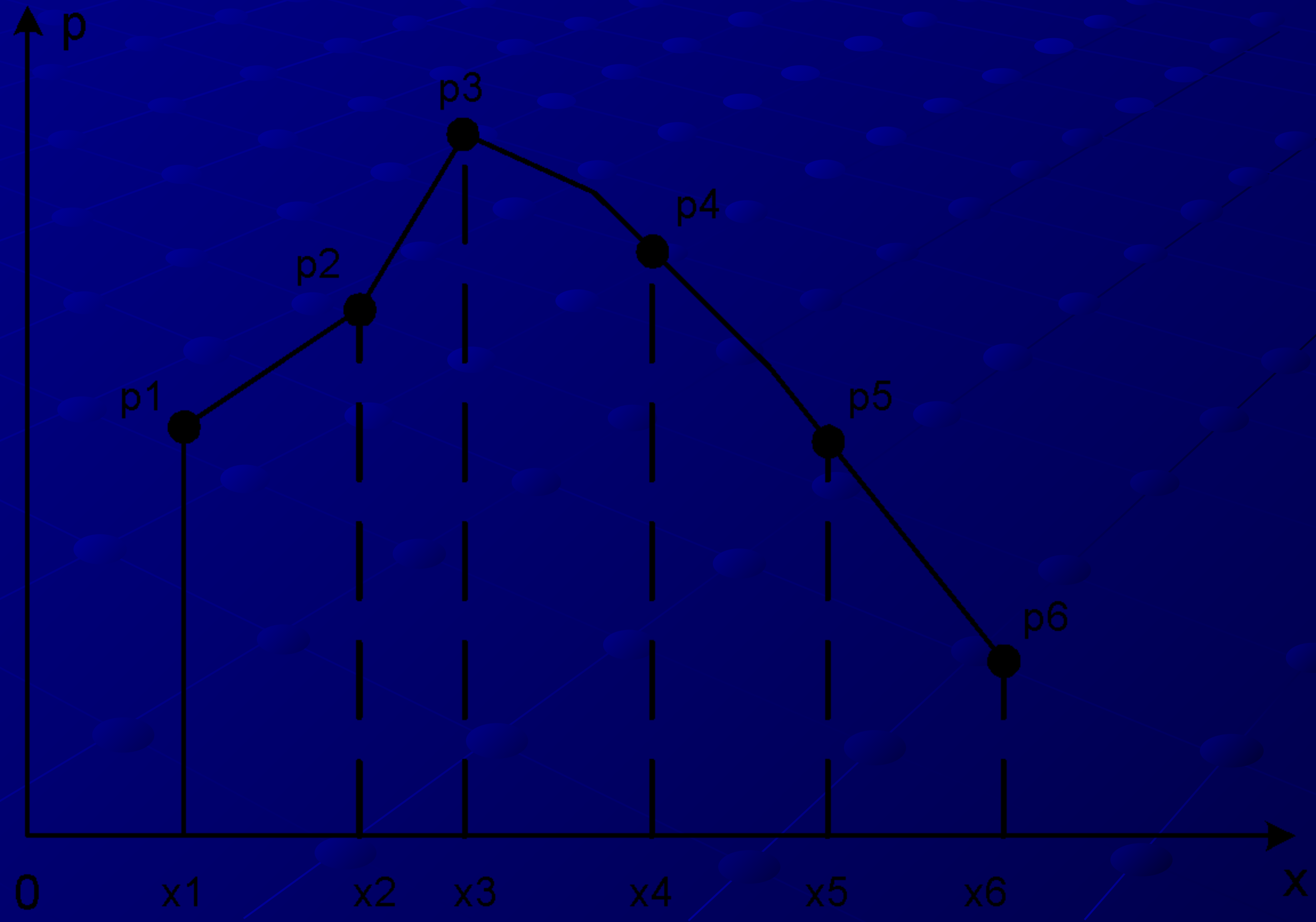
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Ряд распределения **случайной величины *X* имеет следующий вид**

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Чтобы придать ряду распределения более наглядный вид, часто прибегают к его **графическому изображению**: по оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины, а по оси ординат — вероятности этих значений. Такая фигура называется *многоугольником распределения*.

Многоугольник распределения, так же как и ряд распределения, полностью характеризует случайную величину; он является одной из форм закона распределения.



Функция распределения

Для количественной характеристики распределения вероятностей удобно воспользоваться не вероятностью события $X=x$, а вероятностью события $X<x$, где x – некоторая текущая переменная. Вероятность этого события зависит от x, есть некоторая функция от x. Эта функция называется функцией распределения случайной величины X и обозначается $F(x)$:

$$F(x)=P(X<x)$$

Функция распределения *F(x)* иногда называют также *интегральной функцией распределения* или *интегральным законом распределения.*

Функция распределения – самая универсальная характеристика случайной величины. Она существует для всех случайных величин: как прерывных, так и непрерывных. Функция распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения, т.е. является одной из форм закона распределения.

Сформулируем некоторые общие свойства функции распределения.

1. Функция распределения $F(x)$ есть неубывающая функция своего аргумента, т. е. при $x_2 > x_1$

$$F(x_2) \geq F(x_1).$$

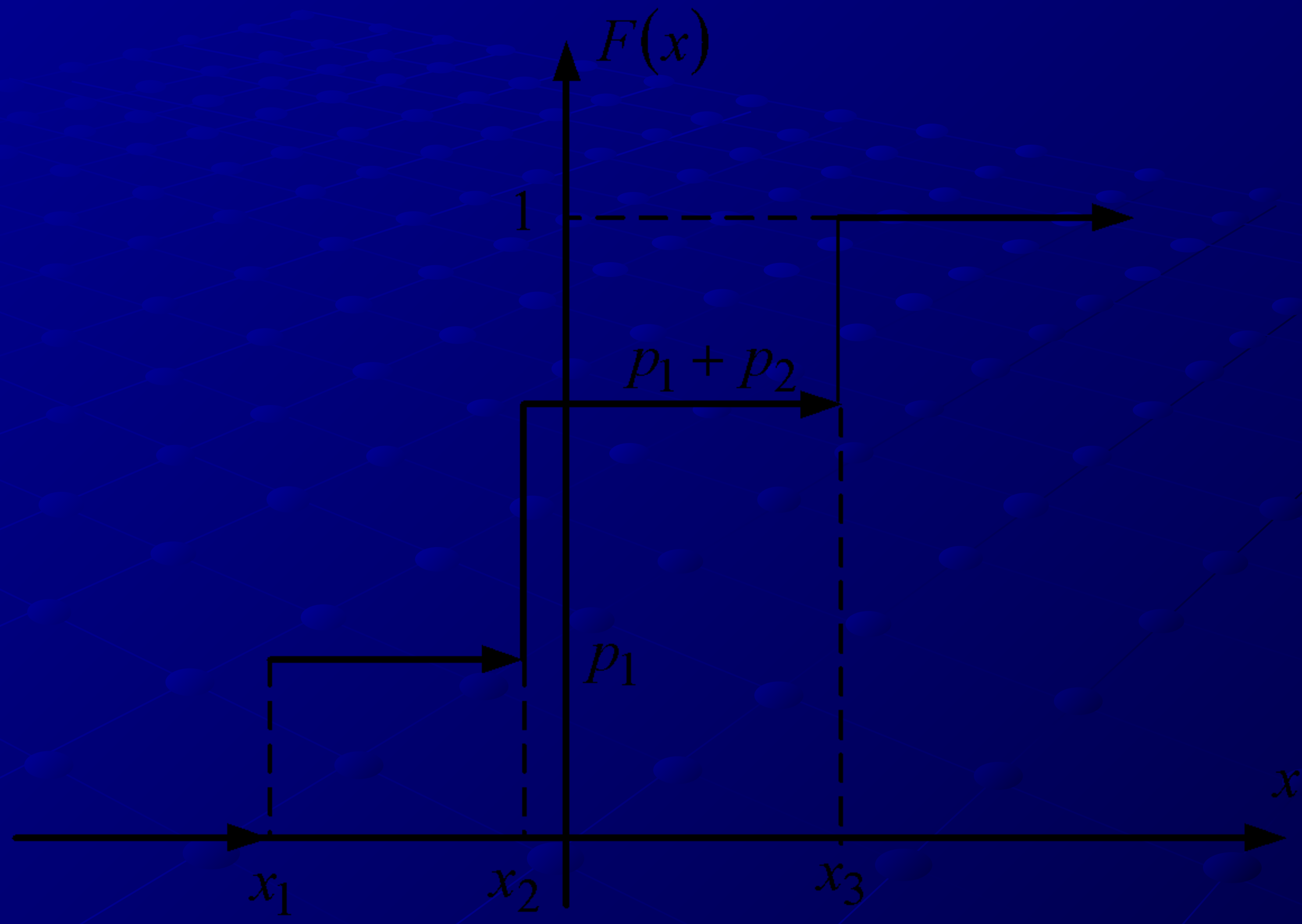
2. На минус бесконечности функция распределения равна нулю:

$$F(-\infty) = 0.$$

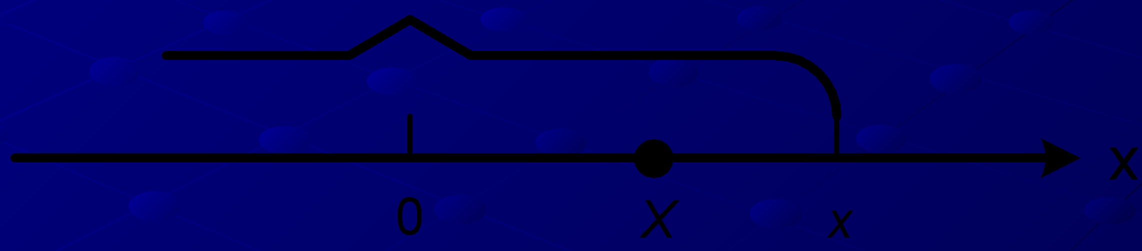
3. На плюс бесконечности функция распределения равна единице:

$$F(+\infty) = 1.$$

График функции распределения вероятностей.



Не давая строгого доказательства этих свойств, проиллюстрируем их с помощью наглядной геометрической интерпретации. Для этого будем рассматривать случайную величину *X* как случайную точку *X* на оси *Ox*, которая в результате опыта может занять то или иное положение.



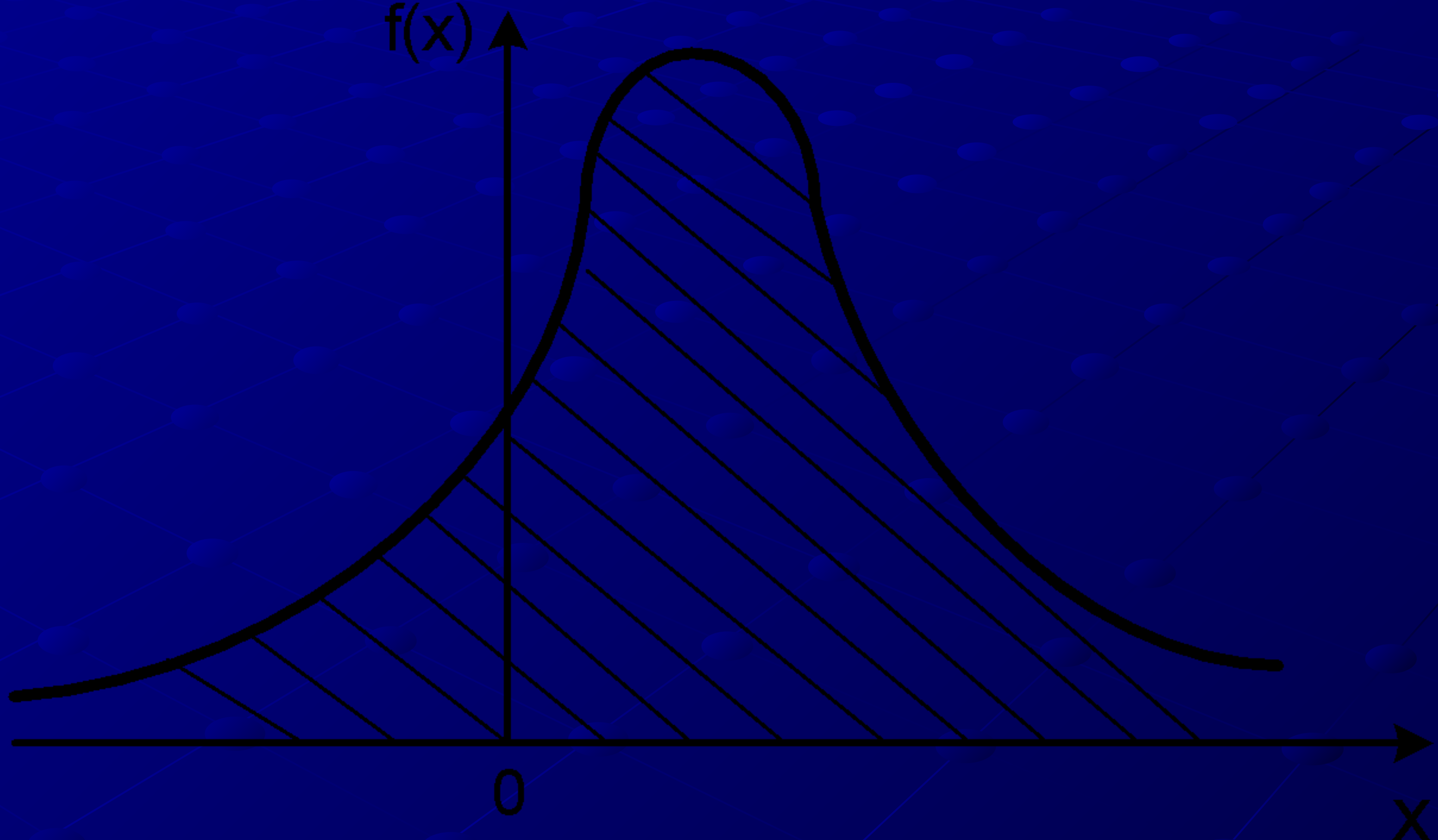
Тогда функция распределения *F(x)* есть вероятность того, что случайная точка *X* в результате опыта попадет левее точки *x*.

Плотность распределения

Функция ***f(x)*** – произвольная функция распределения $f(x)=F'(x)$ характеризует как бы плотность, с которой распределяются значения случайной величины в данной точке. Эта функция называется *плотностью распределения* (иначе – «плотность вероятностей») непрерывной случайной величины.

Иногда функцию ***f(x)*** называют также «дифференциальной функцией распределения» или «дифференциальным законом распределения» величины *X*.

Кривая, изображающая плотность распределения случайной величины, называется *кривой распределения.*

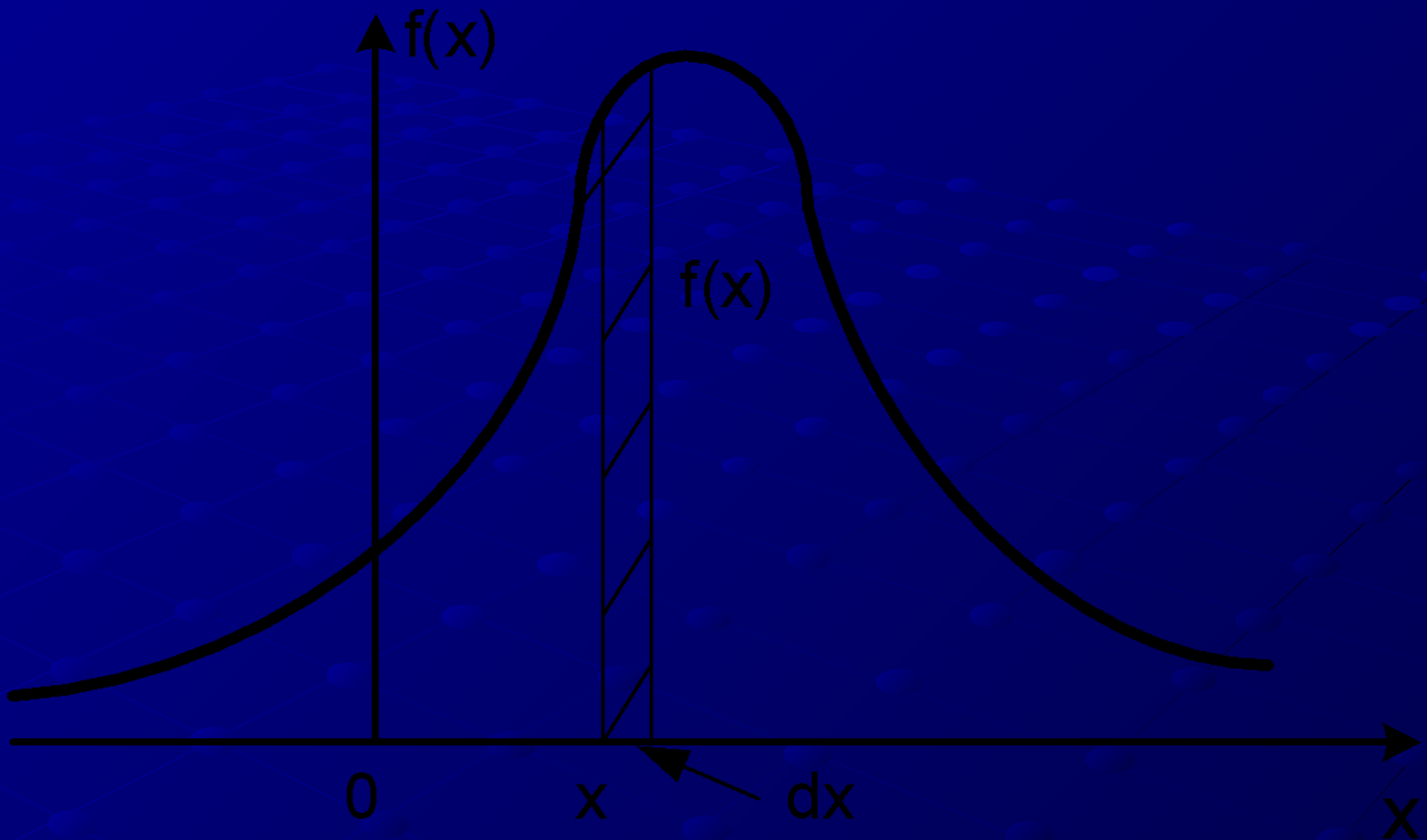


Плотность распределения, так же как и функция распределения, есть одна из форм закона распределения.

В противоположность функции распределения эта форма не является универсальной: она существует только для непрерывных случайных величин.

Рассмотрим непрерывную случайную величину *X* с плотностью распределения *f(x)* и элементарный участок *dx,* примыкающий к точке *x*. Вероятность попадания случайной величины *X* на этот элементарный участок (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) равна *f(x)dx.*

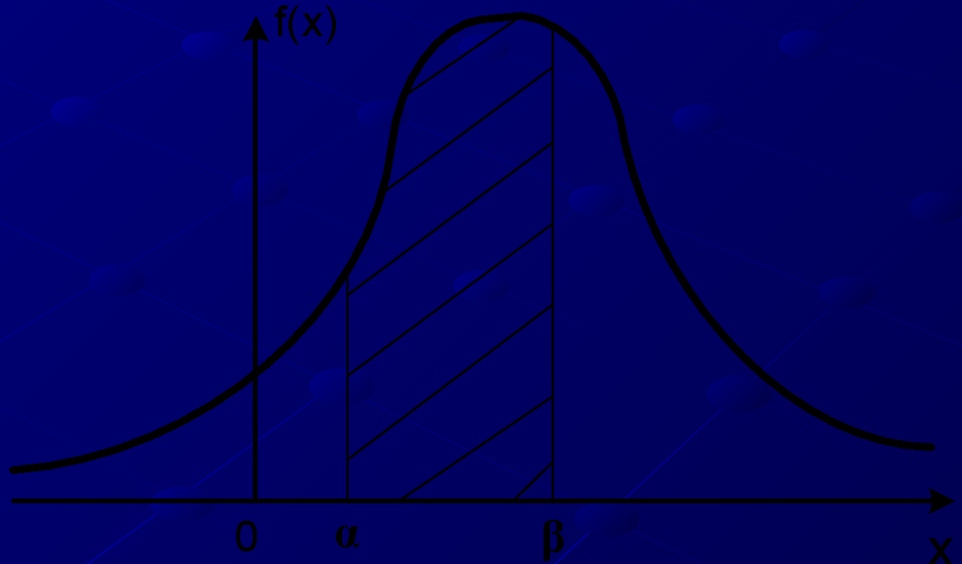
Величина *f(x)dx* называется *элементом вероятности.* Геометрически это есть пло щадь элементарного прямоугольника, опирающегося на отрезок *dx*.


f(x)
f(x)
0
x
dx
X

Выразим вероятность попадания величины *X* на отрезок от α до β через плотность распределения. Очевидно, она равна сумме элементов вероятности на всем этом участке, т. е. интегралу:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Геометрически вероятность попадания величины *X* на участок (α, β) равна площади кривой распределения, опирающейся на этот участок.



Основные свойства плотности распределения.

- Плотность распределения есть неотрицательная функция:

$$f(x) \geq 0$$

Это свойство непосредственно вытекает из того, что функция распределения *F(x)* есть неубывающая функция.

- Интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице:

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 1$$

Геометрически основные свойства плотности распределения означают, что:

1) вся кривая распределения лежит не ниже оси абсцисс;

2) полная площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.

Математическое ожидание

Математическим ожиданием случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений.

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$, где

X – прерывная случайная величина,

M[X] – среднее значение случайной величины,

$x_1, x_2 ..., x_n$ – возможные значения величины X,

$\eth_1, \eth_2 ..., \eth_n$ – вероятности значений.

Для непрерывной случайной величины *X* математическое ожидание выражается уже не суммой, а интегралом:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx$$

где *f(x)* – плотность распределения величины *X.*

Из характеристик положения в теории вероятности важнейшую роль играет *математическое ожидание* случайной величины, которое иногда называют просто *средним значением* случайной величины.

МОМЕНТЫ

Понятие *момента* широко применяется в механике для описания распределения масс.

Совершенно теми же приемами пользуются в теории вероятностей для описания основных свойств распределения случайной величины.

Чаще всего применяются на практике моменты двух видов: *начальные* и *центральные*.

Начальный момент

Начальным моментом s-го порядка прерывной случайной величины *X* называется сумма вида:

$$\alpha_s[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^s \cdot p_i$$

Для непрерывной случайной величины *X* *начальным моментом s-го порядка* называется интеграл:

$$\alpha_s[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s \cdot f(x)dx$$

Общее определение начального момента s-го порядка справедливое как для прерывных, так и для непрерывных величин:

$$\alpha_s[X] = M[X^s]$$
,

т.е. *начальным моментом s-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание s-ой степени этой случайной величины.*

Центральный момент

Центральным моментом порядка s случайной величины X называется математическое ожидание s-ой степени соответствующей центрированной случайной величине:

$$\mu_s[X] = M[\mathring{X}_s] = M[(X - m_x)^s]$$

Для любой случайной величины центральный момент *первого порядка* равен нулю:

$$\mu_1[X] = M[\mathring{X}] = M[(X - m_x)] = 0$$

т. к. математическое ожидание центрированной случайной величины всегда равно нулю.

Дисперсия

Из всех моментов в качестве характеристик случайной величины чаще всего применяются первый начальный момент (математическое ожидание) и второй центральный момент.

Второй центральный момент называется *дисперсией* случайной величины (***D[X]***).

$$D[X] = M[\overset{\circ}{X}{}^{2}]$$

Согласно определению центрального момента:

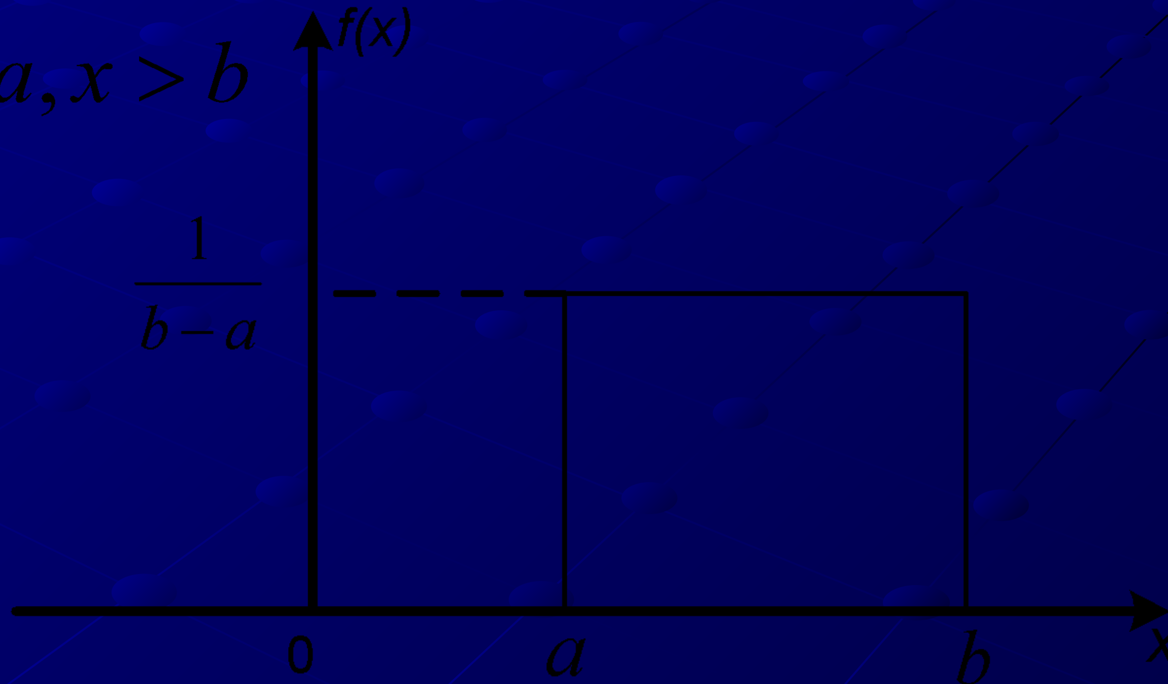
т.е. дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной величины.

РАВНОМЕРНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛНИЯ

Случайная величина имеет равномерный закон распределения если ее значения в интервале a, b одинаково равновероятны.

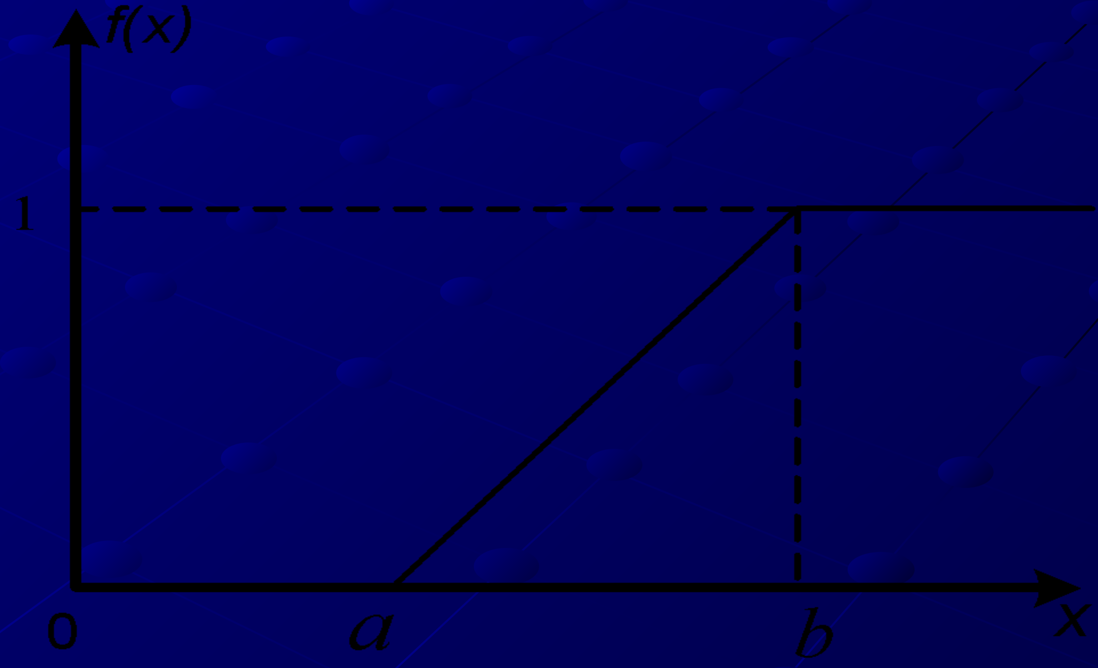
Равномерный закон распределения характеризуется плотностью вероятности вида:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x<a, x>b\end{cases}$$



Равномерный закон распределения характеризуется функцией распределения вида :

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x<a,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$



НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Нормальный закон распределения (часто называемый законом Гаусса) играет исключительно важную роль в теории вероятностей и занимает среди других законов распределения особое положение.

Это — наиболее часто встречающийся на практике закон распределения. Главная особенность, выделяющая нормальный закон среди других законов, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях.

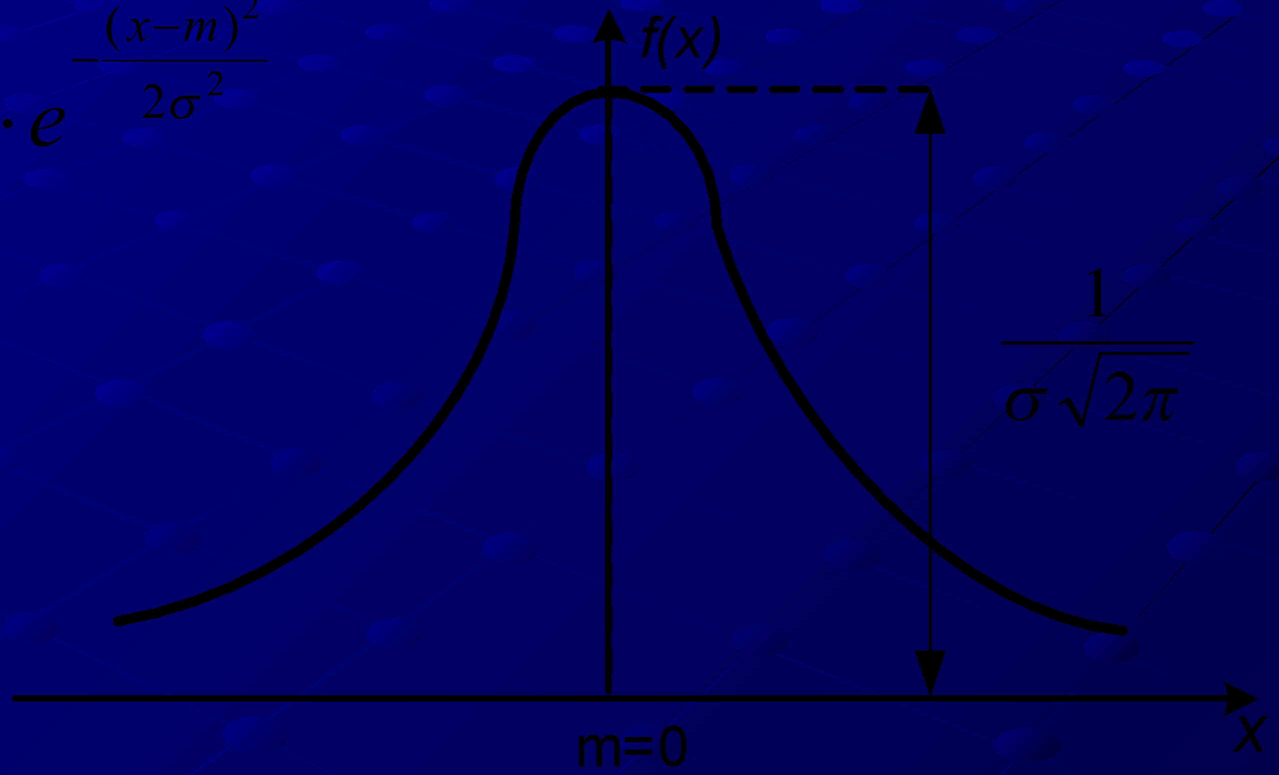
Кривая распределения, по нормальному закону имеет симметричный колоколообразный вид. Максимальная ордината кривой, равная

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

соответствует точке *x = m;* по мере удаления от точки *m* плотность распределения падает, и при $x \to \pm\infty$ кривая асимптотически приближается к оси абсцисс.

Нормальный закон распределения характеризуется плотностью вероятности вида:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

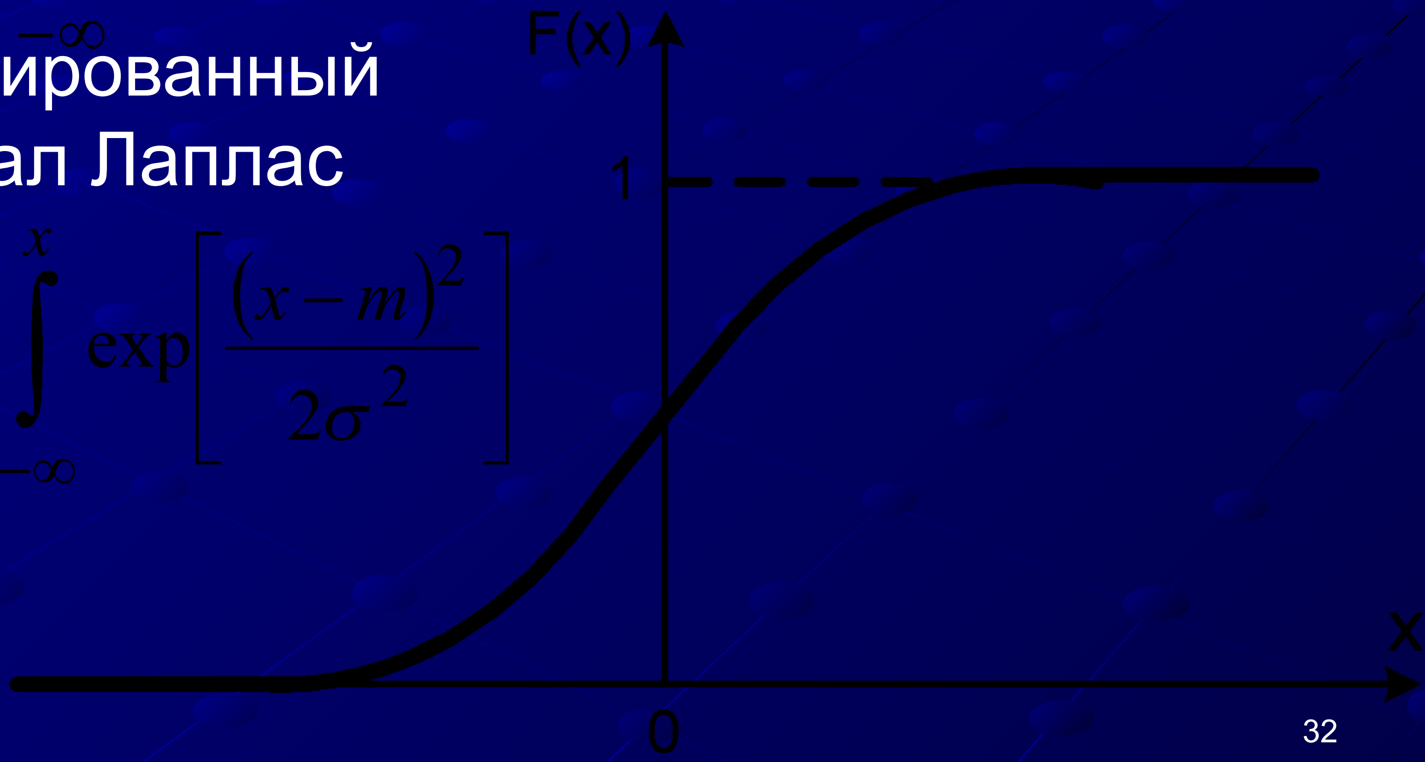


Нормальный закон распределения характеризуется функцией распределения вида:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathring{a}^{-\frac{(\tilde{o}-\grave{o})^2}{2\sigma^2}}dx=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

Φ - табулированный интеграл Лаплас

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x}\exp\left[\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$



РЕЛЕЕВСКИЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

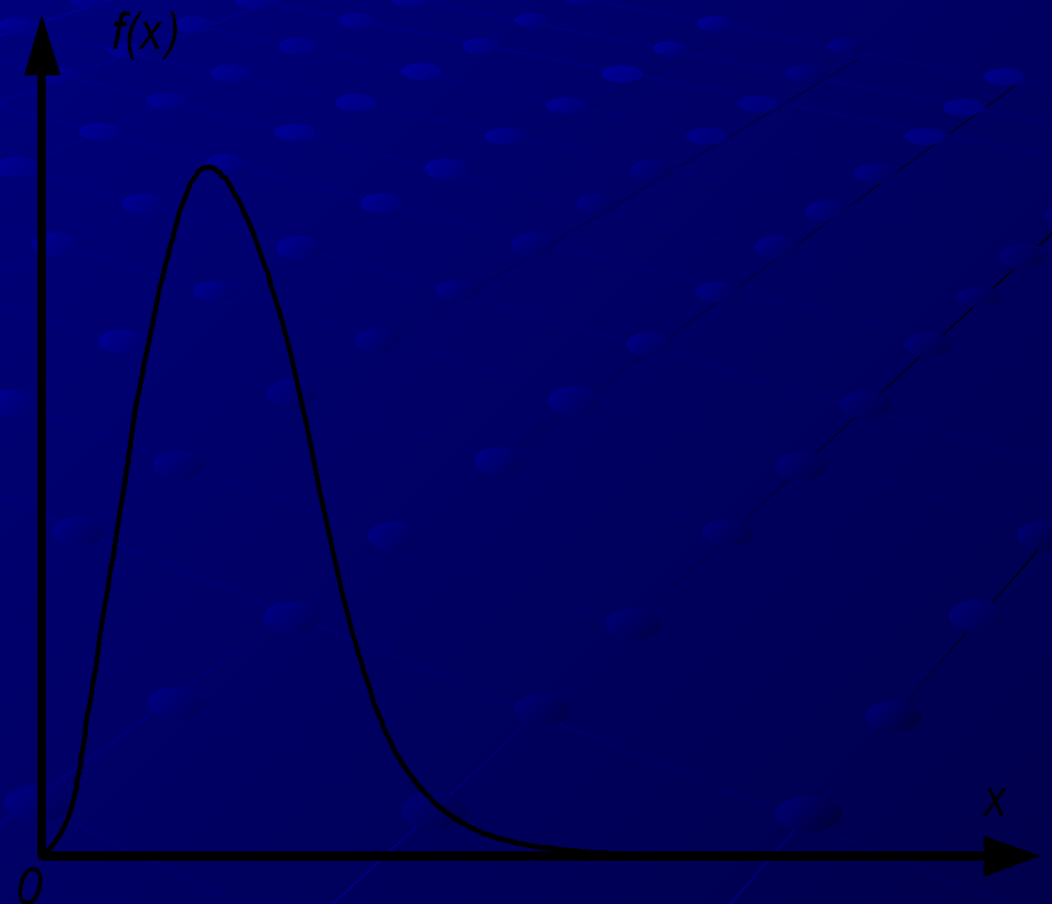
Распределение модуля вектора на плоскости, координаты которого являются независимыми случайными величинами, что имеют нормальный закон распределения с нулевым средним и единичной дисперсией, описываются распределение Релея.

Распределение Релея реализуют когда погрешности измерения по координатам x и y независимы и нормально распределены с одинаковыми дисперсиями.

Релеевский закон распределения определяется плотностью вида

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq \infty$$



Релеевский закон распределения определяется функцией вида

Плотности распределения соответствует $F(x) = 0$ функция распределения вероятностей при $x < 0$ и равная

$$F(x) = \int_0^x \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x^2}{\sigma^2}} e^{-\frac{z}{2}} dz = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

при $x \geq 0$.

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad x \geq 0$$