Дифференциальные уравнения и ряды

Лекция 8

Тема 2. Несобственные интегралы

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, где [a, b] – конечный промежуток интегрирования, а подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b], называют еще ***собственным интегралом***.

Определенный интеграл от непрерывной функции, но с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв, называется ***несобственным интегралом***.

§1. Несобственный интеграл I рода (интеграл с бесконечным промежутком интегрирования)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$

то его называют несобственным интегралом первого рода и обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx.$

Таким образом, по определению

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

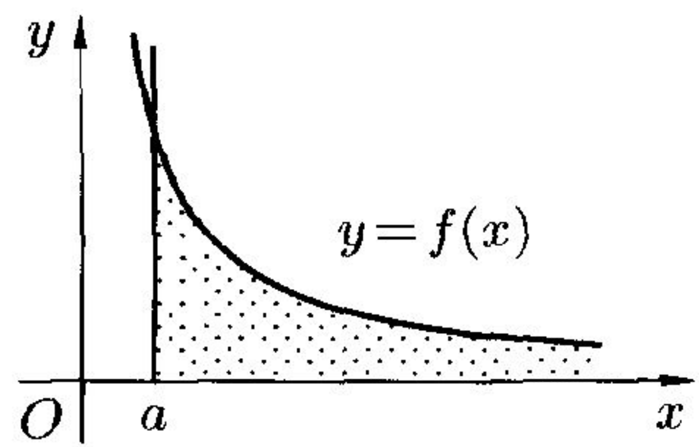
В этом случае говорят, что несобственный интеграл *сходится*.

Если же указанный предел не существует или он равен бесконечности, то говорят, что несобственный интеграл *расходится*.

Если функция $f(x) \geq 0$ непрерывна на промежутке $[a,+\infty)$

и интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится,

то он выражает площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции.



Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx,$$

где c – произвольное число.

В этом случае интеграл слева сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа.

Пример 1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$; $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x}$; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos x\,dx$.

Решение.

1. Вычисляем по определению

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=0+1=1.$$

Интеграл равен конечному числу $\Rightarrow$ сходится.

2. Решаем аналогично

$$\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{-1}\frac{dx}{x}=\lim_{a\to-\infty}\left(\ln|x|\right)\Big|_{a}^{-1}=\lim_{a\to-\infty}\left(\ln|-1|-\ln|a|\right)=0-\infty=-\infty$$

$\Rightarrow$ интеграл расходится.

3. Разбиваем интеграл на сумму двух несобственных интегралов (для упрощения вычислений возьмем $c = 0$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\,dx = \int_{-\infty}^{c} \cos x\,dx + \int_{c}^{+\infty} \cos x\,dx = \int_{-\infty}^{0} \cos x\,dx + \int_{0}^{+\infty} \cos x\,dx.$$

Вычисляем первый интеграл

$$\int_{-\infty}^{0} \cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty} (\sin x)\Big|_{a}^{0} = \lim_{a\to-\infty} (\sin 0 - \sin a) =$$

$$= -\lim_{a\to-\infty} \sin a,$$

т.к. функция $y = \sin x$ не имеет предела при $x\to\infty$, то полученный предел не существует. Следовательно, первый интеграл расходится. Значит $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\,dx$ так же расходится.

При решении задач в некоторых случаях нет необходимости вычислять интеграл, достаточно лишь знать сходится он или нет.

Для этого используются **признаки сходимости**:

1. Признак сравнения.

Если на промежутке $[a, +\infty)$ непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию $0 \le f(x) \le g(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Пример 2. Исследовать на сходимость $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$.

Решение.

Для сравнения используем интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, который сходится (см. пример 1).

Сравним подынтегральные функции:

$$\forall x \in (1, +\infty) \quad 1+e^x > 1 \;\Rightarrow \frac{1}{1+e^x} < 1 \;\Rightarrow \frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}.$$

По признаку сравнения из сходимости большего интеграла следует сходимость меньшего интеграла, поэтому $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ так же сходится.

2. Предельный признак сравнения

Если на промежутке $[a, +\infty)$ $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 0$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx,\ \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся (т.е. ведут себя одинаково в смысле сходимости).

В качестве интеграла, с которым производится сравнение, обычно используют интегралы вида $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}}\,dx,\ a > 0,\ \alpha > 0,$ которые сходятся при $\alpha > 1$ и расходятся при $\alpha \le 1$.

Пример 3. Исследовать на сходимость $\int\limits_1^{+\infty} \ln \frac{x^2+2}{x^2+1} dx.$

Решение.

Подберем функцию для сравнения. Для этого преобразуем подынтегральную функцию

$$\ln\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right) = \ln\left(\frac{(x^2+1)+1}{x^2+1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right).$$

Используем эквивалентные функции:

$\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0,$

тогда $\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right) \sim \frac{1}{x^2+1} \sim \frac{1}{x^2}$ при $x \to \infty.$

Поэтому для сравнения используем интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2},$

который сходится.

По предельному признаку сравнения

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right):\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}:\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1\neq 0\ \Rightarrow$$

интегралы $\int\limits_1^{+\infty}\ln\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)dx$ и $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ ведут себя одинаково, т.е. оба сходятся.

Замечание. При вычислении предела вновь воспользовались эквивалентностью функций

$$\ln\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)\sim\frac{1}{x^2+1}\quad(x\to\infty).$$

§2. Несобственный интеграл II рода (интеграл от разрывной функции)

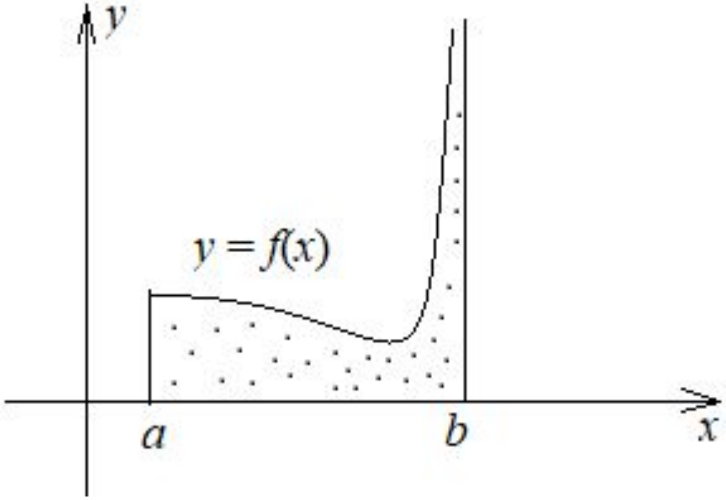
Пусть $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x = b$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, то его называют несобственным интегралом второго рода и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx.$

Таким образом, по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Если предел в правой части существует, то несобственный интеграл *сходится*. Если же указанный предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что интеграл *расходится*.

Геометрически несобственный интеграл второго рода в случае $f(x)>0$ есть площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс, прямой $x = a$ и вертикальной асимптотой $x = b$.



Аналогично определяется несобственный интеграл в случае, когда $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв во внутренней точке c отрезка $[a, b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

В этом случае интеграл слева сходится, если сходятся оба несобственных интеграла справа.

Пример 4. Вычислить $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

Решение.

Подынтегральная функция терпит разрыв в точке $c = 0$ (точка разрыва 2-го рода).

Поэтому, по определению $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = \int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2} + \int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

Вычислим первый интеграл

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left.\frac{-1}{x}\right|_{-1}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) = \infty.$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ расходится.

Замечание. Если вычислять данный интеграл, не обращая внимание на разрыв подынтегральной функции в точке $x = 0$, то получим неверный результат

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left.\frac{-1}{x}\right|_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2.$$

Признаки сходимости несобственных интегралов II рода аналогичны признакам сходимости несобственных интегралов I рода.

В качестве интеграла, с которым производится сравнение, используются интегралы вида:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha};\ \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha},\ \alpha > 0,$$

которые сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geq 1$.

Пример 5. Исследовать на сходимость $\int_0^1 \frac{2x^2\sqrt{x}}{\sin x - x}dx.$

Решение.

Подынтегральная функция не определена в точке $x = 0$.

Выясним характер разрыва функции в этой точке:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2\sqrt{x}}{\sin x - x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{\text{пл}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(2x^{5/2})'}{(\sin x - x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{5x^{3/2}}{\cos x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{\text{пл}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{15x^{1/2}}{2(-\sin x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{\text{пл}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{15x^{-1/2}}{4(-\cos x)} = \infty.$$

Следовательно, $x = 0$ точка разрыва второго рода (бесконечный разрыв).

Для сравнения возьмем интеграл вида

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}} = \begin{bmatrix} a=0 \\ b=1 \\ \alpha = 1/2 \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}},$$

который сходится.

По предельному признаку сравнения

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^2\sqrt{x}}{\sin x - x} : \frac{1}{x^{1/2}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{\sin x - x} = \begin{bmatrix} \frac{0}{0} \end{bmatrix} \overset{\text{ПЛ}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{\cos x - 1} = \begin{bmatrix} \frac{0}{0} \end{bmatrix} \overset{\text{ПЛ}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{12x}{-\sin x} = -12 \neq 0,$$

поэтому оба интеграла ведут себя одинаково, т.е. сходятся.