Логика предикатов

Понятие предиката

Логика предикатов расчленяет элементарное высказывание на

- Субъект – это то, о чем что-то утверждается в высказывании
- Предикат – это то, что утверждается о субъекте

Например, в высказывании «7 – простое число», «7» – субъект, «простое число» – предикат.

Понятие предиката

- Одноместным предикатом P(x) называется произвольная функция переменного x, определенная на множестве M и принимающая значения из множества {1,0}.
- Множество M, на котором определен предикат P(x), называется областью определения предиката.
- Множество всех элементов $\mathrm{x} \in \mathrm{M}$, при которых предикат принимает значение «истина», называется множеством истинности предиката P(x) , то есть множество истинности предиката P(x) – это множество $I_P = \{\mathrm{x}\colon \mathrm{x} \in \mathrm{M}, \mathrm{P}(\mathrm{x}) = 1\}$.
- Предикат P(x), определенный на множестве M, называется тождественно истинным (тождественно ложным), если $I_P = \mathrm{M}$ $(I_P = \emptyset)$

Понятие предиката

- Естественным обобщением понятия одноместного предиката является понятие многоместного предиката, с помощью которого выражаются отношения между предметами.
- Примером бинарного отношения (отношения между двумя предметами) является отношение «меньше». Пусть это отношение введено на множестве Z целых чисел. Оно может быть охарактеризовано высказывательной формой «x<y », где $\mathrm{x}, y \in Z$, то есть является функцией двух переменных P(x, y), определенной на множестве $Z \times Z$ с множеством значений {1,0}.
- Определение. Двухместным предикатом P(x, y) называется функция двух переменных x и y, определенная на множестве $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 \times \mathrm{M}_2$ И принимающая значения из множества {1,0}.

Логические операции над предикатами

- Предикаты, так же, как высказывания. принимают два значения и и л (1, 0), поэтому к ним применимы все операции логики высказываний.
- Пусть на некотором множестве M определены два предиката P(x) и Q(x)

Логические операции над предикатами

- Определение 1. Конъюнкцией двух предикатов P(x) и Q(x) называется новый предикат P(x)& Q(x), который принимает значение «истина» при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов принимает значение «истина» и принимает значение «ложь» во всех остальных случаях.
- Очевидно, что областью истинности предиката P(x)&Q(x) является общая часть областей истинности предикатов P(x) и Q(x) , то есть пересечение $I_P \cap I_Q$
- Так, например, для предикатов P(x): «x – четное число» и Q(x): «x кратно 3» конъюнкцией P(x)&Q(x) является предикат «x – четное число» и «x кратно 3», то есть предикат «x делится на 6».

Логические операции над предикатами

- Определение 2. Дизъюнкцией двух предикатов P(x) и Q(x) называется новый предикат P(x) ∨ Q(x), который принимает значение «ложь» при тех и только тех значениях $x \in$ M, при которых каждый из предикатов принимает значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.
- Ясно, что область истинности предиката P(x) ∨ Q(x) является объединение областей истинности предикатов P(x) и Q(x), то есть объединение $I_P \cup I_Q$.

Логические операции над предикатами

- Определение 3. Отрицанием предиката P(x) называется новый предикат P(x), который принимает значение «истина» при всех значениях $x \in \mathrm{M}$, при которых предикат P(x) принимает значение «ложь», и принимает значение «ложь» при тех значениях $x \in \mathrm{M}$, при которых предикат P(x) принимает значение «истина».
- Из этого определения следует, что $I_{\bar{P}} = M \backslash I_P = \mathrm{C} I_P$.

Логические операции над предикатами

- Определение 4. Импликацией предикатов P(x) и Q(x) называется новый предикат P(x) → Q(x), который является ложным при тех и только тех значениях $x \in, \mathrm{M}$, при которых одновременно P(x) принимает значение «истина», а Q(x) – значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.
- Так как при каждом фиксированном $x \in \mathrm{M}$ справедлива равносильность $\mathrm{P(x)} \rightarrow Q(x) \equiv \overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x}) \vee Q(x)$, то
- $I_{P \rightarrow Q} = CI_P \cup I_Q$

Кванторные операции

- Пусть имеется предикат P(x), определенный на множестве M. Если a – некоторый элемент из множества M, то подстановка его вместо x в предикат P(x) превращает этот предикат в высказывание P(a). Такое высказывание называется единичным.
- Наряду с образованием из предикатов единичных высказываний в логике предикатов рассматривается еще две операции, которые превращают одноместный предикат в высказывание.

Кванторные операции

1. Квантор всеобщности

- Пусть P(x) – предикат, определенный на множестве М. Под выражением $\forall x P(x)$ понимают высказывание истинное, когда P(x) истинно для каждого элемента x из множества М и ложное в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x.
- Соответствующее ему словесное выражение будет «Для всякого x P(x) истинно»
- Символ ∀ называют квантором всеобщности.
- Переменную x в предикате P(x) называют свободной (ей можно придавать различные значения из М)
- в высказывании $\forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x})$ переменную x называют связанной квантором ∀ .

Кванторные операции

2. Квантор существования

- Пусть P(x) – предикат определенный на множестве M.
- Под выражением $\exists \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x})$ понимают высказывание, которое является истинным, если существует элемент $x \in \mathrm{M}$, для которого P(x) истинно, и ложным в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x.
- Соответствующее ему словесное выражение будет: «Существует x, при котором P(x) истинно».
- Символ ∃ называют квантором существования.
- В высказывании $\exists \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x})$ переменная x связана квантором ∃.

Кванторные операции

- Кванторные операции применяются и к многоместным предикатам:
- На множестве М задан двухместный предикат P(x,y). Применение кванторной операции к предикату P(x,y) по переменной x ставит в соответствие двухместному предикату P(x,y) одноместный предикат $\forall x P(x, y)$ (или одноместный предикат $\exists \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}, y)$), зависящий от переменной y и не зависящий от переменной x.
- К ним можно применить кванторные операции по переменной y, которые приведут уже высказываниям следующих видов:

$$\forall y \forall x\ P(x, y),\ \exists y \forall x\ P(x, y)\ ,\ \forall y \exists x\ P(x, y),\ \exists y \exists x\ P(x, y)$$

Кванторные операции

- Например, рассмотрим предикат P(x, y): «x: y», определенный на множестве N. Применение кванторных операций к предикату P(x, y) приводит к восьми возможным высказываниям:
- 1. $\forall y \forall x\, P(x, y)$– «Для всякого y и для всякого x y является делителем x».
- 2. $\exists y \forall x\, P(x, y)$– «Существует y, которое является делителем всякого x».
- 3. $\forall y \exists x\, P(x, y)$, – «Для всякого y существует x такое, что x делится на y».
- 4. $\exists y \exists x\, P(x, y)$ – «Существует y и существует x такие, что y является делителем x».

Кванторные операции

- 5. $\forall x\ \forall y P(x, y)$ – «Для всякого х и для всякого у у является делителем х».
- 6. $\forall x \exists y\ P(x, y)$ – «Для всякого х существует такое у, что х делится на у».
- 7. $\exists x \forall y\ P(x, y)$– «Существует х и существует у такие, что у является делителем х».
- 8. $\exists x\ \exists y P(x, y)$ – «Существует х такое, что для всякого у х делится на у».

Легко видеть, что высказывания 1, 5 и 8 ложны, а высказывания 2, 3, 4, 6 и 7 истинны.

Кванторные операции

- Рассмотрим предикат P(x), определенный на множестве $\mathrm{M} = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_n,\}$, содержащем конечное число элементов. Если предикат P(x) является тождественно истинным, то истинными будут высказывания $P(\mathrm{a}_1), P(\mathrm{a}_2), \ldots, P(\mathrm{a}_n)$. При этом истинными будут высказывание $\forall x\, P(\mathrm{x})$ и конъюнкция $P(\mathrm{a}_1) \& P(\mathrm{a}_2) \& \ldots \& P(\mathrm{a}_n)$.
- Если же хотя бы для одного элемента $a_k \in \mathrm{M}$ $\mathrm{P}(a_k)$ окажется ложным, то ложными будут высказывание $\forall x\, P(\mathrm{x})$ и конъюнкция $P(\mathrm{a}_1) \& P(\mathrm{a}_2) \& \ldots \& P(\mathrm{a}_n)$, следовательно, справедлива равносильность $\forall x\, P(\mathrm{x}) = P(\mathrm{a}_1) \& P(\mathrm{a}_2) \& \ldots \& P(\mathrm{a}_n)$.

Кванторные операции

- Нетрудно показать, что справедлива и равносильность

$$\exists x\, P(\mathrm{x}) \;=\; P(\mathrm{a}_1) \vee P(\mathrm{a}_2\,) \vee \ldots \vee\; P(\mathrm{a}_n).$$

- Отсюда видно, что кванторные операции можно рассматривать как обобщение операций конъюнкции и дизъюнкции на случай бесконечных областей.

Понятие формулы логики предикатов

В логике предикатов будем пользоваться следующей символикой:

- 1. Символы p, q, r, ... – переменные высказывания, принимающие два значения: 1 – истина, 0 – ложь.
- 2. Предметные переменные – x, y, z,..., которые пробегают значения из некоторого множества M; x^0, y^0, z^0,... – предметные константы. то есть значения предметных переменных.
- 3. $\mathrm{P}(\cdot), F(\cdot)$ – одноместные предикатные переменные; $Q(\cdot,\cdot,\dots,\cdot)$, $R(\cdot,\cdot,\dots,\cdot)$ – n-местные предикатные переменные $Q(\cdot,\cdot,\dots,\cdot)$, $R(\cdot,\cdot\cdots,\cdot)$ – символы постоянных предикатов.
- 4. Символы логических операций: &, ∀, →, –.
- 5. Символы кванторных операций: $\forall x, \exists x$.
- 6. Вспомогательные символы: скобки, запятые.

Понятие формулы логики предикатов

Определение формулы логики предикатов:

- 1. Каждое высказывание как переменное, так и постоянное, является формулой (элементарной).
- 2. Если $F(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$ – n-местная предикатная переменная или постоянный предикат, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – предметные переменные или предметные постоянные, не обязательно все различные, то $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть формула. В этой формуле предметные переменные являются свободными. Формулы вида 1 и 2 называются элементарными.
- 3. Если A и B – формулы, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой свободной, то A ∨ B, A& B, A→B есть формулы. В этих формулах те переменные, которые в исходных формулах были свободными, являются свободными, а те, которые были связанными, являются связанными.

Понятие формулы логики предикатов

Определение формулы логики предикатов:

- 4. Если A – формула, то $\overline{\mathrm{A}}$ – формула, и характер предметных переменных при переходе от формулы A к формуле $\overline{\mathrm{A}}$ не меняется.
- 5. Если A(*x*) – формула, в которую предметная переменная x входит свободно, то слова $\forall \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x})$ и $\exists \mathrm{x}\, \mathrm{A}(\mathrm{x})$ являются формулами, причем предметная переменная в них входит связанно.
- 6. Никакая другая строка символов формулой не является.

Из определения формулы логики предикатов ясно, что всякая формула алгебры высказываний является формулой логики предикатов.

Значение формулы логики предикатов

- О логическом значении формулы логики предикатов можно говорить лишь тогда, когда задано множество M, на котором определены входящие в эту формулу предикаты.
- Логическое значение формулы логики предикатов зависит от значений трех видов переменных:

1) значений входящих в формулу переменных высказываний.
2) значений свободных предметных переменных из множества M
3) значений предикатных переменных

- При конкретных значениях каждого из трех видов переменных формула логики предикатов становится высказыванием, имеющим истинное или ложное значение.

Равносильные формулы логики предикатов

- Определение 1. Две формулы логики предикатов А и В называются равносильными на области М, если они принимают одинаковые логические значения при всех значениях входящих в них переменных, отнесенных к области М.
- Определение 2. Две формулы логики предикатов А и В называются равносильными, если они равносильны на всякой области.
- Для равносильных формул принято обозначение $\mathrm{A} \equiv \mathrm{B}$.

Равносильные формулы логики предикатов

Пусть A(x) и B(x) – переменные предикаты, а C – переменное высказывание. Тогда:

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$
2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$
3. $\forall x A(x) \ \equiv \ \exists x A(x)$
4. $\exists x A(x) \ \overline{\exists x \overline{A(x)}}$
5. $\forall x A(x) \& \forall x B(x) \ \equiv \ \forall \mathrm{x}[\mathrm{A}(\mathrm{x}) \& B(\mathrm{x})]$
6. $C \& \forall x B(x)) \ \equiv \ \forall \mathrm{x}[C \& B(\mathrm{x})]$
7. $C \vee \forall \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x}) \ \equiv \forall \mathrm{x}[C \vee \mathrm{B}(\mathrm{x})]$
8. $C \to \forall x B(x) \ \equiv \ \forall \mathrm{x}[C \to B(\mathrm{x}$
9. $\forall \mathrm{x}[\mathrm{B}(\mathrm{x}) \to C\,] \ \equiv \ \exists x \mathrm{B}(\mathrm{x}) \to C$
10. $\exists \mathrm{x}[\mathrm{A}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{B}(\mathrm{x})] \ \equiv \ \exists \mathrm{x} \mathrm{A}(\mathrm{x}) \vee \exists \mathrm{x} \mathrm{B}(\mathrm{x})$
11. $\exists \mathrm{x}[C \vee \mathrm{B}(\mathrm{x})] \ \equiv C \vee \exists \mathrm{x}\text{в}(\mathrm{x})$
12. $\exists \mathrm{x}[C \& B(\mathrm{x})] \equiv C \& \exists \mathrm{x} B(\mathrm{x})$
13. $\exists \mathrm{x} \mathrm{A}(\mathrm{x}) \& \exists \mathrm{y} \mathrm{B}(\mathrm{y}) \equiv \ \exists \mathrm{x} \exists \mathrm{y}[\mathrm{A}(\mathrm{x}) \& \mathrm{B}(\mathrm{y})]$
14. $\exists \mathrm{x}[C \to B(\mathrm{x})]; \equiv \mathrm{C} \ \to B(\mathrm{x})$
15. $\exists x[\mathrm{B}(x) \to C] \equiv \ \forall x B(x) \to C.$

Равносильные формулы логики предикатов

- Формула $\forall \mathrm{x}[A(x) \vee B(x)]$ не равносильна формуле $\forall \mathrm{x} A(x) \vee \forall \mathrm{x} B(x)$
- Формула $\exists x[\mathrm{A}(x) \& \mathrm{B}(x)]$ не равносильна формуле $\exists x \mathrm{A}(x) \& \exists x \mathrm{B}(x)$.

Справедливы равносильности:

- $\forall \mathrm{x} \mathrm{A}(\mathrm{x}) \ \vee \forall \mathrm{x} B(\mathrm{x})) \ \equiv \forall \mathrm{x}\ \mathrm{A}(y) \ \vee \ \forall \mathrm{x}\ B(y)$
- $\forall \mathrm{x}(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \ \vee \forall y B(y)) \ \equiv \forall \mathrm{x} \forall y(\ \mathrm{A}(\mathrm{x}) \vee \ B(y))$
- $\exists \mathrm{x} \mathrm{A}(\mathrm{x}) \& \exists \mathrm{x} B(\mathrm{x})) \ \equiv \exists x\ \mathrm{A}(\mathrm{x})\ \&\ \exists y\ B(y) \equiv \exists \mathrm{x}\big(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \& \exists y B(y)\big)) \equiv$

$\equiv \exists x\ \exists y(\mathrm{A}(\mathrm{x}) \&\ B(y))$

Предваренная нормальная форма

- Говорят, что формула логики предикатов имеет нормальную форму, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам.
- Используя равносильности алгебры высказываний и логики предикатов, каждую формулу логики предикатов можно привести к нормальной форме.

Например:

$$\left(\exists x\, P(x) \to \forall y Q(y)\right) \to R(z) \equiv \overline{\overline{\exists x P(x)} \vee \forall y Q(y)} \vee R(z) \equiv$$

$$\equiv \overline{\overline{\exists x P(x)}}\,\&\,\overline{\forall y Q(y)} \vee R(z) \equiv \exists x P(x)\,\&\,\exists y\, \overline{Q(y)} \vee R(z).$$

Предваренная нормальная форма

- Среди нормальных форм формул логики предикатов важное значение имеют так называемые предваренные нормальные формы (п.н.ф.).
- В предваренных нормальных формах кванторные операции либо полностью отсутствуют, либо они используются после всех операций алгебры логики, то есть предваренная нормальная форма формулы логики предикатов имеет вид: $(\sigma x_1)(\sigma x_2)\ldots(\sigma x_n)\mathrm{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ n \le m,$

где под символом(σx_i) понимается один из кванторов $\forall x_i$ или $\exists x_i$ а формула А кванторов не содержит.

Предваренная нормальная форма

- Теорема

Всякая формула логики предикатов может быть приведена к предваренной нормальной форме.

- Пример:

$$\mathrm{A} \equiv \exists x \forall y\, p(x,y) \vee \exists x \forall y\, \overline{Q(x,y)} \equiv \exists x[\forall y \mathrm{P}(x,\mathrm{y}) \vee \forall y\, \overline{Q(x,y)}] \equiv$$
$$\equiv \exists x[\forall\, y\, \mathrm{P}(x,\mathrm{y}) \vee \forall z\, \overline{Q(x,z)}] \equiv \forall x \forall y \forall z(P(x,y) \vee \overline{Q(x,z)})$$