«Аналогии в математике»

… Я больше всего дорожу аналогиями, моими верными учителями. Они знают все секреты природы и ими меньше всего следует пренебрегать.

Ян Кеплер

<u>АНАЛОГИЯ</u> – (греч. *analogia* – соответствие сходство) сходство предметов (явлений, процессов) в каких-либо свойствах.

Простая аналогия

При которой по сходству объектов в некоторых признаках заключают их сходство в других признаках.

Распространенная аналогия

При которой из сходства явлений делают вывод о сходстве причин.

Строгая

Нестрогая

Цель исследования – рассмотреть геометрические и математико-гуманитарные аналогии.

Задачи исследования:

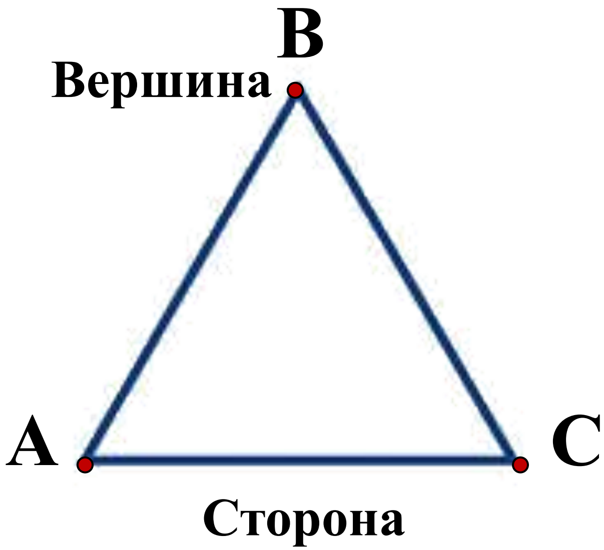
- Изучить учебную, методическую, энциклопедическую литературу.
- Определить сущность аналогии и её виды.
- Выделить признаки сравниваемых объектов, находящихся во взаимной зависимости, через доказательство теорем и решение задач.
- Установить аналогии между математическими и литературными объектами.
- Привести примеры парных задач на плоскости и в пространстве.

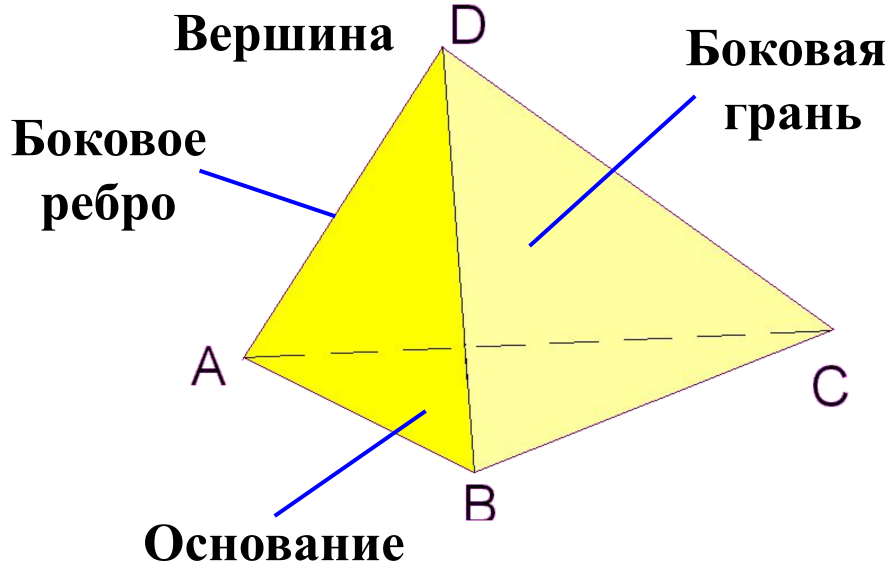
Объект исследования – геометрические аналогии в учебниках геометрии 9, 10 и 11 классов на примере треугольника и тетраэдра; некоторые образцы литературного и песенного искусства.

Предмет исследования – треугольник и тетраэдр, фольклор и математика, математика и поэзия, математика и песня.

Треугольник и тетраэдр

Структурно-функциональный анализ треугольника и тетраэдра

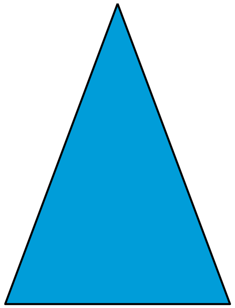




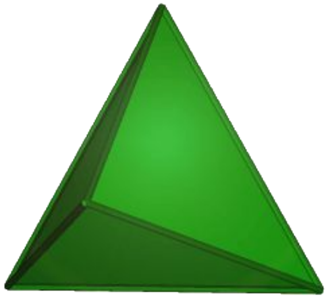
Виды треугольников и тетраэдров

Правильный треугольник

Равнобедренный треугольник

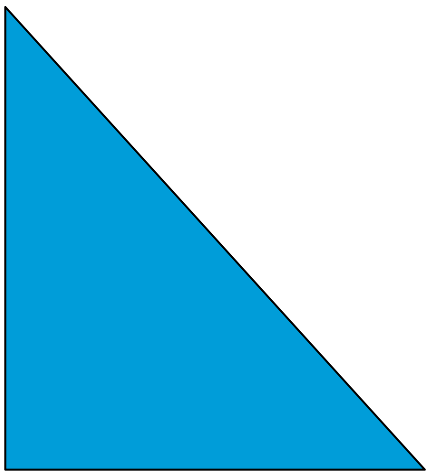


Правильный тетраэдр

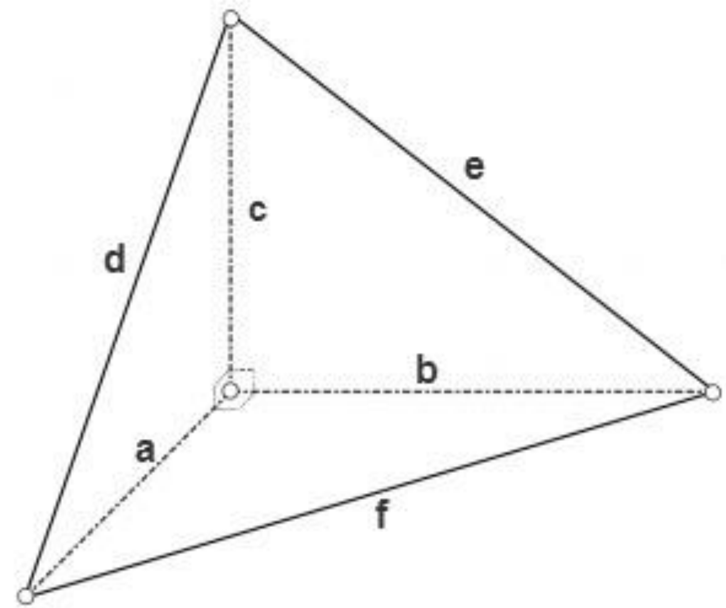


Правильная треугольная пирамида

Прямоугольный треугольник



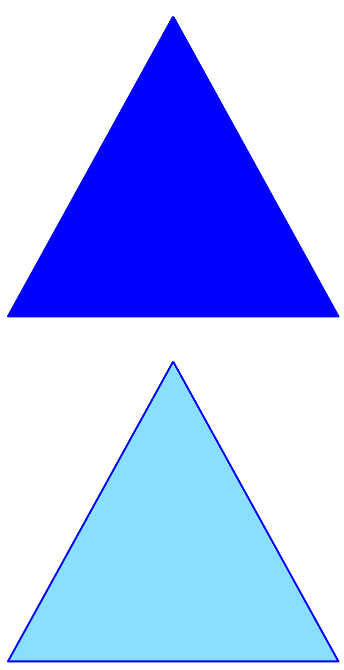
Тетраэдр, в котором все три плоских угла при одной вершине прямые

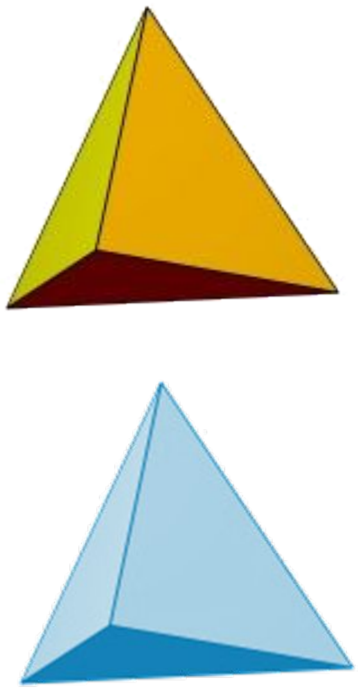


Признаки равенства треугольников и тетраэдров

Равенство треугольников и тетраэдров определяются на основе понятия наложения:

Два треугольника называются равными, если их можно совместить наложением.	Две пирамиды называются равными, если они при вложении одной в другую могут быть совмещены.



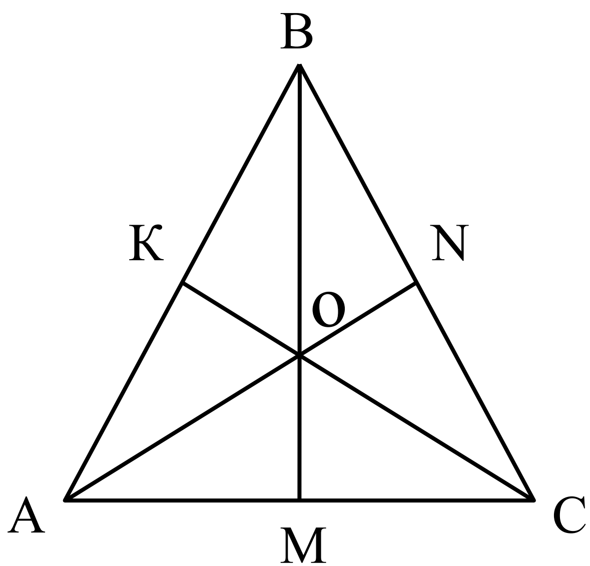


	Признаки равенства треугольников	**Признаки равенства тетраэдров**
I	Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.	Если в двух тетраэдрах соответственно равны две грани и двугранный угол между ними, то такие тетраэдры равны или симметричны.
II	Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.	Два тетраэдра равны или симметричны, если они имеют по равному ребру, прилежащему к соответственно равным трехгранным углам.
III	Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.	Два тетраэдра равны или симметричны, если они имеют по 6 равных ребер, и в обоих тетраэдрах равные элементы располагаются в одном и том же порядке (так, что трем ребрам, лежащим в одной грани или выходящим из одной вершины, соответствуют три равных им ребра, также лежащие в одной грани или выходящие из одной вершины).

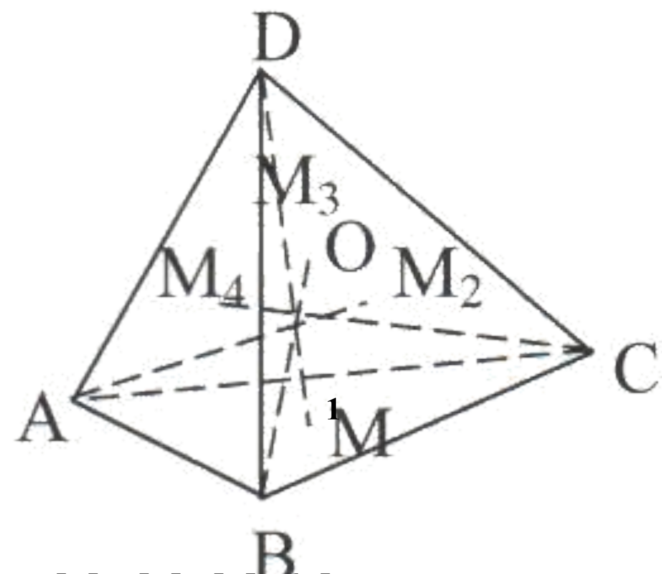
Эмпирические исследования треугольника и тетраэдра

	Теоремы о замечательных точках треугольника	Стереометрические аналогии теорем о замечательных точках треугольника
I	Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.	Плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла перпендикулярно к противолежащей грани, пересекаются по одной прямой.
II	Медианы треугольника пересекаются в одной точке.	Плоскости, проходящие через биссектрисы плоских углов каждой грани трехгранного угла и противолежащего им ребра, пересекаются по одной прямой.
III	Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая удалена от сторон углов треугольника на одинаковое расстояние.	Биссекторные плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой, и каждая точка этой прямой удалена от граней трехгранного угла на одно и то же расстояние.

<table>
<tr>
<td>● Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой треугольника.</td>
<td>● Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани, называется медианой тетраэдра.</td>
</tr>
<tr>
<td>

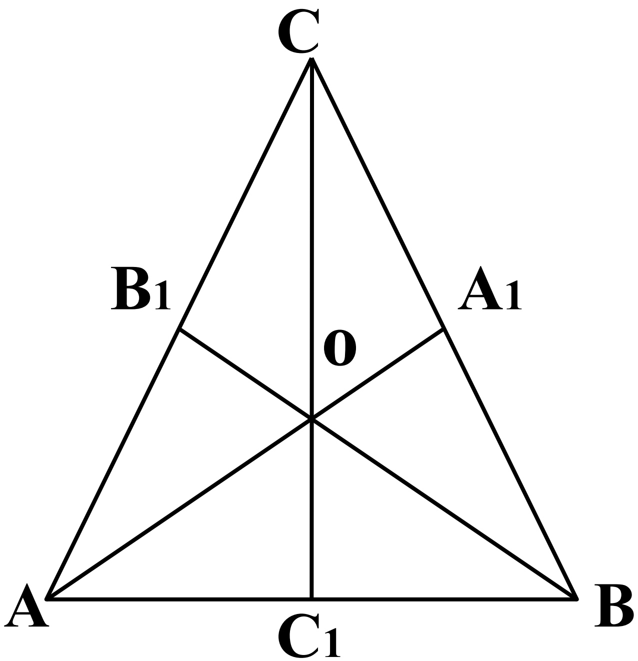


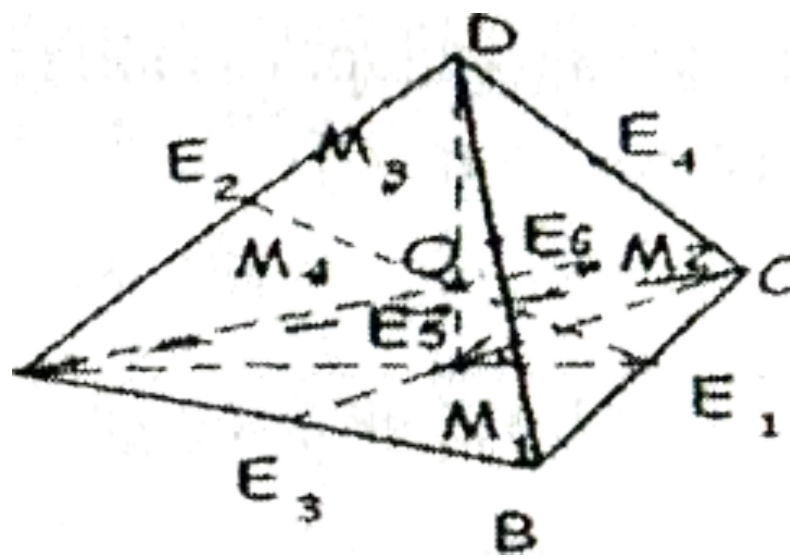
Отрезки BM, CK, AN – медианы треугольника
</td>
<td>



Точки M_1, $M_{2,}$ $M_{3,}$ M_4 -точки пересечения медиан граней. Отрезки AM_2, DM_1, BM_3, CM_4 – медианы тетраэдра
</td>
</tr>
</table>

Свойство медиан треугольника	Свойство медиан тетраэдра
Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершин.	Четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3:1, считая от вершин.





Доказательство:

1. Рассмотрим произвольный ΔABC.

Медианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O.

2. B_1A_1 – средняя линия треугольника.

$B_1A_1 \parallel AB$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

$\Delta AOB \sim \Delta A_1OB_1$ (по двум углам)

3. $\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{1}{2}$. $AO = 2A_1O$, $BO + 2B_1O$.

$AO = 2A_1O$, $BO + 2B_1O$.

4. Аналогично доказывается, что точка пересечения медиан BB_1 и CC_1 делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины, и, следовательно совпадает с точкой O.

Все три медианы ΔABC пересекаются в точке O и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины

Доказательство:

1. Отрезки DM_1 и AM_2 принадлежат плоскости ADE_1.

Отрезки DM_1 и AM_2 пересекаются в точке O.

2. $M_1M_2 \parallel AD$

$\Delta AE_1D \sim \Delta M_1E_1M_2$, значит,

$$\frac{M_1M_2}{AD} = \frac{M_1E_1}{AE_1} = \frac{1}{3}$$

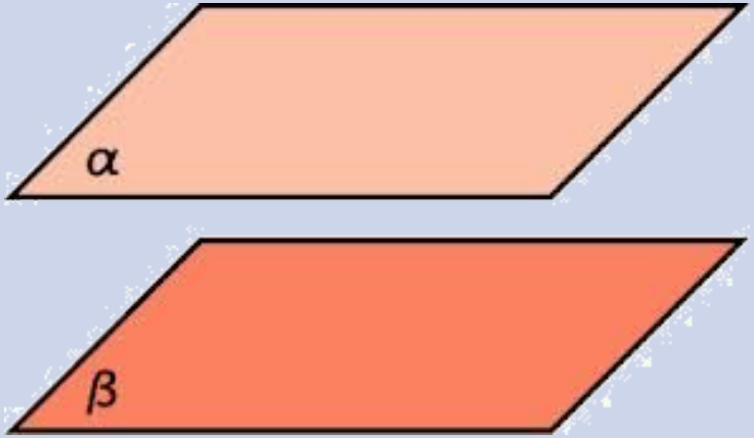
3. $\Delta M_1OM_2 \sim \Delta DOA$, значит,

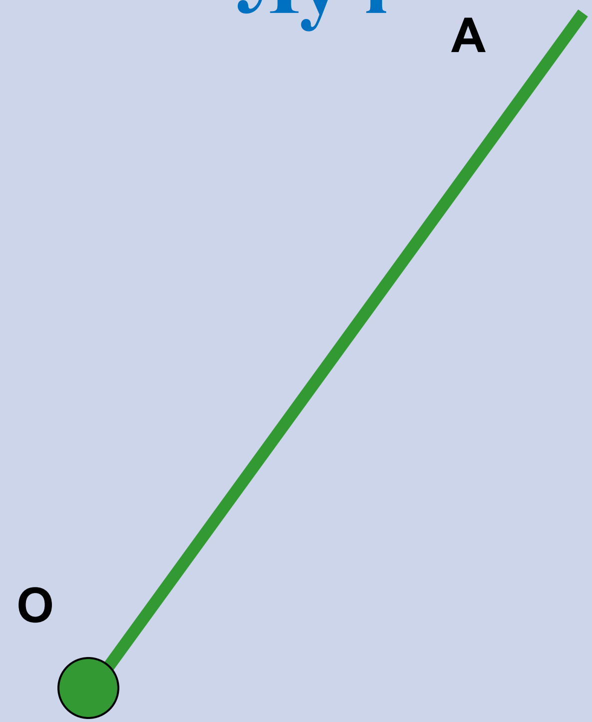
$$\frac{M_1O}{DO} = \frac{OM_2}{AO} = \frac{1}{3}$$

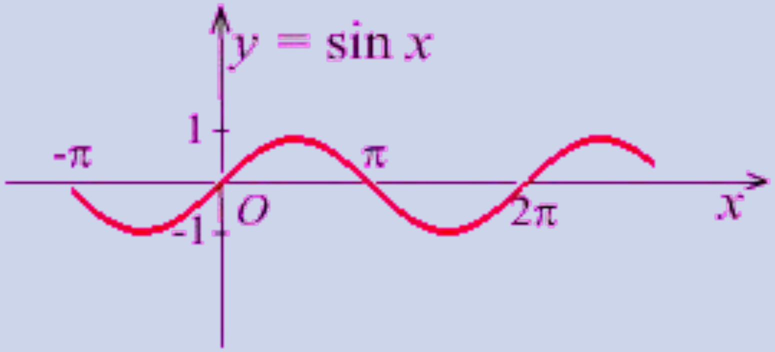
4. Повторив рассуждения для ΔBE_5D и ΔCE_3D, получим, что отрезок BM_3 и CM_4 пересекают отрезок DM_1 в точке, делящей его в отношении 3 : 1, считая от вершины, то есть в точке O.

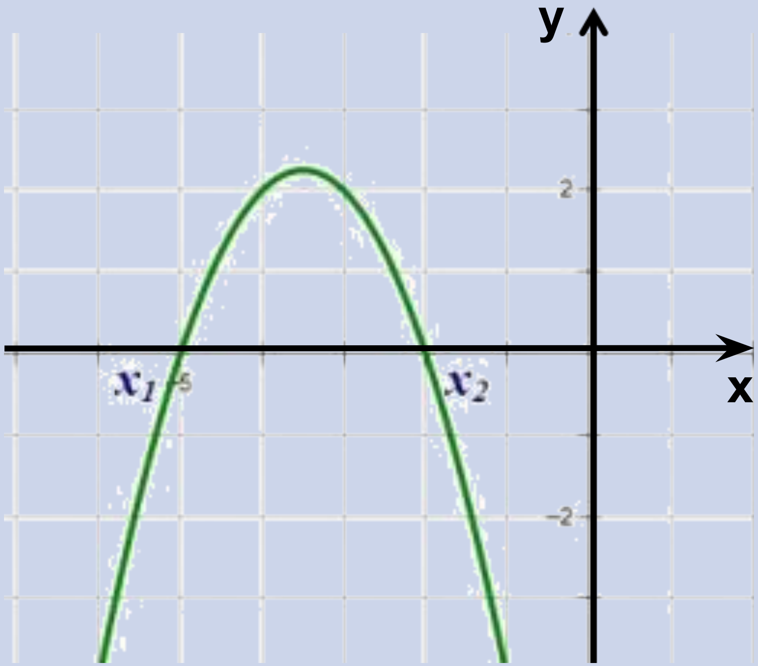
$BM_3 : CM_4 = 3 : 1$.

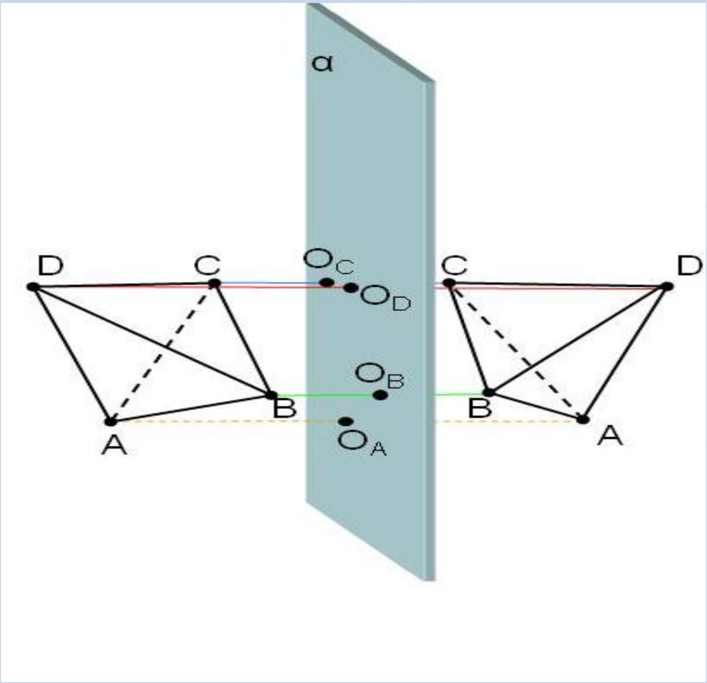
Фольклор и математика

Фольклорный объект	Математический объект
Загадка Два быка бодаются, Вместе не сойдутся. **Отгадка** Небо и земля 	**Параллельные плоскости** 

Фольклорный объект	Математический объект
Загадка **Придёт в дом,** **не выгонишь колом** **Пора придёт – сам уйдёт.** **Отгадка** **Солнечный луч** 	**Луч** 

Фольклорный объект	Математический объект
Загадка **По морю идёт, а** **Как на берег выползет,** **Тут и пропадёт.** **Отгадка** **Волна** **(форма графика)** 	**Синусоида** **(косинусоида)** 

Фольклорный объект	Математический объект
Загадка **Разноцветное коромысло над рекою повисло.** **Отгадка** **Радуга** **(имеет форму параболы с ветвями, направленными вниз)** 	**Парабола** 

Фольклорный объект	Математический объект
Загадка **Перед нами вверх ногами, перед тобой – вверх головой.** **Отгадка** **Отражение в воде** 	**Симметрия относительно плоскости** **(зеркальная симметрия)** 

Математика

и

поэзия

Поэтический объект	Математический объект
… А вы, друзья, Как ни садитесь, Все в музыканты не годитесь. И.А. Крылов	От перестановки мест слагаемых сумма не изменяется. $a + b = b + a$

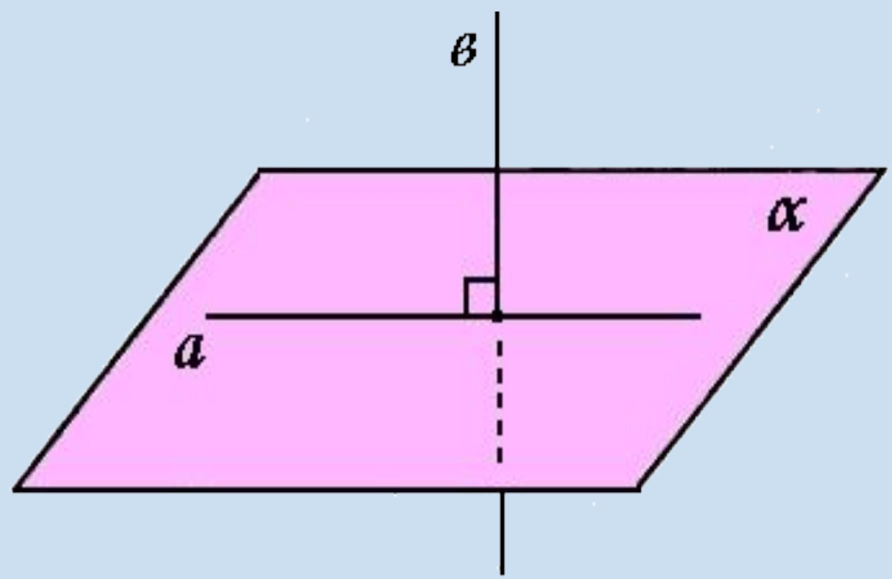
Поэтический объект

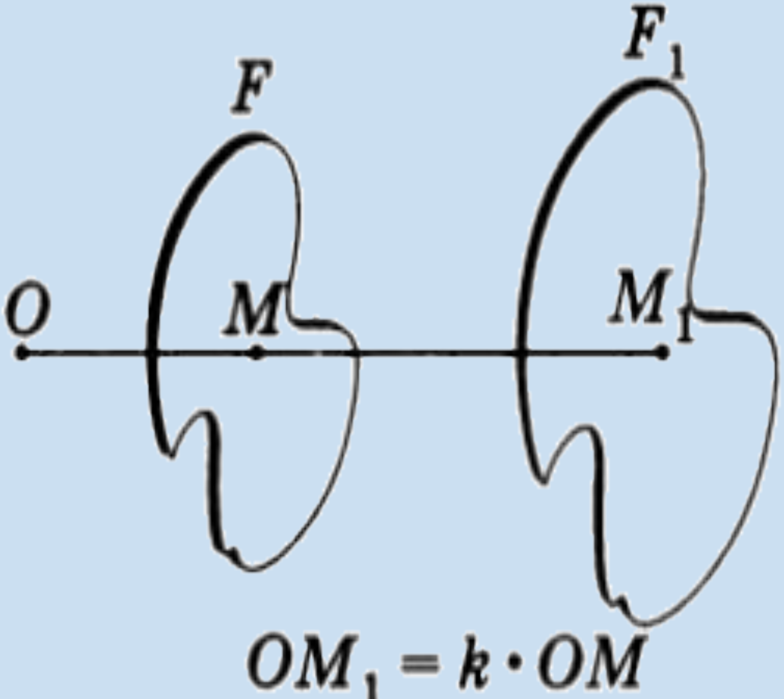
Снег на крыше, на крылечке.
Солнце в небе голубом.
В нашем доме топят печки,
В небо дым идёт столбом.

С.Я. Маршак

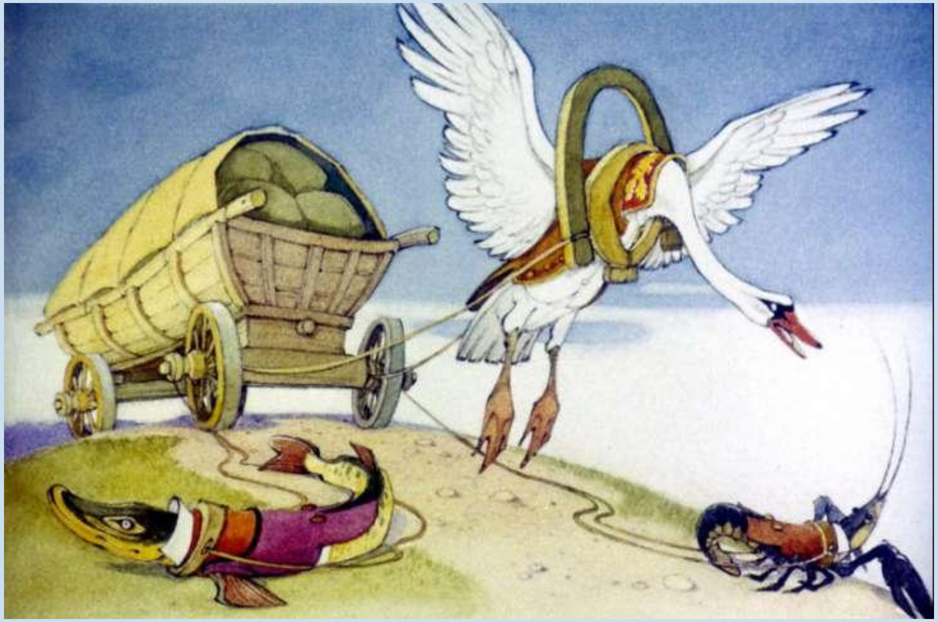
Математический объект

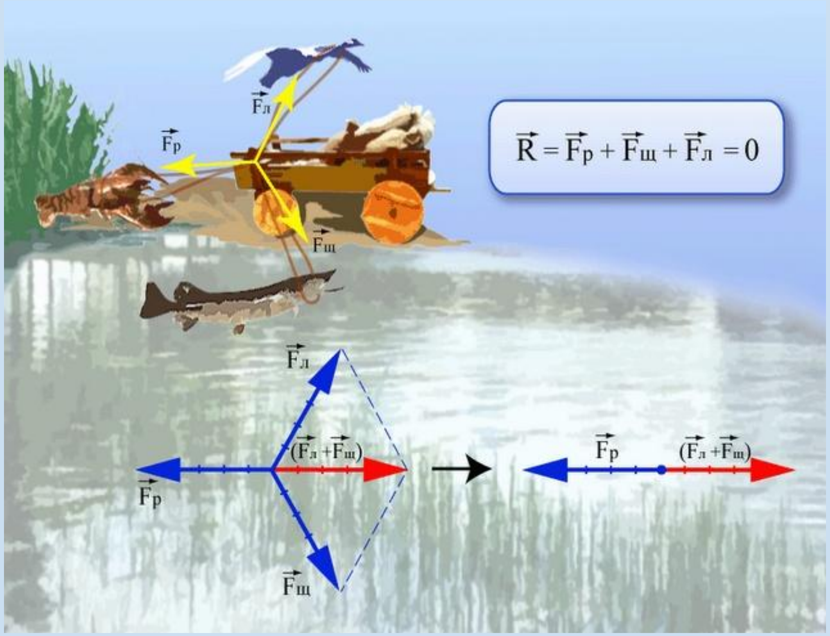
Перпендикуляр к плоскости (дым перпендикулярен плоскости неба и земли)

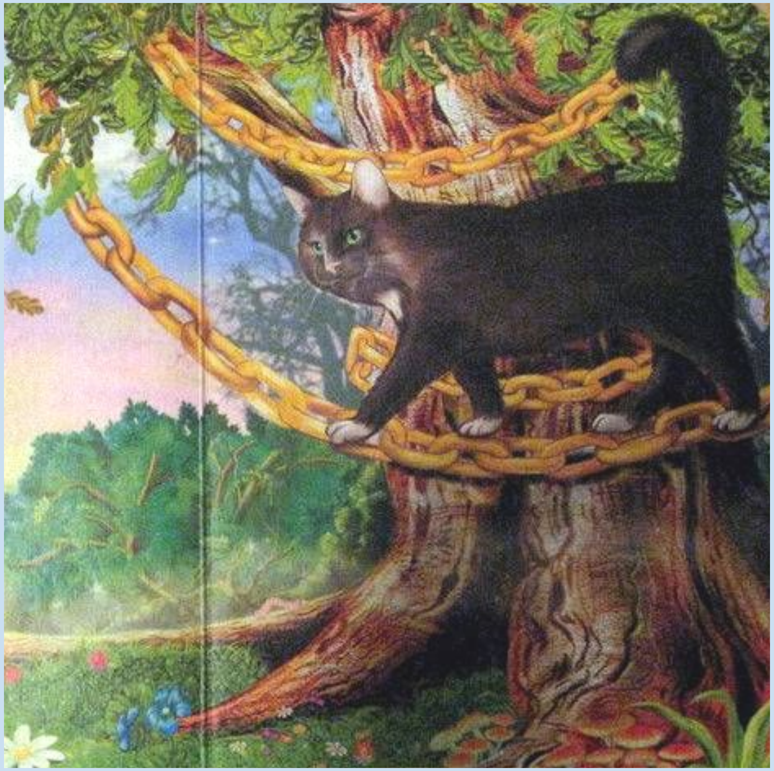
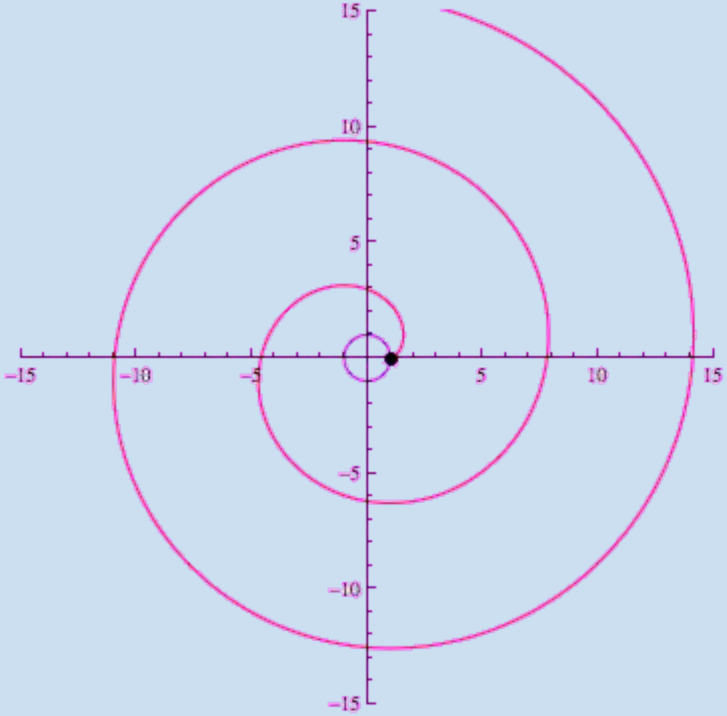


Поэтический объект	Математический объект
Вот в одинаковых платьях, как сёстры, Бабочки сели в траву отдыхать. То закрываются книжечкой пестрой, То, раскрываясь, несутся опять. С.Я. Маршак  	Подобные фигуры 

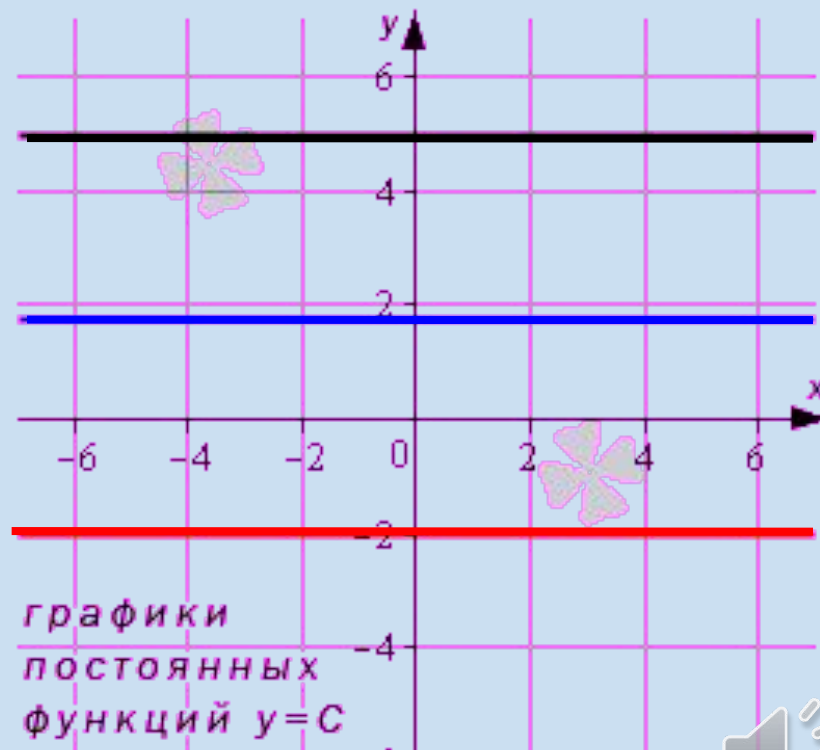
Поэтический объект	Математический объект
Однажды Лебедь, Рак да Щука Везти с поклажей воз взялись, И вместе трое все в него впряглись, Из кожи лезут вон, а возу всё нет ходу! **И.А. Крылов**	**Некомпланарные векторы, сумма векторов (равнодействующая сил, действующих на воз, равна нулю)**





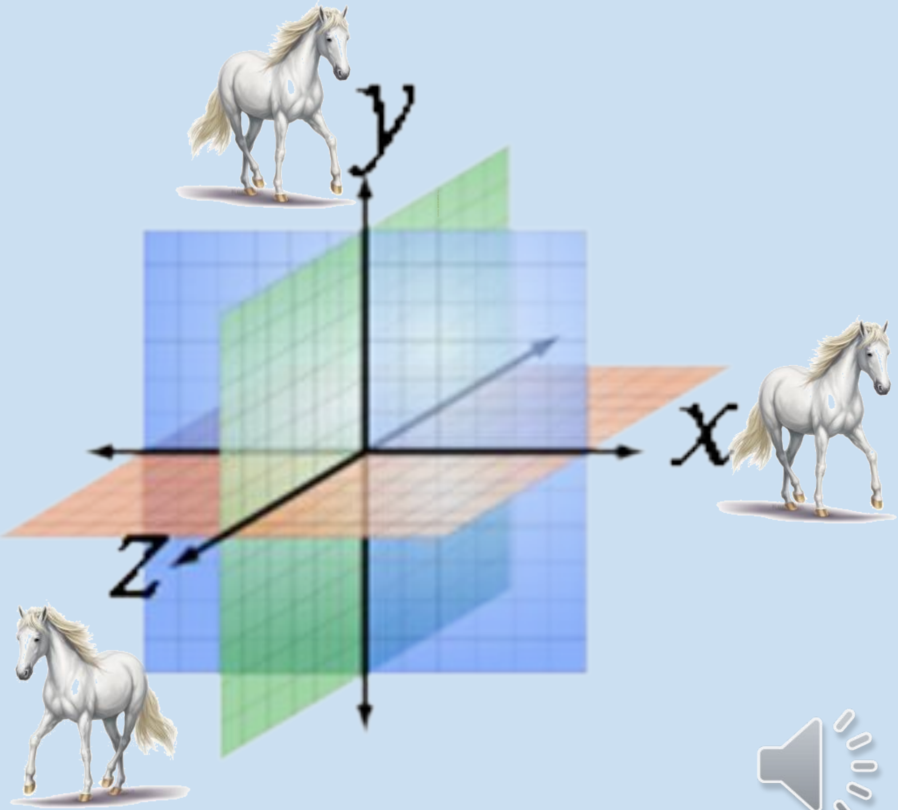
Поэтический объект	Математический объект
У лукоморья дуб зелёный, Златая цепь на дубе том, И днём и ночью кот учёный Всё ходит по цепи кругом. А.С. Пушкин 	Эвольвента круга (линия, которую описывает при движении кот) 

Математика в песне

Песенный объект	Математический объект
… Наше счастье постоянно Жуй кокосы, ешь бананы, Жуй кокосы, ешь бананы – Чунга-чанга!	**Постоянная функция**
	

Песенный объект	Математический объект
Издалека долго Течёт река Волга, Течёт река Волга – Конца и края нет…	Бесконечность
	

Песенный объект	Математический объект
И уносят меня, и уносят меня В звенящую снежную даль Три белых коня, три белых коня Декабрь, январь и февраль.	Система координат в пространстве



Песенный объект

Если с другом вышел в путь,
Если с другом вышел в путь –
Веселей дорога!

Математический объект

Сонаправленные векторы
(движутся в одну сторону)

«Математик – это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями; лучший математик тот, кто замечает аналогии теорий; но можно себе представить и такого, кто между аналогиями видит аналогии»

Стефан Банах

Использованная литература

1. Атанасян, Л. С. Геометрия. 7-9 классы/ Л. С. Атанасян. – М.: Просвещение, 2003.
2. Атанасян, Л. С. Геометрия. 10-11 классы/ Л. С. Атанасян. – М.: Просвещение, 2010 – 206 с.
3. Видеман, Т.Н. Математика. 10-11 классы: рефераты/ Т.Н.Видеман. – Волгоград: Учитель, 2009. – 287 с.
4. Кучеров, В. Геометрические аналогии/ В. Кучеров. – М.: Бюро Квантум, 1995. – 128 с.
5. Панишева, О.В. Математика для гуманитариев.5-11 классы: опыт работы, уроки, внеклассные мероприятия/ О.В.Панишева. –Волгоград: Учитель, 2011. – 271 с.
6. Энциклопедический словарь юного математика. – М.: Педагогика, 1989. – 352 с.

Ресурсы Интернет:

http://n-shkola.ru/arch/54.html
http://rudocs.exdat.com/docs/index-17734.html

СПАСИБО
ЗА
ВНИМАНИЕ !