Теория статистических решений

(Статистические игры. Игры с «Природой»)

Содержание раздела

- Основные понятия
- Игры без эксперимента
- Игры с единичным экспериментом
- Игры с многократным экспериментом
- Дерево решений при принятии решений в условиях неопределенности

Список использованных источников

1. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. М.: Энергия,1980 – 424 с.
2. Зайченко Ю.П. Исследование операций, Киев: Высшая школа, 1975, 1988, 1993, 2001 гг.,
3. Таха Х. Исследование операций. 1985, 2002.
4. Исследование операций. Под ред. Моудера Дж., Эльмаграби С. М.: Мир, 1981г. (В 2-х томах)
5. Общая методика конструирования критериев оптимальности решений в условиях риска и неопределенности /_Финансовый менеджмент №5 / 2002 http://www.dis.ru/fm/arhiv/2002/5/10.html

Тема 1.
Статистические игры.
Основные понятия

1. Основные понятия теории статистических решений

В основе теории **антагонистических игр** – предположение о том, что интересы двух игроков **противоположны**, что имеет место **конфликтная ситуация**. В таких играх игрок действует активно в противовес интересам других игроков (если игры не кооперативные)

1.1. Основные понятия теории статистических решений

Во многих практических ситуациях - один из игроков **нейтрален,** т.е. не стремится обратить в свою пользу ошибки, совершаемые противником

В таких ситуациях сторону, выступающую в качестве объективной реальности, ***т.е. совокупность внешних обстоятельств (имеющих случайный неопределенный характер),*** в которых приходится принимать решения, принято называть **«природой»**

1.1. Основные понятия теории статистических решений

 # Df 1. Модели ситуаций, в которых в качестве одного из противников выступает «природа» - называют **играми с «природой» или статистическими играми**

1.1. Основные понятия теории статистических решений

 # Df 2. Второй участник игры с «природой» - «статистик» или ЛПР

«Природа» не совершает злого умысла по отношению к человеку («статистику»)

→ «природу» нельзя рассматривать как разумного противника, который мог бы использовать ошибки, совершаемые «статистиком»

→ **в игре с «природой» есть только задача «статистика», но нет задачи «природы»**

1.1. Основные понятия теории статистических решений

Df 3. Задача «статистика»

Необходимо:

- **выработать (принять решение)** с наибольшей для себя выгодой в условиях неопределенности (неполной информации) о поведении «природы»
- т.к. информация неполна, т.е. есть возможность принятия ошибочного решения, нужно выработать такое решение (стратегию), которое сводит к **минимуму нежелательные последствия ошибочного решения**

1.1. Основные понятия теории статистических решений

Df 3. Задача «статистика»

Необходимо:

- учитывать то, что в некоторых ситуациях можно провести **эксперимент** (со стоимостными и временными затратами), поэтому нужен анализ: имеет ли смысл проводить эксперимент и каковы его характеристики

1.1. Основные понятия теории статистических решений

Df 4.

- **Теория статистических решений** (ТСтР) – это теория статистических игр (игр с «природой»
- **ТСтР** – это теория оптимального недетерминированного поведения в условиях неопределенности /МЭ, т.5, стр. 183/
- **ТСтР (**более узко, с точки зрения математической статистики) **-** это теория проведения статистических наблюдений, их обработки и использования /Там же/

Теория статистических решений

Современная общая концепция статистического решения принадлежит А. Вальду /Вальд А. Последовательный анализ. М. 1960/

Классическая **задача математической статистики** – на основе качественного описания распределения вероятностей некоторой случайной величины и результатов фиксированного числа наблюдений (измерений) случайной величины **<u>необходимо сделать вывод об оценке закона распределения (и выбрать оптимальное поведение)</u>**

Теория статистических решений

Последовательный анализ Вальда - каждый дополнительный эксперимент имеет стоимость, ошибочное решение штрафуется.

Необходимо построить решающее правило, оптимальное в том смысле, что **минимизируется математическое ожидание всех убытков**

Применение последовательного анализа ведет к снижению необходимого числа наблюдений (экспериментов)

В 1820 г. Лаплас уподобил получение статистической оценки азартной игре, в которой статистик терпит поражение, если его оценки плохи

Тема 2.
Статистические игры без эксперимента
Постановка задачи
Подходы к решению

2. Игра без эксперимента.
2.1. Постановка задачи

ДАНО (блок данных B):

- **$D = \{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$ – множество стратегий «статистика» (ЛПР)**
- **$S = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$ – множество состояний «природы»**
- **$L(d,s) : \{a_{i,j}\}$ – функция потерь (выигрышей)**

Возможно ! **ДАНО (блок B'):**

- **$P(S) = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ – вероятности состояний «природы»**

НАЙТИ: («чистую») стратегию поведения «статистика» (ЛПР)

ПРИМЕР:

- **d_1 – не брать зонтик,**
  d_2 – взять зонтик
- **s_1 – будет дождь**
  s_2 – будет ясно
- **$\{a_{i,j}\}$=**

L(d,s)	s1	s2
d1	100	0
d2	-50	50

- **$(p_1, p_2) = (0{,}3; 0{,}7)$**

Вопросы для обсуждения

- Какую исходную информацию в теории статистических игр можно считать объективной (экспертной), а какую субъективной?
- Понятие чистых и смешанных стратегий в антагонистических и статистических играх, что общего? В чем различие?

2. Игра без эксперимента.
2.2. Подходы к решению задачи

- Принцип Сэвиджа …
- Принцип Гурвица …
- Принцип Лапласа …

Какие еще принципы (критерии) оптимальности используются в играх без эксперимента? Смысл их введения?

- Принцип максимального правдоподобия …
- Критерий «ожидаемое значение – дисперсия» …
- Критерий предельного уровня …
- …

1. Таха Х. Исследование операций
2. Лабскер Л.Г., Яновская Е.В. Общая методика конструирования критериев оптимальности решений в условиях риска и неопределенности // Финансовый менеджмент №5, 2002 [http://www.dis.ru/fm/arhiv/2002/5/10.html

2. Игра без эксперимента.
2.2. *Подходы к решению задачи*

- **Принцип минимакса (критерий Вальда)**

$$d^* : L(d^*) = \min_d \max_s L(d,s)$$

- **Принцип минимальных ожидаемых потерь (критерий Байеса)**

$$d^* : ML(d^*) = \min_d ML(d),$$

где $ML(d) = \sum_s L(d,s)*P(s) = \sum_j a_{i,j}*p_j$

- математическое ожидание потерь при выборе «статистиком» стратегии d

ПРИМЕР:

- …

$d^* = d_2$ $L(d^*) = 50$

- $ML(d_1) =$

$= 100*0,3 +$

$+ 0*0,7 = 30$

$ML(d_2) =$

$- 50*0,3 +$

$+ 50*0,7 = 20$

$d^* = d_2$ $L(d^*) = 20$

2. Игра без эксперимента
2.2. Подходы к решению задачи
Комментарии к принципу Байеса /Таха Х./

Нецелесообразно использовать ожидаемое значение стоимостного выражения (выигрыша или потерь) [принцип Байеса] как единственный критерий для получения решения

Этот критерий служит только ориентиром, а окончательное решение может быть принято лишь на основе всех существенных факторов

Использование данного принципа предполагает **многократное решение одной и той же задачи**

2. Игра без эксперимента

2.2. Подходы к решению задачи

Комментарии к принципу Байеса /Таха Х./

Математически это утверждение можно доказать следующим образом:

если X – случайная величина,

а M{X} – математическое ожидание X, то при достаточно большом объеме выборки разница между выборочным средним и математическим ожиданием стремится к нулю.

Следовательно, использование данного критерия, допустимо лишь в случае, когда одно и тоже решение приходится принимать достаточно большое число раз

► **Вывод !!:** ***ориентация на ожидания будет приводить к неверным результатам для решений, которые приходится принимать небольшое число раз***

2. Игра без эксперимента.
2.3. Дерево решений

характер-ка эксп-та	вер-ти исходов эксп-та	принятие решений di / ?$_i$	априорные / апостериорные вер-ти состояний природы	функция потерь	ожиданме потери	минималь-ные ожидаемые потери	оптима-льная стратегия: di или ?i		ожидаемый риск от принятого решения (см П1)	принятие решения о необходимости / продолжении эксперимента
e_0 $c_0 = 0$	$p(z_0) = 1$	d_1 d_2	$p(s_1) = 0{,}3$ $p(s_2) = 0{,}7$ $p(s_1) = 0{,}3$ $p(s_2) = 0{,}7$	100 0 -50 50	100*0,3+ 0*0,7 = **30** - 50*0,3 + 50*0,7 = **20**	min (30, 20) = 20	$d^* = d_2$		= 20 + 0 = 20	?

Игра без эксперимента
Вопросы для обсуждения

- Критерии или принципы оптимальности ?
- Как сформулировать ответ в терминах исходной задачи?
- Что общего и различного в принципах оптимальности в антагонистических и статистических играх? Чем это объясняется?