Математика

Часть 1

УГТУ-УПИ
2006г.

Литература

1. Бугров Е.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Е.С. Бугров, С.М. Никольский. М.: Наука, 1984.
2. Сборник задач по математике для втузов / под ред. А.В. Ефимова. М.: Наука, 1993. Часть 1.
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. М.: Наука, 1984.
4. Наумов В.А. Руководство к решению задач по линейной алгебре и аналитической геометрии / В.А. Наумов. М.: Наука, 1993.

Лекция 1

1. **Матрицы. Определители. Их свойства.**

2. **Системы m линейных уравнений с n неизвестными.**

3. **Системы n линейных уравнений с n неизвестными.**

4. **Однородные системы линейных уравнений.**

Определители

ОглавлениеО
главление:

1.Определители второго порядка

Квадратная таблица чисел вида

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется матрицей второго порядка.

Определителем квадратной матрицы A второго порядка называется число, равное

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\,.$$

Число представляет собой определитель первого порядка.

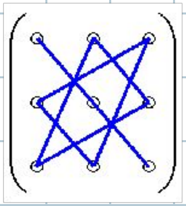
ОглавлениеО главление:

2.Определители третьего порядка

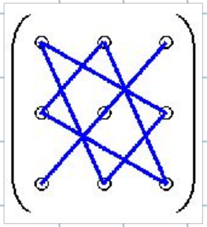
Определителем квадратной матрицы *A* **третьего порядка** называется число, равное

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$



+



-

Число всех элементов определителя 3-го порядка

равно $3 \cdot 3 = 9$.

Определители

ОглавлениеО
главление:

3. Свойства определителей (доказать самостоятельно)

1) Определитель квадратной матрицы A не меняется при транспонировании: $\left|A^T\right| = |A|$.

2) При перестановке местами двух строк (столбцов) определитель $|A|$ меняет знак:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} (\alpha_1) \\ (\alpha_2) \\ (\alpha_3) \end{matrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} (\alpha_2) \\ (\alpha_1) \\ (\alpha_3) \end{matrix} .$$

Определители

ОглавлениеОглавление:

3) Определитель, содержащий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.

4) Умножение всех элементов некоторой строки (столбца) определителя $|A|$ на число k равносильно умножению определителя на это число:

$$\begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k\cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k\cdot a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad k = const$$

Определители

ОглавлениеО
главление:

5) Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя $|A|$ равны нулю, то и сам определитель равен нулю (вытекает из предыдущего свойства при $k = 0$):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

6) Если все элементы двух строк (столбцов) определителя $|A|$ пропорциональны, то определитель равен нулю.

Определители

Оглавление Оглавление:

7) Если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель можно представить в виде суммы двух определителей:

$$|A| = \begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} + a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определители

8) Если к элементам какой-нибудь строки (столбца) определителя $|A|$ прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольный множитель k, то величина определителя не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+k\cdot a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+k\cdot a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+k\cdot a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определители

Еще одно свойство определителей (доказать самостоятельно)

9) Определитель $|A|$ численно равен сумме произведений элементов любой его строки на соответствующие алгебраические дополнения:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \quad i = 1, 2, 3$$

.

4.Определители n-ого порядка

Оглавление
Оглавление:

Число всех элементов определителя n -го порядка равно n^2

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n$-$1)$ -го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i-строки и j–столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{ij}.$$

ОглавлениеО
главление:

4. Алгебраическое дополнение.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор со знаком $(-1)^{i+j}$, где i – номер строки, а j – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

.

Определители

5. Методы вычисления определителя n-ого порядка

1. Метод понижения порядка. Разложение определителя по элементам строки или столбца

Определитель n-го порядка $|A|$ численно равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения.

2. Метод сведения к треугольному виду.

3. Метод рекуррентных соотношений.

Если определитель n-го порядка выражается через определитель такого же вида более низкого порядка, то рекуррентное соотношение позволяет вычислить определитель n-го порядка, если известно его значение, например, для $n=3$.

Определители и матрицы

Оглавление

1. Виды матриц

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел a_{ij}:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{m,n} = (a_{ij})_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Определители и матрицы

Оглавление

Частные виды матриц

$$\varnothing=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$ - квадратная нулевая,

$$B=\begin{pmatrix}2&1&7,3\end{pmatrix}$$ - матрица-строка,

$$C=\begin{pmatrix}7\\3,5\\0\end{pmatrix}$$ - матрица-столбец,

$$A=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&2&0\\0&0&-11\end{pmatrix}$$ - квадратная диагональная

Определители и матрицы

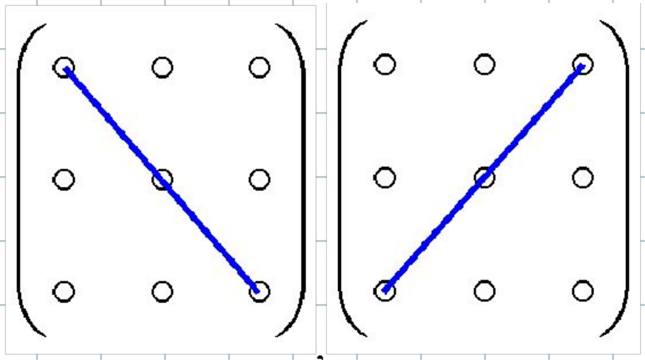
Оглавление

$$D=\begin{pmatrix}4&1&2\\0&7&5\\0&0&1\end{pmatrix}$$ - верхняя треугольная

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$ - единичная

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\quad A^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$$ -транспонированная

Определители и матрицы



главная и побочная диагонали

Оглавление

2. Операции над матрицами

Равенство $A = B \Rightarrow a_{ij} = b_{ij}$.

Сумма $C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; $A + B = B + A$.

(Размерности матриц одинаковы)

Умножение на число $B = \alpha \cdot A \Rightarrow b_{ij} = \alpha a_{ij}$;

$$(\alpha \cdot \beta) A = \alpha (\beta A),$$

$$\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B,$$

$$0 \cdot A = \varnothing;\ A \cdot E = A.$$

Определители и матрицы

Оглавление

Произведением матрицы $A=(a_{il})_{m,n}$ размерности $(m\times n)$ **на матрицу** $B=(b_{lj})_{n,k}$ размерности $(n\times k)$ называется матрица $C=(c_{ij})_{m,k}=A\cdot B$ размерности $(m\times k)$

$$A_{m,n}\cdot B_{n,k}=C_{m,k},$$

элементы которой вычисляются по формуле:

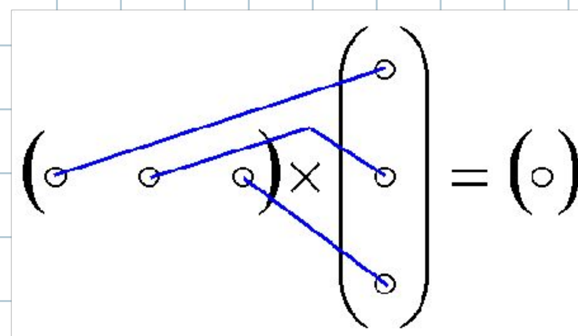
$$c_{ij}=\sum_{l=1}^{k}a_{il}\cdot b_{lj}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{ik}\cdot b_{kj}$$

$$i=1,\ldots,m,\quad j=1,\ldots,k.$$

Определители и матрицы

Оглавление

Элемент, стоящий на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца матрицы произведения c_{ij}, равен сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы *B*.



Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Определители и матрицы

Оглавление

В общем случае $A \times B \neq B \times A$,

если $A \times B = B \times A$, то матрицы перестановочные.

Свойства:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C.$$

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C.$$

$$A \times E = E \times A = A.$$

$$A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing.$$

$$(A \times B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \times A^{\mathrm{T}}.$$

$$\det(A \times B) = \det A \times \det B.$$

Определители и матрицы

Оглавление

Элементарные преобразования матриц:

- транспонирование;
- перестановка строк (столбцов);
- умножение строки (столбца) на число $\alpha \neq 0$;
- прибавление к элементам строки (столбца) матрицы элементов другой строки, умноженных на некоторое число;
- отбрасывание нулевой строки (столбца) матрицы.

Оглавление

3. Обратная матрица

Квадратная матрица A называется **вырожденной**, если , и **невырожденной**, если .

Матрица A^{-1} называется **обратной матрицей** для квадратной матрицы A, если $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A =$.

Оглавление

Теорема о существовании и единственности обратной матрицы.

Если матрица A не вырождена, то существует единственная обратная матрица A^{-1}, равная

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A^{V}\right)^{T}},$$

где $A^{V} = \left(A_{ij}\right)$- присоединенная матрица (матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы).

Определители и матрицы

Основные методы вычисления обратной матрицы

Метод присоединенной матрицы

1. Находим $\det A$, проверяем, что $\det A \neq 0$.
2. Находим M_{ij} - все миноры матрицы A.
3. Определяем $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.
4. Строим матрицу алгебраических дополнений $A^V = \left(A_{ij}\right)$ и транспонируем: $\left(A^V\right)^T = \left(A_{ji}\right)$.
5. Делим каждый элемент матрицы на $\det A$: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\left(A^V\right)^T$.

Оглавление

Метод элементарных преобразований

Для невырожденной матрицы A n-го порядка построим прямоугольную матрицу $(A|E)$ размера $n\times 2n$, приписывая к A справа единичную матрицу. Используя элементарные преобразования над строками, приводим эту матрицу к виду $(E|A^{-1})$.

4. Решение матричных уравнений

Равенство, связывающее неизвестную матрицу X и известные матрицы A, B,… называется матричным уравнением.

Определители и матрицы

Оглавление

1. $A \cdot X = B$. Матрица A - квадратная, $|A| \neq 0$.

Умножим уравнение на A^{-1} слева:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}B, \qquad E \cdot X = A^{-1}B, \qquad X = A^{-1}B.$$

2. $X \cdot A = B \qquad \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$.

3. $A \cdot X \cdot B = C \qquad \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

5. Ранг матрицы

В матрице A размерности $(m \times n)$ выберем k строк и k столбцов, $k \leq \min(m,n)$.

Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k -го порядка.

Определитель M_k этой матрицы называется **минором k -го порядка** матрицы A.

Оглавление

Рангом матрицы A называется число, равное **максимальному** порядку r отличных от нуля миноров M_k этой матрицы:

$$r = r(A) = rang\, A \quad .$$

Метод окаймляющих миноров

Пусть в матрице A элемент $a_{ij} \neq 0$, тогда $M_1 \neq 0$ и $r(A) \geq 1$. Окаймляем этот элемент элементами $(j+1)$-го столбца и $(i+1)$-й строки, получаем минор 2-го порядка:

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{i,j} & a_{i,j+1} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} \end{vmatrix}.$$

Определители и матрицы

Оглавление

Если $M_2 = 0$, то присоединяем другие строки и столбцы, перебирая все возможные миноры 2-го порядка. Если все миноры второго порядка равны нулю, то $r(A)=1$; если же существует хотя бы один минор 2-го порядка, отличный от нуля, то $r(A) \geq 2$.

Выбираем отличный от нуля минор 2-го порядка M_2 и окаймляем его элементами соседних строк и столбцов до минора 3-го порядка и так до тех пор, пока не будет выполнено условие: $M_r \neq 0$, но все $M_{r+1} = 0$.

Оглавление

Метод элементарных преобразований

! Элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранга.

Для определения ранга матрицы A методом элементарных преобразований следует:

1. Переставить строки так, чтобы в верхнем левом углу матрицы был ненулевой элемент.
2. Все элементы первого столбца, кроме a_{11}, обратить в ноль:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Оглавление

3. Повторить операцию со второй строкой: во втором столбце должен быть ненулевой элемент, после чего все элементы второго столбца, кроме a_{12} и a_{22}, обратить в ноль.
4. После m-кратного применения указанной процедуры и отбрасывания нулевых строк преобразованная матрица будет иметь вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,r-1} & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,r-1} & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{r-1,r-1} & a_{r-1,r} & \dots & a_{r-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rr} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow rang\, A = rang\, \tilde{A} = r(A) = r.$$

1 Системы m линейных уравнений с n неизвестными.

Рассмотрим

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- ***основная матрица*** системы (*) размера $[m \times n]$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - ***матрица – столбец неизвестных*** размера $[n \times 1]$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ - ***матрица – столбец свободных членов*** размера $[m \times 1]$

$(*) \Rightarrow$

$$\boxed{AX = B}$$

Терминология

Определение .

Решением системы (*) называется совокупность значений $x_1, x_2, ..., x_n$ обращающих каждое уравнение системы в верное равенство (тождество).

Обозначение.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Определение .

Система называется ***совместной***, если решение существует, и ***несовместной*** в противном случае.

Определение .

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

\- ***расширенная матрица*** системы $(*)$

Линейная зависимость строк (столбцов) матрицы

Рассмотрим основную матрицу системы как набор строк α_i или столбцов β_j

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = (\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n)$$

Определение.

Линейной комбинацией столбцов называется выражение

$$\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \ldots + \lambda_n\beta_n$$

Столбцы матрицы наз. ***линейно независимыми (ЛНЗ)***, если

$$\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \ldots\lambda_n\beta_n = 0 \quad \text{при} \quad \lambda_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

В случае, когда не все λ_i равны нулю – ***линейно зависимыми.***

Определение.

Пусть матрица А размерности $[m \times n]$ имеет ранг r. Отличный от нуля минор порядка r, составленный из элементов матрицы А, наз. ***базисным*** минором матрицы А.

Т

О базисном миноре

Если матрица $[m \times n]$ имеет ранг r, то существует r ***линейно независимых*** строк (столбцов). Из элементов этих строк (столбцов) можно построить базисный минор матрицы. Все остальные строки (столбцы) являются линейными комбинациями данных (***линейно зависимыми***).

Т *Кронекера-Капелли.*

Для того, чтобы система (*) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\boxed{r(\mathrm{A}) = r(\bar{\mathrm{A}})}$$

Доказательство.

Достаточность. Пусть $r(\mathrm{A}) = r(\bar{\mathrm{A}})$. Столбцы матриц

А и $\bar{\mathrm{A}}$:

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \beta_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Столбец В есть линейная комбинация столбцов основной матрицы $B = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \ldots + x_n\beta_n$,

т.е. $\exists\ x_1, x_2, \ldots, x_n \neq 0$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - решение системы.

$\Longrightarrow$ Система совместна.

Необходимость.

Пусть система совместна, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - решение системы.
Система в матричном виде $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \ldots + x_n\beta_n = B$.
Столбец В – линейная комбинация столбцов $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$,
т.е.добавление столбца свободных членов не увеличивает ранга матрицы, $\Longrightarrow$ $r(\mathrm{A}) = r(\bar{\mathrm{A}})$.

Выводы.

Если $r(\mathbf{A}) \neq r(\bar{\mathbf{A}})$, то система не имеет решений;

Если $r(\mathbf{A}) = r(\bar{\mathbf{A}})$, то возможны два случая:

1) Если $r = n$, то решение единственно;

2) Если $r < n$, то решений бесконечно много.

2.

Системы n линейных уравнений с n неизвестными.

Т

Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, если определитель основной матрицы А не равен нулю ($\det A \neq 0$).

Доказательство.

Система уравнений в матричном виде: $A \cdot X = B$

Пусть $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ $A^{-1} \cdot A = E$

Умножим уравнение слева на A^{-1}

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Следствия.

Если $\det A \neq 0$, для решения системы уравнений можно использовать следующие методы:

1. Матричный метод: $X = A^{-1} \cdot B$
2. Правило Крамера. Решения находят по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

Δ -определитель основной матрицы системы (***главный*** определитель).

Δ_i - вспомогательный определитель, получен из Δ заменой *i*-го столбца на столбец свободных членов.

3. Метод Гаусса.

***Определение*.**

Элементарными преобразованиями системы являются:

- перемена местами двух уравнений системы;
- умножение уравнения системы на число $k \neq 0$;
- прибавление к одному уравнению системы другого уравнения, умноженного на число $k \neq 0$.

***Замечание*.**

1. Элементарным преобразованиям уравнений соответствуют элементарные преобразования строк расширенной матрицы системы $\bar{A}$.
2. Элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга.

Алгоритм метода Гаусса.

1. Для системы уравнений записывают расширенную матрицу $\bar{\mathbf{A}}$.
2. Элементарными преобразованиями строк приводят ее к трапециевидной форме.
3. Возвращаясь к системе уравнений, определяют все неизвестные.

Метод Гаусса справедлив и для произвольных систем $[m \times n]$.

3. Однородные системы линейных уравнений.

Определение.

Система (*) называется ***однородной***, если

$$\mathbf{B} = \mathbf{O}$$

$$(***)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Так как $r(A) = r(\bar{A}) \Rightarrow$

Однородная система всегда совместна!

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

$X_0 = (0, 0, \dots, 0)$ - ***тривиальное (нулевое) решение ОС***

Т1

Для того чтобы ОС (***) имела ***ненулевое*** решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\boxed{r(A) < n}$$

Доказательство.

Необходимость.

Если $\exists\, X \neq X_0$,

то $r(A) = r < n$

$r(A) = r > n$?-нет, т.к. ранг матрицы не превышает числа строк или столбцов.

$r(A) = r = n$? - нет, т.к. в этом случае

$\Delta \neq 0 \Longrightarrow \exists\, ! X : \boxed{x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} \; (\Delta_i = 0) \Rightarrow x_i = 0}$

- нулевое решение

$\Longrightarrow r(A) = r < n$ Ч.т.д.

T2 *(следствие T1)*

Для того чтобы ОС (***) имела ***ненулевое*** решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\boxed{\Delta = 0}$$

Свойства решений однородной системы

1. Линейная комбинация решений системы (***) является решением (***).

2. Система (***) имеет $\mathbf{n - r}$ **ЛНЗ** решений.

Доказательство

По условию $\mathbf{r < n}$.

Пусть базисный минор $\mathbf{M_r \neq 0}$ расположен в левом верхнем углу матрицы А.

Составим ***укороченную систему***

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{r2}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Базисные неизвестные

Свободные неизвестные

Значения ***вычисляются***

Присваиваются

произвольные значения

Присвоим конкретные значения своб. неизв.

$$x_{r+1}=1;\quad x_{r+2}=0,\ldots,\ x_n=0$$

Вычислим значения базисных неизвестных

$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)$ - ***единственное*** решение укороченной системы.

$$X_1=\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,1,0,\ldots,0\right)$$ - решение ОС.

$$X_2=\left(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r,0,1,\ldots,0\right)$$ - др. решение ОС.

....

$$X_{n-r}=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_r,0,0,\ldots,1)$$ - др. решение ОС.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_r & 1\ 0 \dots 0 \\ \beta_1 & \dots & \beta_r & 0\ 1 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \dots\dots\dots \\ \gamma_1 & \dots & \gamma_r & 0 \dots\dots 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ - ЛНЗ. Ч.т.д.

Определение.

n – r линейно независимых решений однородной системы линейных уравнений называются ***фундаментальной системой решений (ФСР)***.

Определение.

Общим решением системы (***) называется

$$X=\begin{pmatrix} x_1\left(c_1,c_2,\ldots,c_{n-r}\right) \\ x_2\left(c_1,c_2,\ldots,c_{n-r}\right) \\ \ldots \\ x_r\left(c_1,c_2,\ldots,c_{n-r}\right) \\ c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}$$

Здесь $c_1,c_2,\ldots,c_{n-r}$ - произвольные константы.

Частное решение получают из общего при конкретных значениях констант $c_1,c_2,\ldots,c_{n-r}$

Т

Общее решение системы (***) можно представить в виде линейной комбинации решений из фундаментальной системы.

Определение.

Общим решением системы (***) называется решение вида

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_{n-r} X_{n-r}$$

Здесь $\mathbf{c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}}$ - *произвольные* константы

$\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}\}$ - ФСР

Пример.

Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем основную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы равен 2

базисный минор

x_2, x_3 - базисные неизвестные,

x_1, x_4 - свободные неизвестные.

Запишем преобразованную систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Полагая $x_1 = c_1, x_4 = c_2$, найдем базисные неизвестные

$$x_2 = 2c_1 - 8c_2,$$

$$x_3 = -3c_2.$$

Общее решение системы $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\2c_1-8c_2\\-3c_2\\c_2\end{pmatrix}$

Найдем частные ЛНЗ решения, полагая

$$c_1=1, c_2=0 \Rightarrow X_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\quad c_1=0, c_2=1 \Rightarrow X_2=\begin{pmatrix}0\\-8\\-3\\1\end{pmatrix}.$$

$\{X_1, X_2\}$ - фундаментальная система решений.

Общее решение системы

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Такая запись общего решения называется разложением по ***фундаментальной системе решений.***