Численное дифференцирование

Рассмотрим функцию ***y=f(x).***
По определению производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Численное дифференцирование

Рассмотрим функцию ***y=f(x)***.
По определению производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Из определения предела получаем приближенное равенство

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Численное дифференцирование

Рассмотрим функцию ***y=f(x)***.
По определению производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Из определения предела получаем приближенное равенство

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Рассмотрим функцию ***y=f(x)***, заданную на интервале *[a;b]*.

Разделим интервал *[a;b]* на ***n*** равных частей.

Занумеруем полученные точки x_i начиная с нулевого номера

$$a=x_o<x_1< \dots <x_n=b.$$

Длину каждого интервала будем называть ***шагом*** *h=(b-a)/n*,

а полученные точки $\{x_i\}$ и шаг *h* ***разбиением*** интервала *[a;b]*.

Численное дифференцирование

Рассмотрим функцию ***y=f(x)***.
По определению производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Из определения предела получаем приближенное равенство

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Рассмотрим функцию ***y=f(x)***, заданную на интервале *[a;b]*.
Разделим интервал *[a;b]* на ***n*** равных частей.
Занумеруем полученные точки x_i начиная с нулевого номера $a=x_o<x_1< \dots <x_n=b$.
Длину каждого интервала будем называть ***шагом*** *h=(b-a)/n*,
а полученные точки $\{x_i\}$ и шаг *h* ***разбиением*** интервала *[a;b]*.

В каждой точке x_i вычислим значение функции $y_i = f(x_i)$.

Полученную пару $(x_i ; y_i)$ будем называть ***узлами*** функции.

•

По формуле приближенного значения производной

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(если возьмем x= x_i ; ***Δx=h***) имеем:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

или

$$y_i^{/} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \qquad (1)$$

Однако если возьмем $\Delta x = -h$, тогда получим

$$f'(x) \approx \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$$

Или

.

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

$$y_i^{/} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \qquad (2)$$

Аналогично взяв ***Δx = 2h***, получим

$$f'(x) \approx \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h}$$

или

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

$$y_i^{/} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \qquad (3)$$

Аналогично взяв **Δx = 2h**, получим

$$f'(x) \approx \frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}$$

или

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}$$

$$y_i^{/} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \qquad (3)$$

Полученные формулы (1) – (3) называются соответственно правой, левой и центральной ***разностными формулами*** численного дифференцирования для первой производной.

$$y_i^{/} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \qquad y_i^{/} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \qquad y_i^{/} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

i	x	y
0	0	0
1	0,1	0,01
2	0,2	0,04
3	0,3	0,09
4	0,4	0,16
5	0,5	0,25
6	0,6	0,36
7	0,7	0,49
8	0,8	0,64
9	0,9	0,81
10	1	1

Рассмотрим функцию y=f(x), заданную на интервале [0;1] и протабулированную с шагом 0,1.

Найдем первую производную этой функции.

Мы вывели для этого три различные формулы (1), (2) и (3).

$$y_i^/ = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

$$y_i^/ = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

$$y_i^/ = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

i	x	y	y'(левая)	y'(правая)	y'(центральная)
0	0	0		0,1	
1	0,1	0,01	0,1	0,3	0,2
2	0,2	0,04	0,3	0,5	0,4
3	0,3	0,09	0,5	0,7	0,6
4	0,4	0,16	0,7	0,9	0,8
5	0,5	0,25	0,9	1,1	1
6	0,6	0,36	1,1	1,3	1,2
7	0,7	0,49	1,3	1,5	1,4
8	0,8	0,64	1,5	1,7	1,6
9	0,9	0,81	1,7	1,9	1,8
10	1	1	1,9		

$$y_i^{/} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

$$y_i^{/} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

$$y_i^{/} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

i	x	y	y ‘ (левая)	y ‘ (правая)	y ‘ (центральная)	Y ’
0	0	0				
1	0,1	0,01				
2	0,2	0,04				
3	0,3	0,09	0,5	0,7	0,6	0,6
4	0,4	0,16				
5	0,5	0,25				
6	0,6	0,36				
7	0,7	0,49				
8	0,8	0,64				
9	0,9	0,81				
10	1	1				

$$y = x^2$$

$$y' = 2x$$

Аналогично определяются разностные формулы и для старших производных.

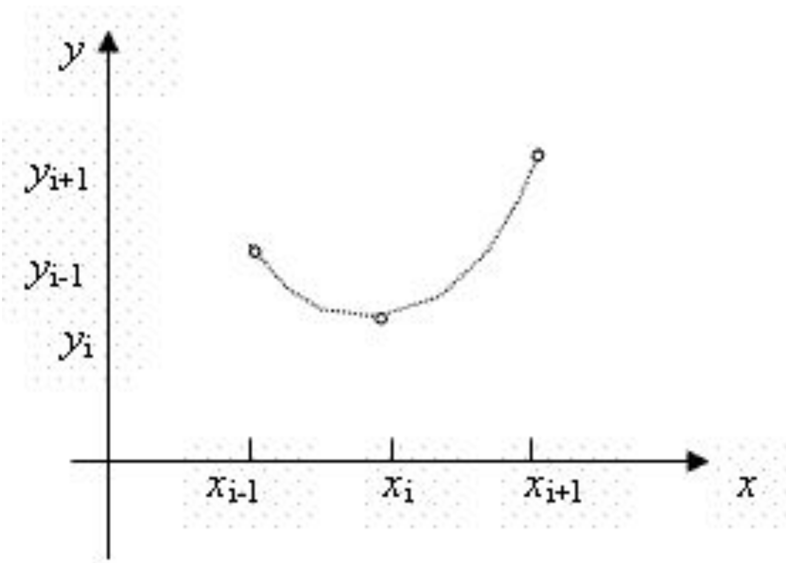
$$f''(x_i) = (f'(x_i))' = \frac{1}{h}(f'(x_i) - f'(x_{i-1})) = \frac{1}{h}\left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}\right) =$$

$$= \frac{1}{h^2}(f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))$$

Или

$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2}(f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))$$

$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2}\left(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}\right)$$



i	x	y	y''
0	0	0	
1	0,1	0,01	
2	0,2	0,04	2
3	0,3	0,09	
4	0,4	0,16	
5	0,5	0,25	
6	0,6	0,36	
7	0,7	0,49	
8	0,8	0,64	
9	0,9	0,81	
10	1	1	

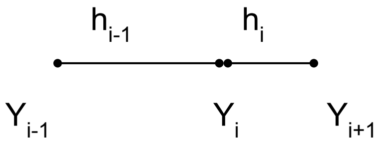
$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2}\left(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}\right)$$

$$y'' = \frac{0.09 - 2\cdot 0.04 + 0.01}{0.1^2} = \frac{0.02}{0.01} = 2$$

Неравномерная сетка

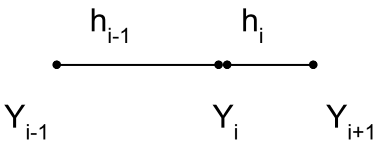
Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную узлами $M_i=(x_i\ ;\ y_i)$

Будем говорить, что функция задана неравномерной сеткой,
если $h_i=x_{i+1}-x_i \neq h_j=x_{j+1}-x_j$



Неравномерная сетка

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную узлами $M_i=(x_i\,;\,y_i)$
Будем говорить, что функция задана неравномерной сеткой,
если $h_i = x_{i+1} - x_i \neq h_j = x_{j+1} - x_j$



Тогда

$$y_i^{/} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$$

- *правая производная, где $h_i = x_{i+1} - x_i$*

$$y_i^{/} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

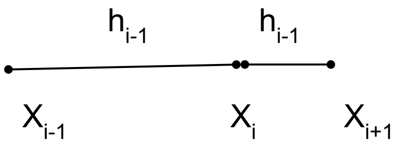
- *левая производная,*
- *где $h_{i-1} = x_i - x_{i-1}$*

$$y_i^{/} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}$$

- *центральная производная,*
- *где $h_i + h_{i-1} = x_{i+1} - x_{i-1}$*

Неравномерная сетка

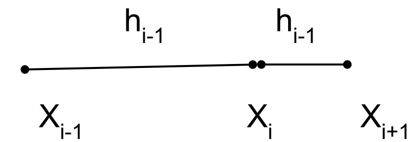
Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную узлами $M_i=(x_i\ ;\ y_i)$
Будем говорить, что функция задана неравномерной сеткой,
если $h_i = x_{i+1} - x_i \neq h_j = x_{j+1} - x_j$



Тогда $$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$$ *- правая производная, где $h_{i-1} = x_{i+1} - x_i$*

Неравномерная сетка

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную узлами $M_i=(x_i\,;\,y_i)$
Будем говорить, что функция задана неравномерной сеткой,
если $h_i=x_{i+1}-x_i \neq h_j=x_{j+1}-x_j$



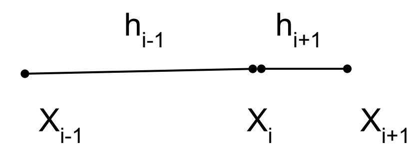
Тогда $$y_i^{/}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}$$ - *правая производная, где $h_{i-1}=x_{i+1}-x_i$*

$$y_i^{/}=\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

- *левая производная,*
- *где $\boldsymbol{h_{i-1}=x_i-x_{i-1}}$*

Неравномерная сетка

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную узлами $M_i=(x_i\,;\,y_i)$
Будем говорить, что функция задана неравномерной сеткой,
если $h_i = x_{i+1} - x_i \neq h_j = x_{j+1} - x_j$



Тогда

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$$

- правая производная, где $h_{i-1}=x_{i+1} - x_i$

$$y_i' = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

- левая производная,

- где $h_{i-1}=x_i - x_{i-1}$

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h_{i-1} + h_{i+1}}$$

- центральная производная,

- где $h_i + h_{i-1} = x_{i+1} - x_{i-1}$

$$y_i^{/} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$$

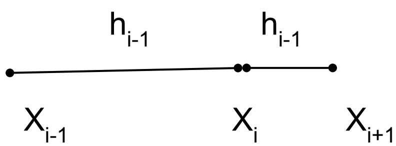
- *правая производная,*
где $h_{i-1}=x_{i+1} - x_i$

$$y_i^{/} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$$

- *левая производная,*
- *где $\boldsymbol{h_{i-1}=x_i - x_{i-1}}$*

$$y_i^{/} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h_{i-1} + h_{i+1}}$$

- *центральная производная,*
- *где $\boldsymbol{h_i + h_{i-1} = x_{i+1} - x_{i-1}}$*



Общая формула

$$y_i^{/} = \frac{y_j - y_k}{x_j - x_k}$$

Вторая производная задается формулой

$$y_i^{//} = \frac{1}{h_i \cdot h_{i-1} \cdot h_{i-1}} \left(h_{i-1} y_{i+1} - \left(h_i + h_{i-1} \right) y_i + h_i y_{i-1} \right)$$

Пример.

Рассмотрим функцию, заданную таблицей

x	0	0.2	0.5
y	0	0.04	0.25

Найти $Y^{/}(0.2)$ и $Y^{//}(0.2)$

$$y_i^{/} = \frac{y_j - y_k}{x_j - x_k}$$

$$y_i^{/} = \frac{0.25 - 0.04}{0.5 - 0.2} = \frac{0.21}{0.3} = 0.7$$

- Правая

Пример.

Рассмотрим функцию, заданную таблицей

x	0	0.2	0.5
y	0	0.04	0.25

Найти $Y^{/}(0.2)$ и $Y^{//}(0.2)$

$$y_i^{/} = \frac{y_j - y_k}{x_j - x_k}$$

$$y_i^{/} = \frac{0.25 - 0.04}{0.5 - 0.2} = \frac{0.21}{0.3} = 0.7$$

- Правая

$$y_i^{//} = \frac{1}{h_i \cdot h_{i-1} \cdot h_{i-1}} \left(h_{i-1} y_{i+1} - \left(h_i + h_{i-1} \right) y_i + h_i y_{i-1} \right)$$

h		0.2	0.3	
x	0	0.2	0.5	
y	0	0.04	0.25	

$Y^{//}(0.2) = (0.2 * 0.25 - (0.2 + 0.3) * 0.04 + 0.3 * 0) / (0.3 * 0.2 * 0.2) = 1.67$

Погрешность вычисленного значения производной зависит от шага h.