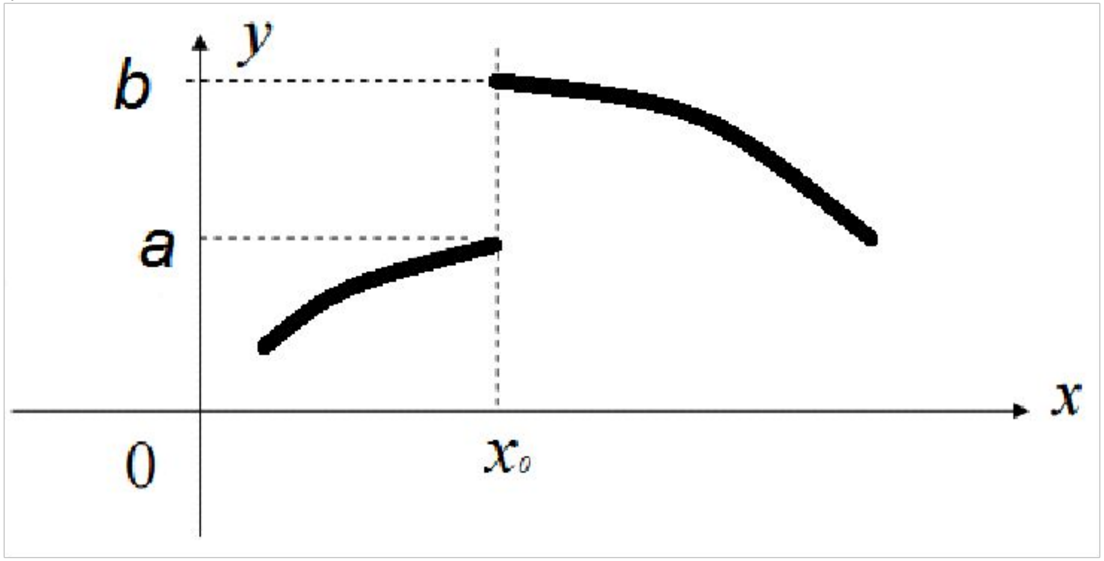
Лекция 7. Односторонние пределы. Эквивалентные функции и их свойства, их применение к вычислению пределов функции в точке.

Односторонние пределы

$y = f(x)$



В этой ситуации a – левый предел функции $y = f(x)$ в точке x_0, b – правый предел функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Число b называется правым пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon \in K_+ \exists \delta \in R_+ \forall x \in D(f)(x_0 < x < x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$

Число a называется левым пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon \in R_+ \exists \delta \in R_+ \forall x \in D(f)(x_0 - \delta < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$

Смысл следующий: для левого предела – когда $x \to x_0$ слева, то $f(x) \to a$; для правого предела – когда $x \to x_0$, то $f(x) \to b$

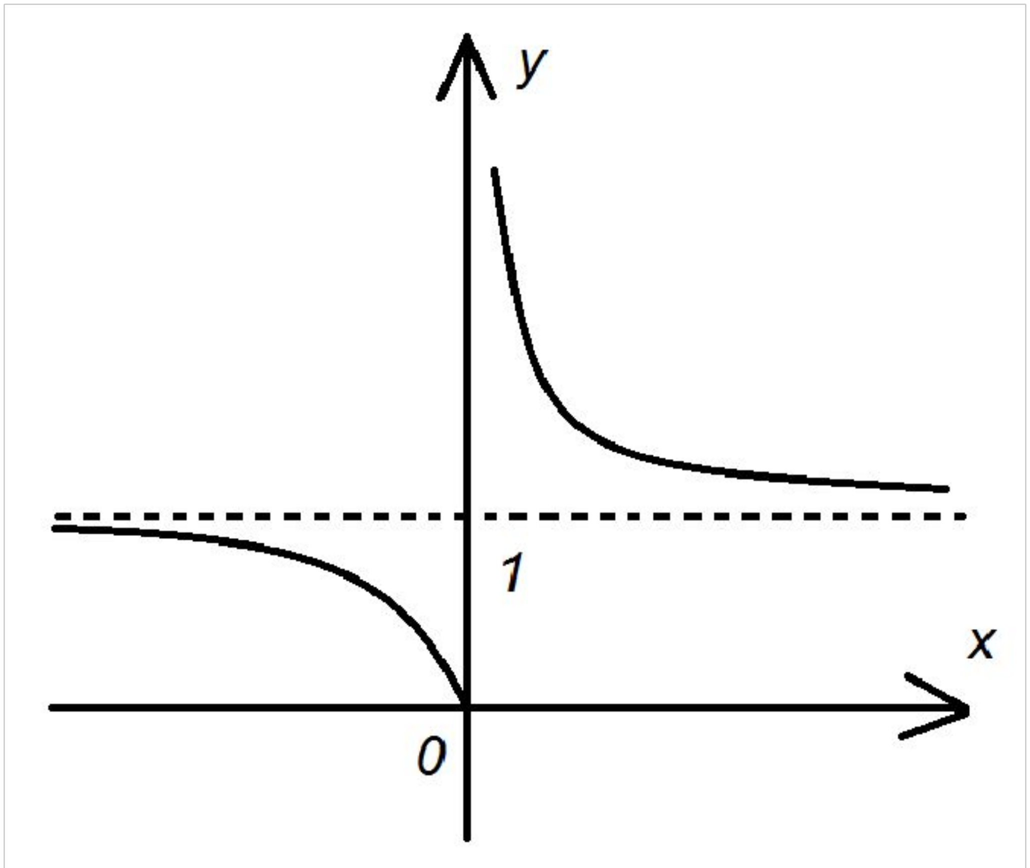
Высказывание $x_0 < x < x_0 + \delta$ означает, что $x \in$ правой полуокружности. Высказывание $x_0 - \delta < x < x_0$ означает, что $x \in$ левой полуокружности.

Пример.

Вычислить односторонний предел функции $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ в точке $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}}=\left[\frac{1}{x}=t\left|\begin{array}{l}x\to 0-0\\ t\to\infty\end{array}\right.\right]=\lim_{t\to-\infty} 2^{t}=0$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}}=\left[\frac{1}{x}=t\left|\begin{array}{l}x\to 0+0\\ t\to\infty\end{array}\right.\right]=\lim_{t\to+\infty} 2^{t}=+\infty$$



Теорема (третий критерий существования предела в точке):

Число b является пределом функции $\underset{x \to x_0}{f(x)}$ тогда и только тогда, когда существуют левый и правый пределы и они совпадают, т.е.:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = \mathrm{b}$$

Без доказательства

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{\alpha \to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

Замечание: логарифмы по основанию e называются натуральными $log_e x = ln\, x$.

Понятие непрерывной функции.

Df 1. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in D(f)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ равен значению функции в этой точке (предел функции в точке равен значению функции в этой точке).

Df 1'. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in D(f)$, если $\forall \varepsilon \in R_+ \exists \delta \in R_+ \forall x \in D(f) (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

Df 1''. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in D(f)$, если

$$|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \Leftrightarrow$$

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Leftrightarrow$$

$$x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \Leftrightarrow$$

$$x \in \acute{O}(x_0; \delta)$$

Рассмотрим:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon \Leftrightarrow$$

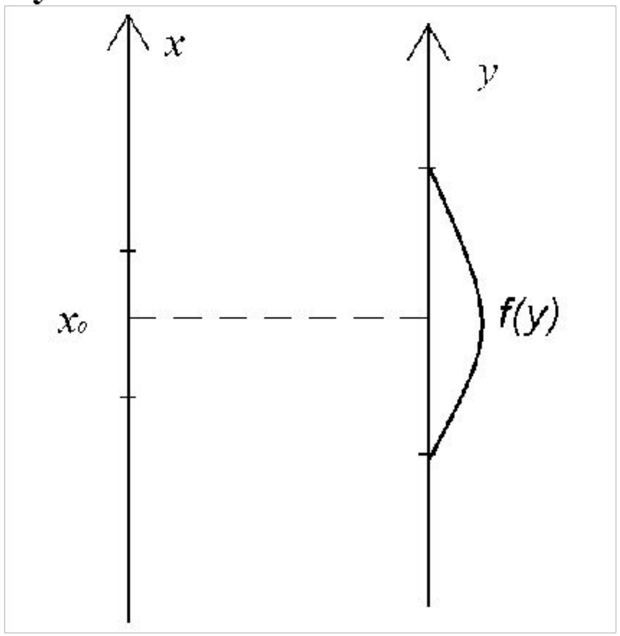
$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) \in (f(x_0) - \varepsilon; f(x_0) + \varepsilon)$$

$$x \in \acute{O}(f(x_0); \varepsilon)$$

Грубо говоря, $\forall\ \acute{O}(f(x_0);\varepsilon)\ \exists\ \acute{O}\,(x_0;\delta)(f(\acute{O}\,(x_0;\delta))\subset f(\acute{O}(f(x_0);\varepsilon))$

Пусть



$\Delta x = x - x_0$ - приращение аргумента x в точке x_0

$y = f(x)$

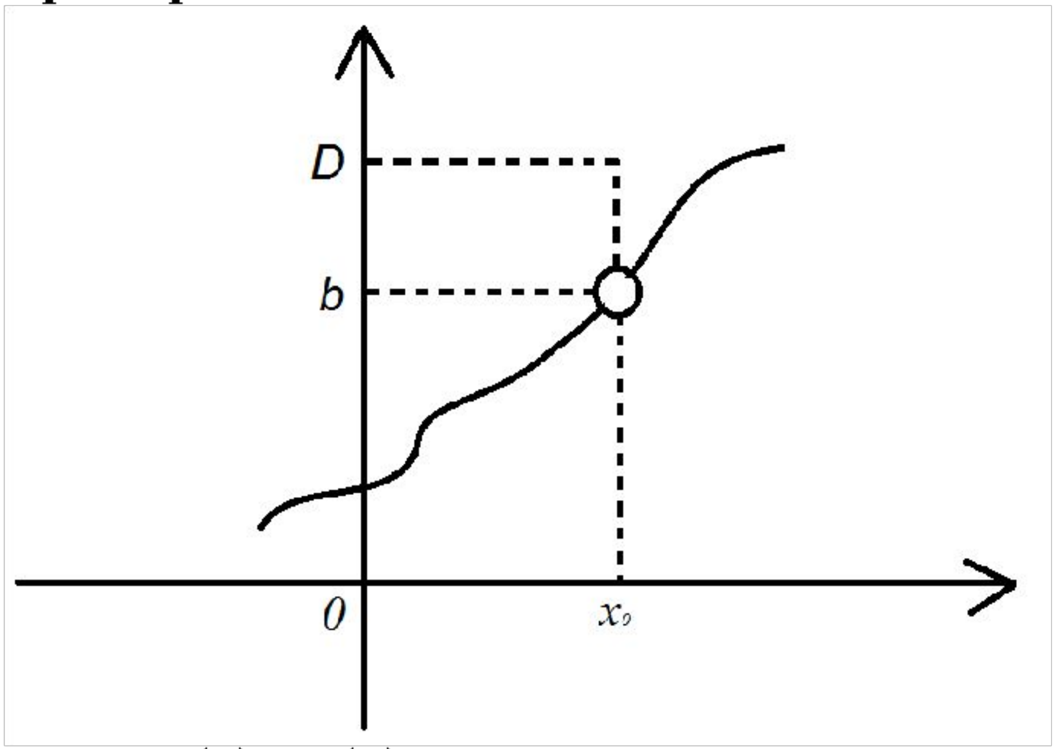
$\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Пусть функция непрерывна в точке x_0. Это значит, что $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x) \Leftrightarrow (x\to x_0 \Rightarrow f(x)\to f(x_0)) \Leftrightarrow$

$(x - x_0 \to 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \to 0) \Leftrightarrow (\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0)$, т.е бесконечно малому аргументу соответствует бесконечно малое приращение функции, и так получаем следующее равносильное предыдущим определения:

Df 1'''. Функция $y = f\,(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in D(f)$, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции.

Все 4 определения Df- Df 1''' равносильны между собой.

Пример.



$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq f(x)$$

Df 2. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на множестве $X \subset R$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Геометрическая интерпретация непрерывности: тот факт, что функция является непрерывной на множестве, в точности означает, что ее график является сплошной без просвета линией.

Th (критерий непрерывности функции в точке):

Функция $y = f(x)$ является непрерывной в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x)$.

Это сразу же получается из Df 1 и третьего критерия существования предела функции в точке.

Th (о непрерывности суммы, произведения и частного):

Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в т.x_0, тогда функции $f \pm g$, $f \cdot g$ и $\dfrac{f}{g}$ тоже непрерывны в этой точке, иными словами, сумма, произведение и частное непрерывных функций есть непрерывная функция.

Доказательство.

Рассмотрим для $f+g$

Пусть $h(x)=f(x)+g(x)$

$(!) \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = h(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)+g(x_0) = h(x_0)$$

Ч.т.д.

Докажем для $\dfrac{f}{g}$

Пусть $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $g(x) \neq 0$

$(!) \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = h(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = h(x_0)$$

Ч.т.д.

Для $f \cdot g$

Пусть $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ $(!) \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = h(x_0)$

Замечание: эта теорема оказывается справедливой для любого конечного числа слагаемых функции и сомножителей.

Следствия:

1-е следствие: любой одночлен $\alpha \cdot x^n (n \le N)$ является непрерывной функцией $\alpha \cdot x^n = \alpha \cdot x \cdot x \cdot ... \cdot x$ произведения и сомножителей.

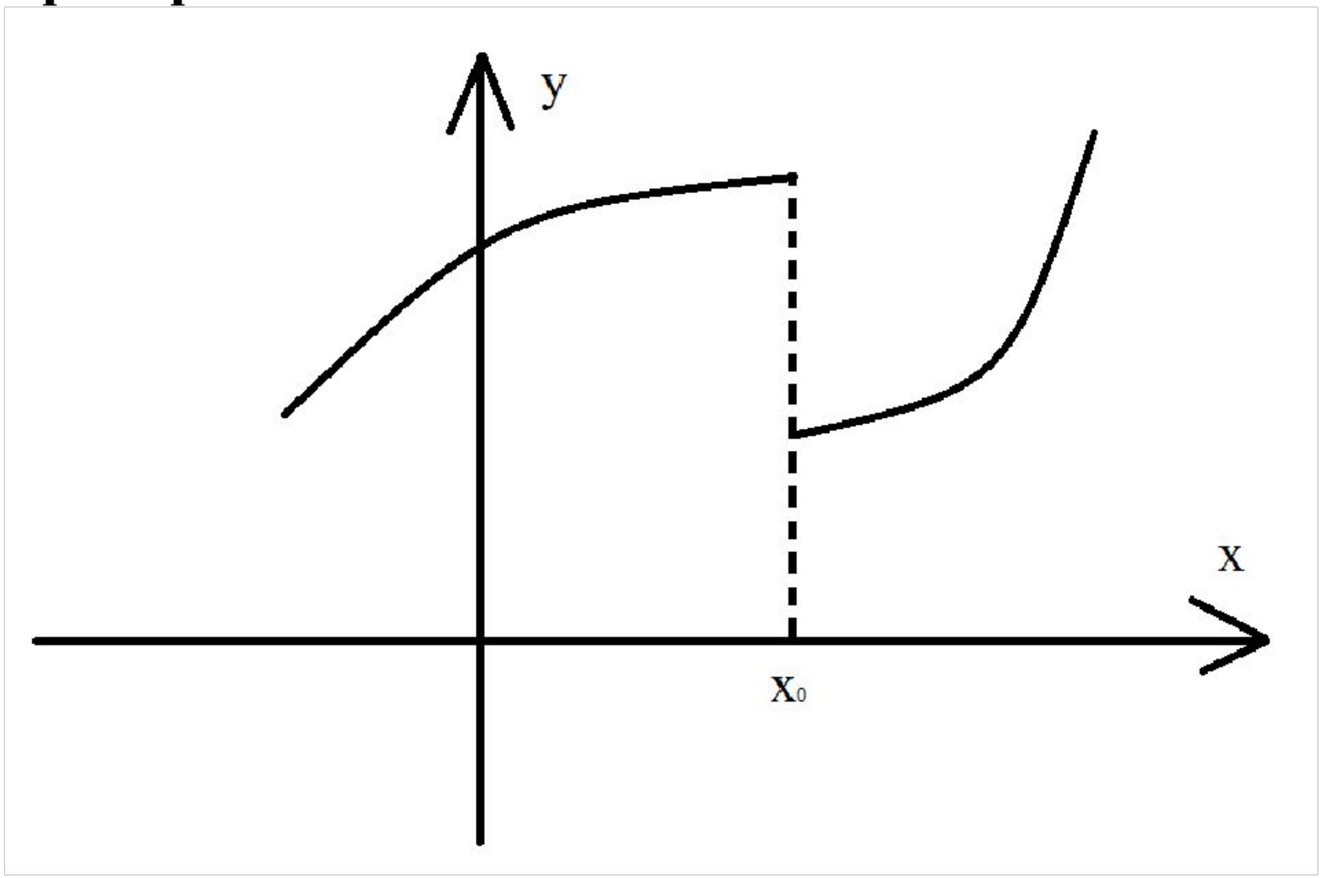
2-е следствие: $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n$ непрерывны на всей числовой оси как конечная сумма одночленов

3-е следствие: рациональная функция $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ является непрерывной в своей области определения.

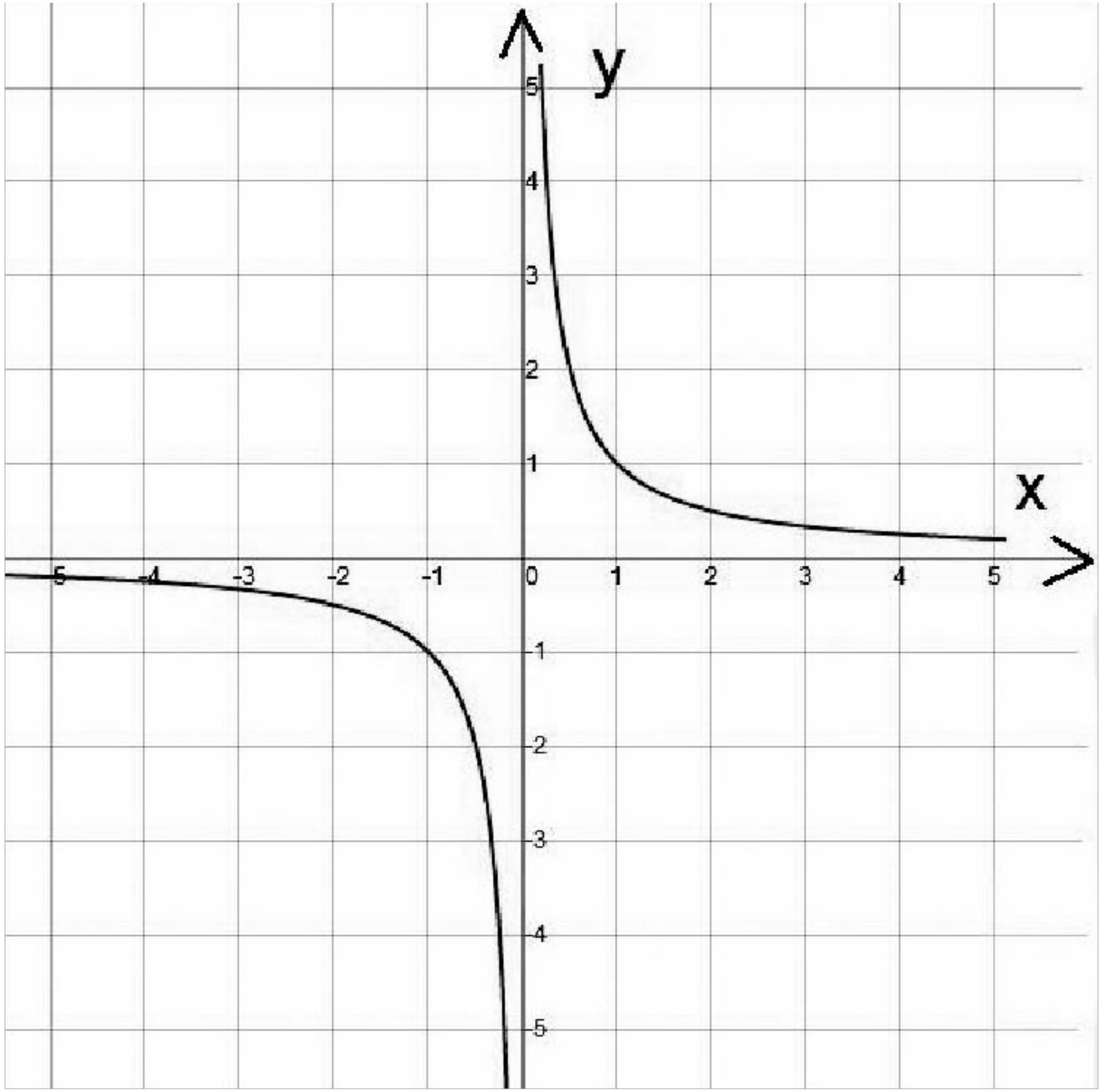
Точки разрыва

Df 1. Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Точка $x_0 \in D(f)$ называется точкой разрыва этой функции, если в данной точке функция не является непрерывной. Точками разрыва будем также называть точки которые не принадлежат $D(f)$, однозначно функция определена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

Примеры.

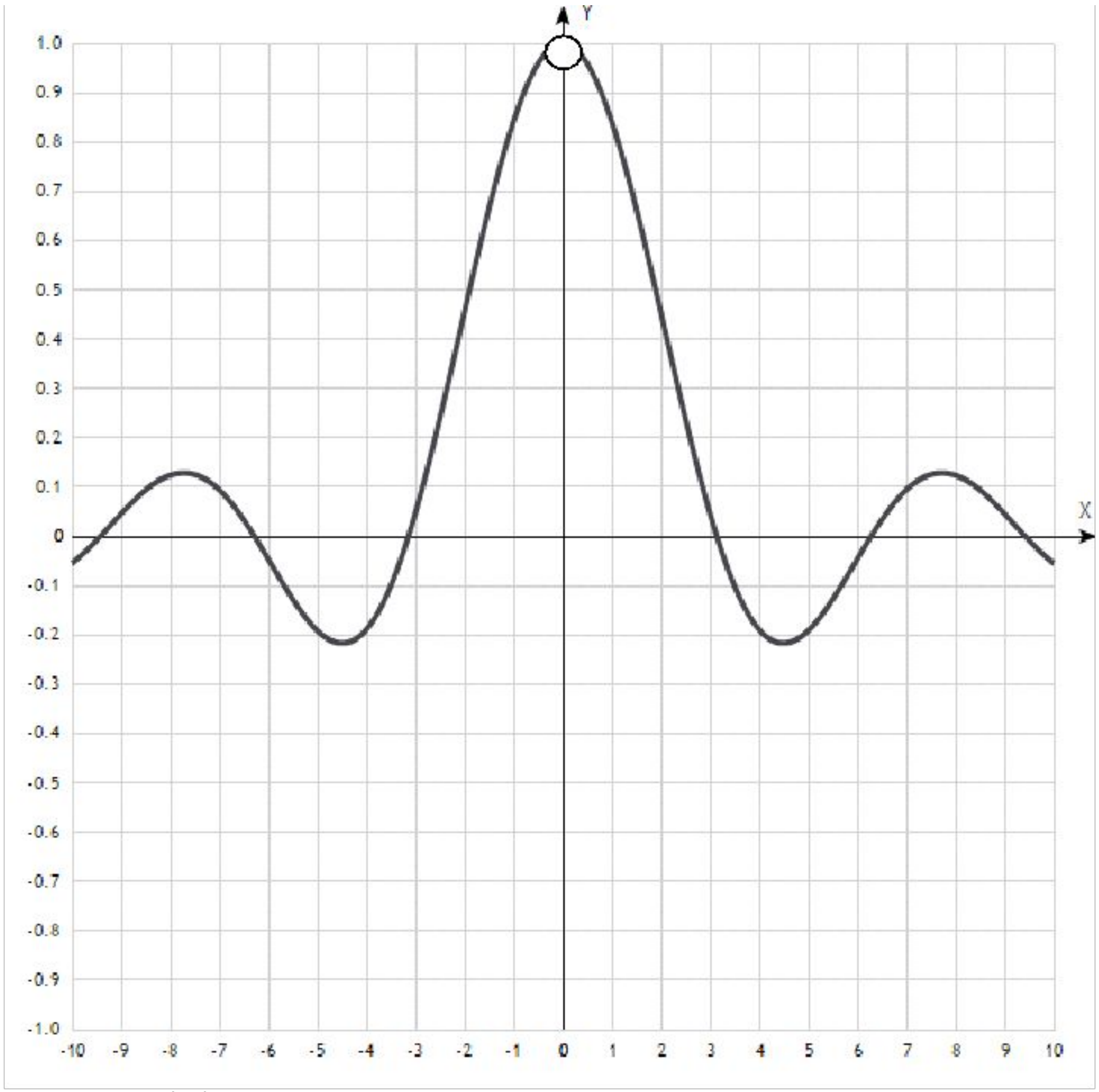


$x_0 = 0$ – точка разрыва



$$y = \frac{1}{x}$$

$x_0 = 0$ – точка разрыва



$$y = \frac{sin(x)}{x}$$

$x_0 = 0$ – точка разрыва

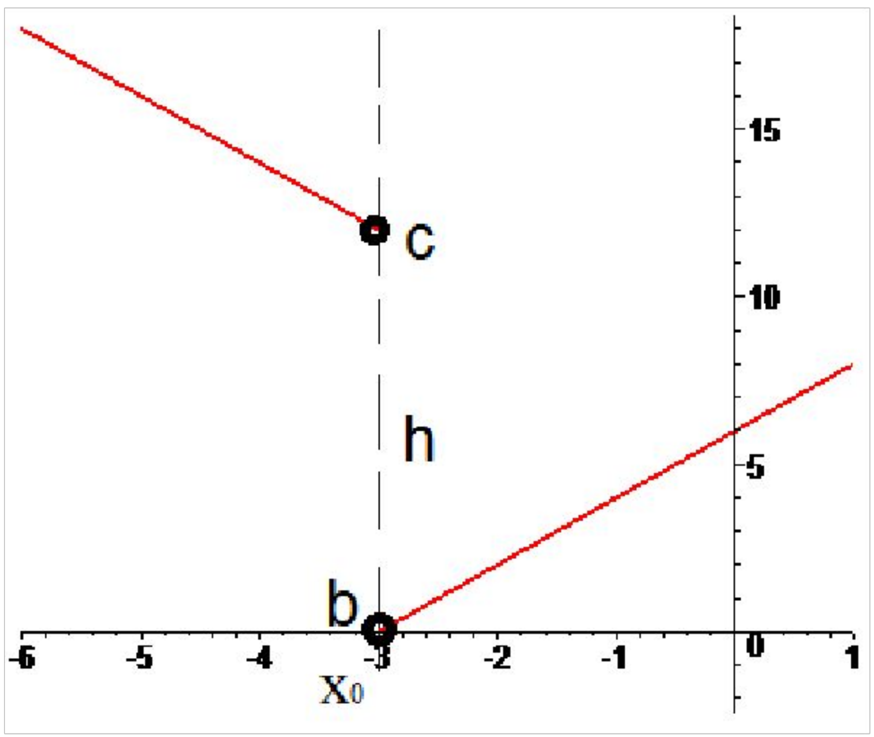
Классификация точек разрыва

Тот факт, что функция непрерывна в точке x_0 как мы уже знаем, в точности означает, что $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x)$ (*). Таким образом, тот факт, что x_0 – точка разрыва означает, что хотя бы одно из приведенных равенств (*) нарушено.

Точки разрыва I-го рода.

Df 2. Пусть x_0 – точка разрыва функции $y = f(x)$, она называется точкой разрыва I рода если существуют конечные односторонние пределы функции в этой точке

$\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$, при этом число $h = \left| \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \right|$ называется скачком.



$h = c - b$

Точки разрыва I рода бывают 2-х видов:

а) $h \neq 0$ – x_0 – точка разрыва со скачком

б) $h = 0$ – x_0 – точка устранимого разрыва

Пример $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

$x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ - существует $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} f(x)$

Однако, x_0 – точка разрыва. Грубо говоря, одной единственной точкой можно «заткнуть дырку» в графике.

В общем случае, в случае устранимого разрыва функцию $f(x)$ можно доопределить в точке x_0 так, что она станет непрерывной, а именно:

$$F(x) = \left[\begin{array}{l} f(x): x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x): x = x_0 \end{array} \right.$$

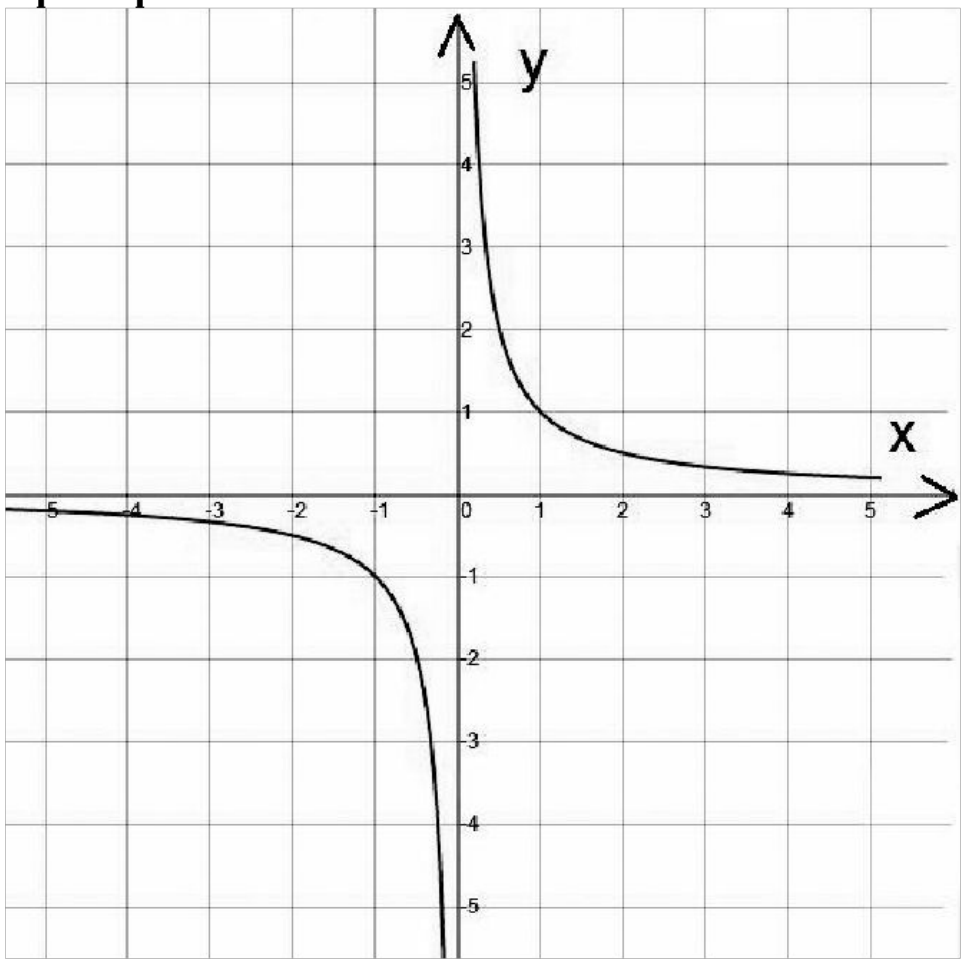
В нашем примере:

$$F(x) = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\sin x}{x}: x \neq 0 \\ 1: x = 0 \end{array} \right.$$

Разрывы второго рода.

Df. Пусть задана функция $y = f(x)$. Точка разрыва x_0 этой функции называется точкой разрыва II рода, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ равен бесконечности, либо вовсе не существует.

Пример 1.



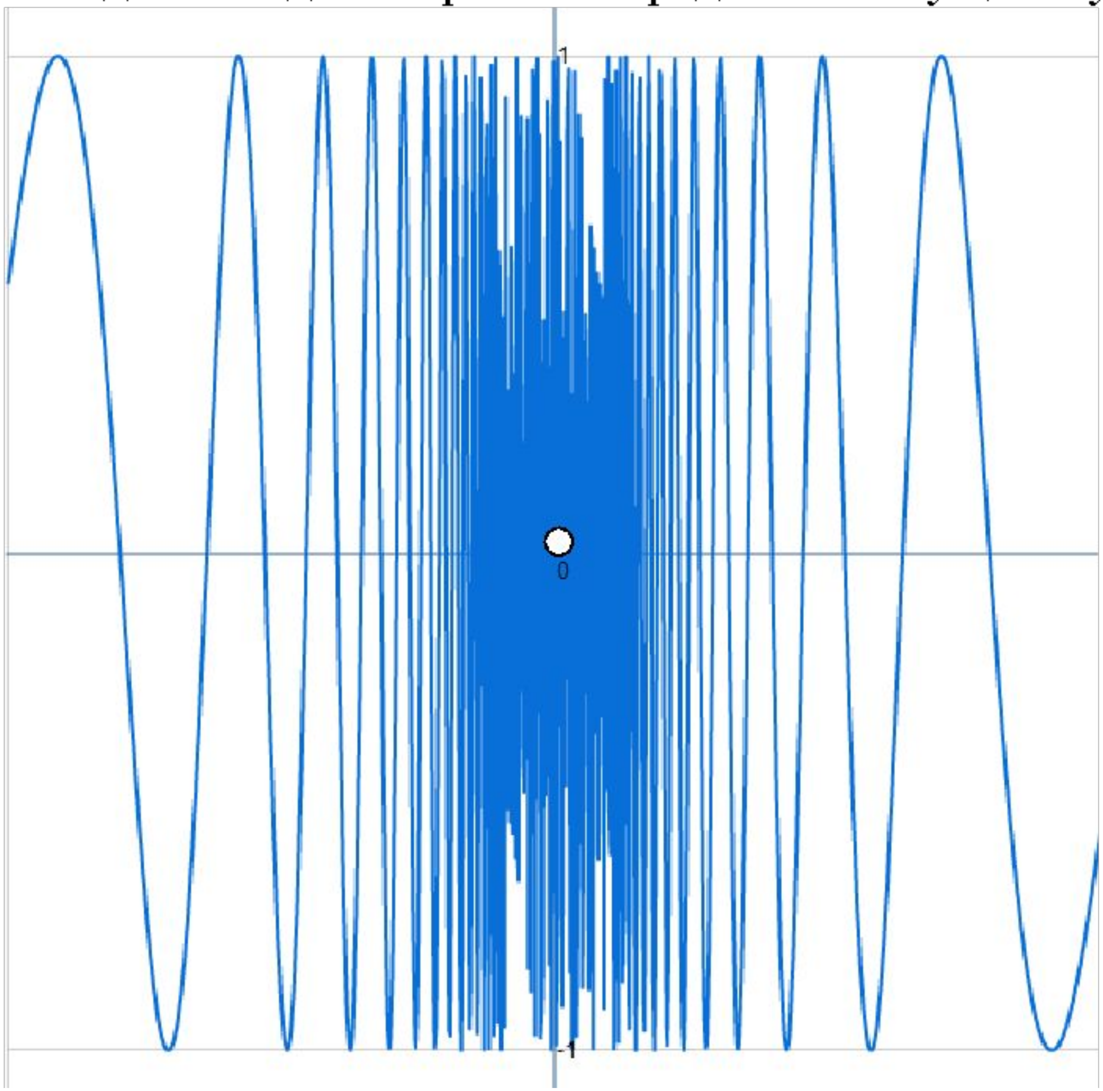
$y = \dfrac{1}{x}$. $x_0=0$ – точка разрыва II рода. $\lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{1}{x} = -\infty$

Пример 2.

$$f(x) = sin\frac{1}{x}$$

x_0=0 – точка разрыва II рода

Ни один из односторонних пределов не существует.



Замечание:

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0. Это означает, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$$

Иными словами, мы получили следующее отношение $\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) \left[\lim f = f \lim\right]$

Получили правило, которое лежит в основе самой непрерывности: можно переходить к пределу под знаком непрерывной функции.

Пример.

$$\lim_{x \to x_0} e^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}$$

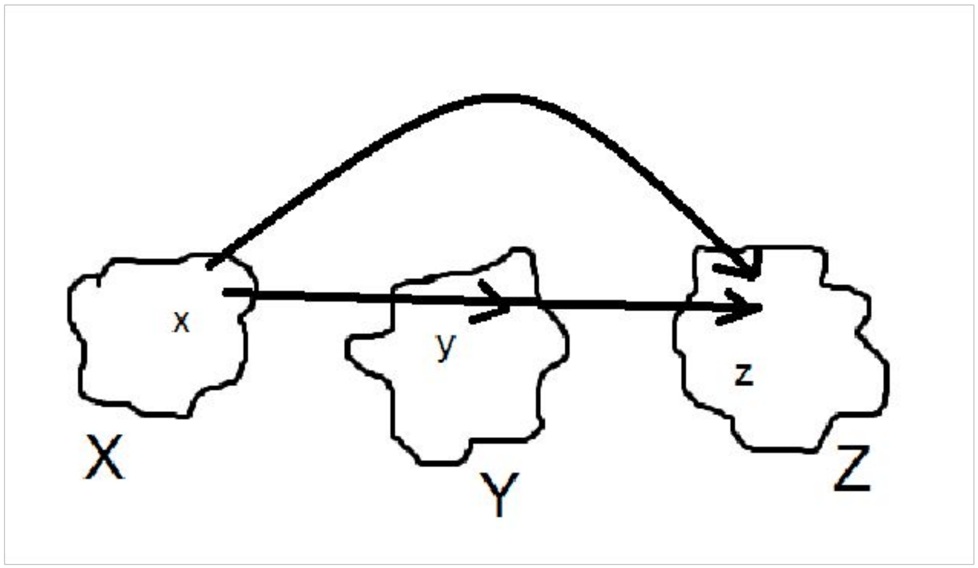
$$\lim_{x \to x_0} tg\varphi(x) = tg \lim_{x \to x_0} \varphi(x)$$

Непрерывность композиции функций.

Df 1. Пусть заданы 2 функции: $f : x \to Y$, $g : Y \to Z$ (X, Y, Z – множества произвольной природы), функция $H =: X \to Z$ задана произвольно.

$\forall x \in X\left(h(x) = g(f(x))\right)$ называется композицией функций и обозначается $h = g^{o} f$ (g после f)

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$



Композиция – сквозное отображение из x в z.

f называется внутренним отображением композиции, а g – внешним отображением композиции.

По-другому композиция называется сложной функцией.

Пример 1.

$y = \sin x$

$z = y^2$

$z = y^2$ - внешняя

$y = \sin x$ - внутренняя

Пример 2.

$y = x^2$

$z = \sin y$

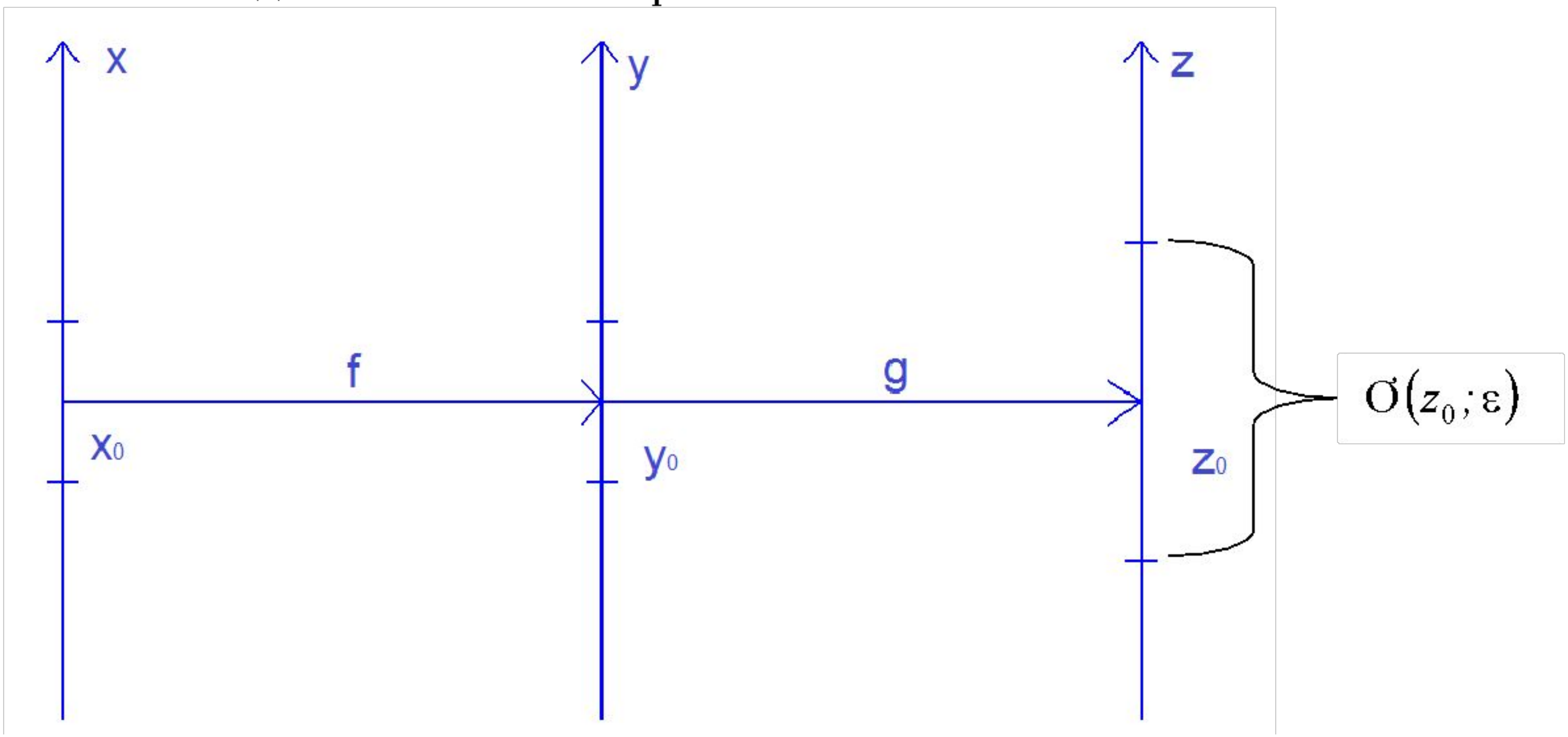
$z = \sin\left(x^2\right)$

$z = \sin y$ - внешняя

Th (о непрерывности композиции функций)

Пусть имеем две функции $f : x\longrightarrow Y$, g:$Y\longrightarrow Z$ (числовые) и пусть функция f непрерывна в точке $x_0 \in X$, функция g непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, откуда композиция $h = g^o f$ непрерывна в точке x_0 (иными словами: композиция непрерывных функций непрерывна.

Схема доказательства с картинкой



Надо показать, что для $\forall \mho(z_0;\varepsilon) \exists \mho(x_0;\delta)$ $(h\,\mho(x_0;\delta) \subset \mho(z_0;\varepsilon))$

g непрерывна в точке $y_0 \Rightarrow \exists\ \mho(y_0;\delta_1)$ $(g\,\mho(y_0;\delta_1) \subset \mho(z_0;\varepsilon))$

f непрерывна в точке x_0, $\Rightarrow \exists\ \mho(x_0;\delta)$ $(f\,\mho(x_0;\delta) \subset \mho(y_0;\delta_1))$

$(h\,\mho(x_0;\delta) \subset \mho(z_0;\varepsilon))$

Мы рассмотрели композицию двух функций. Может быть композиция большего числа функций.

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\varphi} T$$

$$h = \varphi^{o} g^{o} f$$

Замечание:

Композиция любого конечного числа непрерывных функций непрерывна.

10.3. Сравнение функций

Пусть f(x) и φ(x) - определены в некоторой $\tilde{U}(x_0)$, проколотой окрестности т. x_0.

Определение. Функций ограниченных в сравнении

Если $\exists c>0$ и $\exists \delta>0$: для $\forall x$ из $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|\le c\cdot|\varphi(x)|$, то говорят, что функция f ограничена в окрестности т. x_0 по сравнению с функцией φ и пишут $f(x)=O(\varphi(x))$, $x\to x_0$.

Определение. Функций одного порядка

Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f}{\varphi}=K(K\ne 1, K\ne 0)$ то говорят, что функции f и φ- одного порядка, $x\to x_0$ и пишут f φ, $x\to x_0$.

Определение. Функций эквивалентных

Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f}{\varphi}=1$, то говорят, что функции f и φ- эквивалентны при $x\to x_0$ и обозначают $f\sim\varphi$, $x\to x_0$.

Определение. Функций бесконечно малых в сравнении

Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f}{\varphi}=0$, то говорят, что функция f является бесконечно малой по отношению к функции φ при $x\to x_0$ и пишут $f=o(\varphi)$, $x\to x_0$.

Примечание.

Точка x_0 может быть и бесконечно удаленной.

Примеры:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0.\Rightarrow x^2=o(x),\quad x\to 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=0\Rightarrow x=o(x^2),\quad x\to\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{3x^2+2}=\frac{2}{3}\Rightarrow 2x^2+3 \qquad 3x^2+2,\quad x\to\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow x\sim\sin x,\quad x\to 0$$

Пусть рассматриваемые функции бесконечно малые при $x\to x_0$

$\alpha(x)=o(1),\ \ \beta(x)=o(1),\ \ \ \alpha_1(x)=o(1),\ \ \beta_1(x)=o(1),\ \ \ \ x\to x_0.$

Теоремы о замене эквивалентных бесконечно малых функций при нахождении пределов.

Теорема. О пределе частного.

Если $\alpha \sim \alpha_1$, $x \to x_0$, $\beta \sim \beta_1$, $x \to x_0$, и $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$, тогда $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Доказательство.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \alpha_1}{\alpha_1 \cdot \beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta} \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Теорема. Об эквивалентности.

Если $f \sim g$, $x \to x_0$, $g \sim \varphi$, $x \to x_0$, то $f \sim \varphi$, $x \to x_0$.

Пример.

$$\left.\begin{array}{r} \sin x \sim x,\ x \to 0 \\ \operatorname{tg} x \sim x,\ x \to 0 \end{array}\right| \to x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x,\ x \to 0.$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1 \overset{\text{def}}{\Rightarrow}$ $\alpha\sim\sin\alpha,\ \ \alpha\to 0.$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\alpha}=1\Rightarrow$ $\alpha\sim\mathrm{tg}\alpha,\ \ \alpha\to 0.$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}=1\Rightarrow$ $\alpha\sim\arcsin\alpha,\ \ \alpha\to 0.$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\alpha}{\alpha}=\left\{\frac{0}{0},\ \begin{matrix} t=\mathrm{arctg}\alpha\\ \alpha=\mathrm{tg}\ t\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\mathrm{tg}\ t}=1\Rightarrow$ $\mathrm{arctg}\ \alpha\sim\alpha,\ \ \alpha\to 0.$

$\ln(\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}})=\ln e=1.$ Тогда

$\lim\limits_{\alpha\to 0}(\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}})=1;\ \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1\Rightarrow$ $\alpha\sim\ln(1+\alpha),\ \alpha\to 0$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)\cdot\ln a}{\alpha\cdot\ln a}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{(\log_{\text{Б}}(1+\alpha))\cdot\ln a}{\alpha}=1\Rightarrow$ $\ln a\cdot\log_{\text{Б}}(1+\alpha)\sim\alpha,\ \alpha\to 0\cdot$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=\left\{\begin{matrix}\ln(1+\alpha)=t,\ (1+\alpha)=e^t\\ \alpha=e^t-1,\ \alpha\to 0,\ t\to 0\end{matrix}.\right\}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}=1\Rightarrow e^t-1\sim t,\ t\to 0.$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha-1}{\alpha}=\left\{\begin{matrix}a^\alpha-1=t,\ t\to 0\\ \alpha=\log_a(1+t)\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot\ln a}{(\log_a(1+t)\cdot\ln a}=\ln a.$$

Значит, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha-1}{\ln a\cdot\alpha}=1\Rightarrow$ $\frac{a^\alpha-1}{\ln a}\sim\alpha,\ \ \alpha\to 0.$

Полезно помнить, что $\alpha\sim\frac{(1+\alpha)^m-1}{m},\ \alpha\to 0.$