Тема. Численное интегрирование функций

Решаемые задачи:

- вычисление объемов тел;
- вычисление площадей фигур;
- вычисление длин кривых;
- и т.д.

Численное интегрирование функций

Подходы:

- замена исходной функции $f(x)$ (заданной таблично или аналитически) интерполирующим полиномом $P(x)$ с известной первообразной;
- подбор оптимальных узлов интегрирования при аналитически заданной функции $f(x)$;
- вероятностные или статистические методы.

Вероятностные (статистические) методы

Пример: задан шар

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \le R^2$$

Соотношение объёмов шара и куба, в который вписан шар:

$$\frac{V_К}{V_Ш} \approx \frac{N}{M}$$

Вероятностные (статистические) методы

В пределе

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N}{M} = \frac{V_К}{V_Ш}$$

Тогда

$$V_{КШ} = 8R^3 \Rightarrow V \quad = 8R^3 \cdot \frac{M}{N}$$

Методы с подбором узлов

На отрезке [–1,1]

$$I' = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} c_i f(t_i)$$

При переходе к отрезку $[a, b]$ имеем

$$I = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i),$$

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i.$$

Интегрирование интерполирующих полиномов

При замене $f(x)$ интерполирующим полиномом

$$I_i = \int\limits_{x_{ip}}^{x_{(i+1)p}} f(x)\,dx \approx \int\limits_{x_{ip}}^{x_{(i+1)p}} P_i(x)\,dx, \;\; P_i(x) = \sum_{j=0}^{p} c_{ij}\varphi_{ij}(x)$$

$$I = \sum_{i=0}^{m} I_i = \int\limits_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{m} \int\limits_{x_{ip}}^{x_{(i+1)p}} P_i(x)\,dx, \;\; m = \frac{n}{p} - 1$$

$$f(x) \approx P_i(x) = \sum_{i=0}^{p} c_{ij}\varphi_{ij}(x), \;\; x \in \left[x_{ip}, x_{(i+1)p}\right], \;\; i = 0,1,\ldots,m$$

Интегрирование интерполирующих полиномов

При замене $f(x)$ интерполирующим полиномом

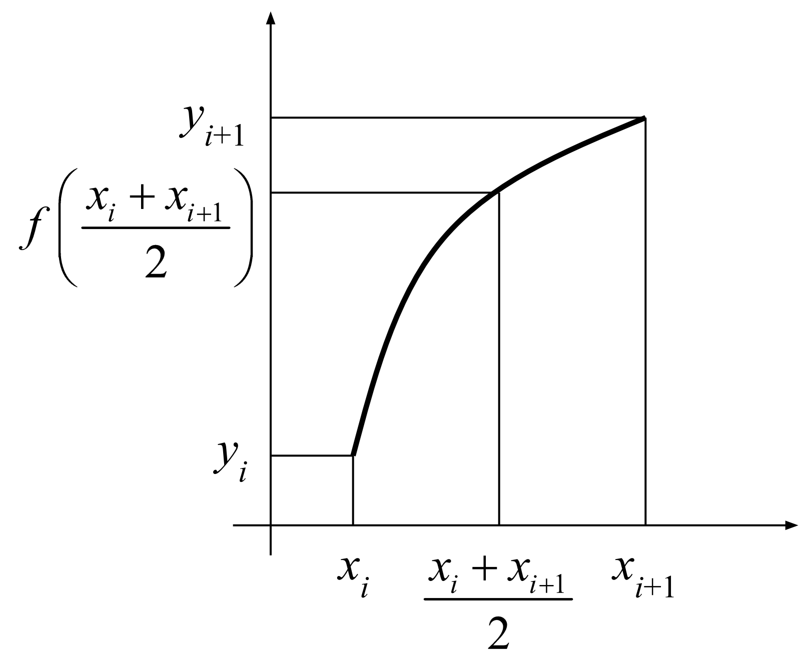
$$I = \sum_{i=0}^{m} \int_{x_{ip}}^{x_{(i+1)p}} \sum_{j=0}^{p} c_{ij}\varphi_{ij}\left(x\right) dx = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{p} c_{ij}\, \Phi_{ij}\left(x\right)\Big|_{x_{ip}}^{x_{(i+1)p}} \; dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} I_i, \;\; m = \frac{n}{p} - 1$$

Интегрирование интерполирующих полиномов

Формулы прямоугольников:

- левосторонних;
- правосторонних;
- центральных.



Формула левосторонних прямоугольников

На отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ полагаем $p = 1$, $P_i(x) = y_i$.
Получаем:

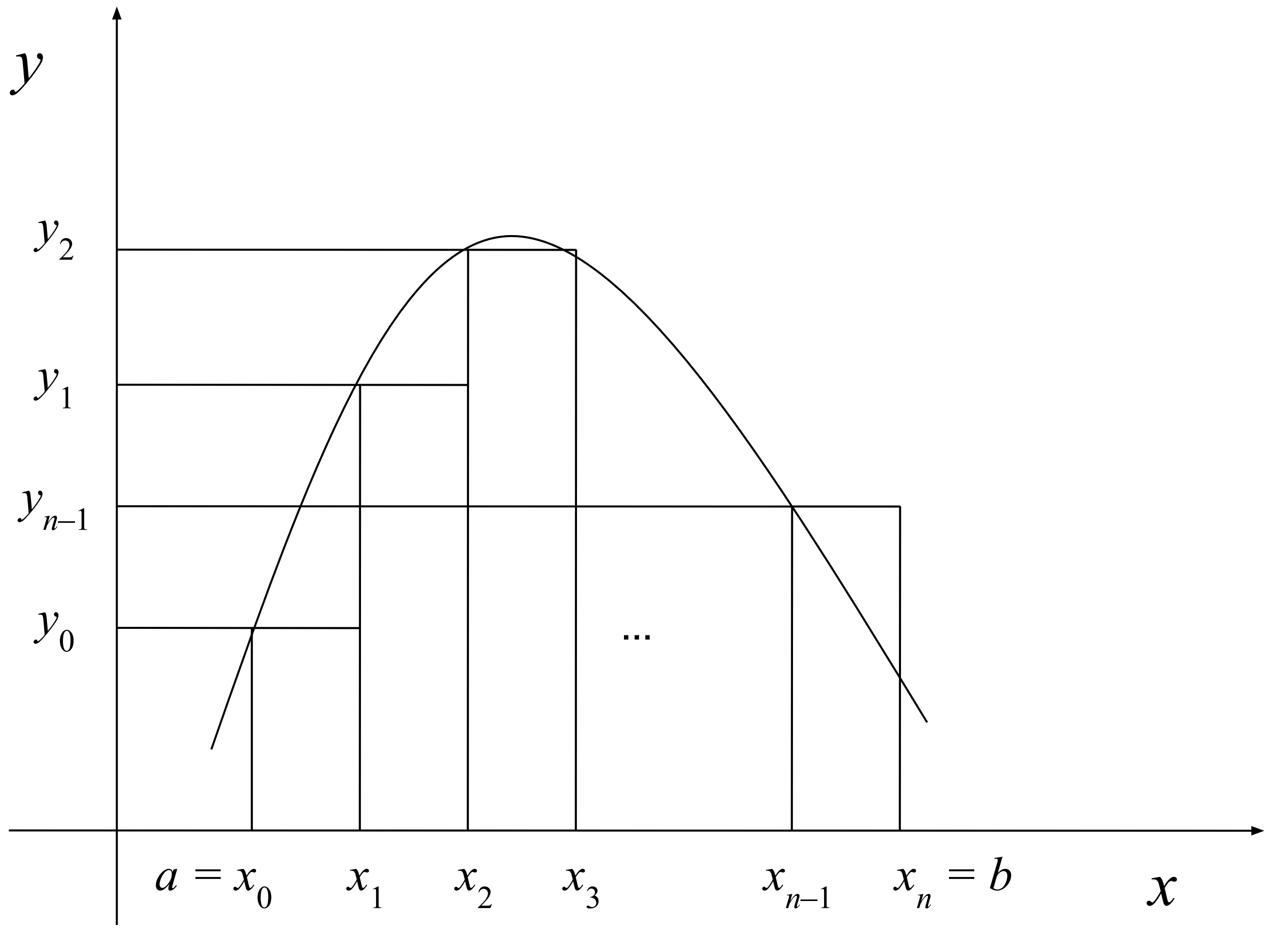
$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} y_i \, x\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} y_i h_i,$$

$$h_i = \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

Для равномерной сетки

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

Формула левосторонних прямоугольников



Формула правосторонних прямоугольников

На отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ полагаем $p = 1$, $P_i(x) = y_{i+1}$. Получаем:

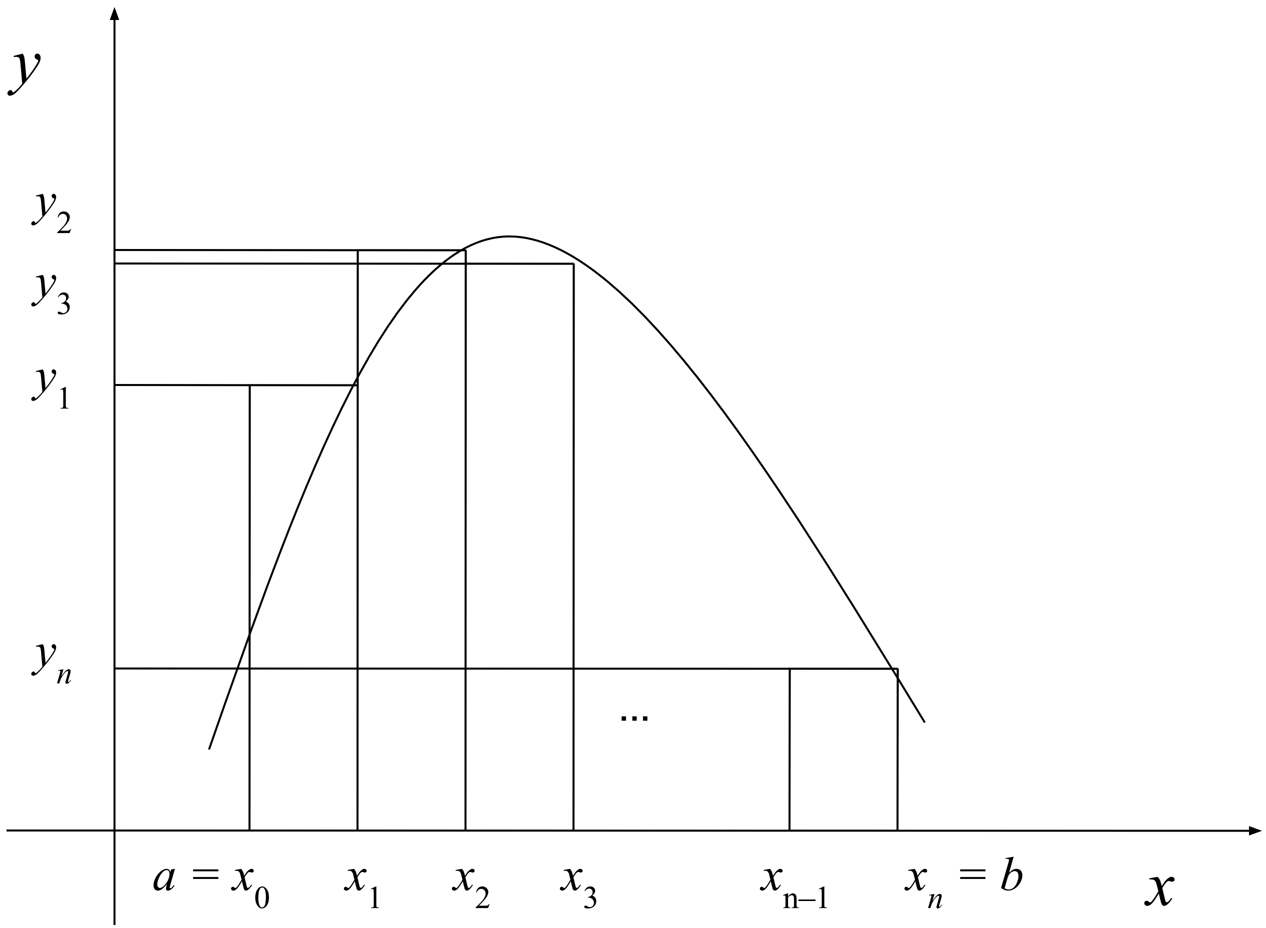
$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1}\, x\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} h_i,$$

$$h_i = \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

Для равномерной сетки

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} = h\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Формула правосторонних прямоугольников



Формула центральных прямоугольников

На отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ полагаем $p = 1$,

$$P_i(x) = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

Получаем:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) x\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) h_i$$

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

Формула трапеций

На отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ полагаем $p = 1$,

$$P_i(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}(x - x_i) + y_i$$

$$\int P_i(x)\,dx = \frac{y_{i+1} - y_i}{2h_i}(x - x_i)^2 + y_i x + C \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I_i = \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{2h_i}(x - x_i)^2 + y_i x + C\right)\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{1}{2}(y_{i+1} + y_i)h_i$$

Формула трапеций

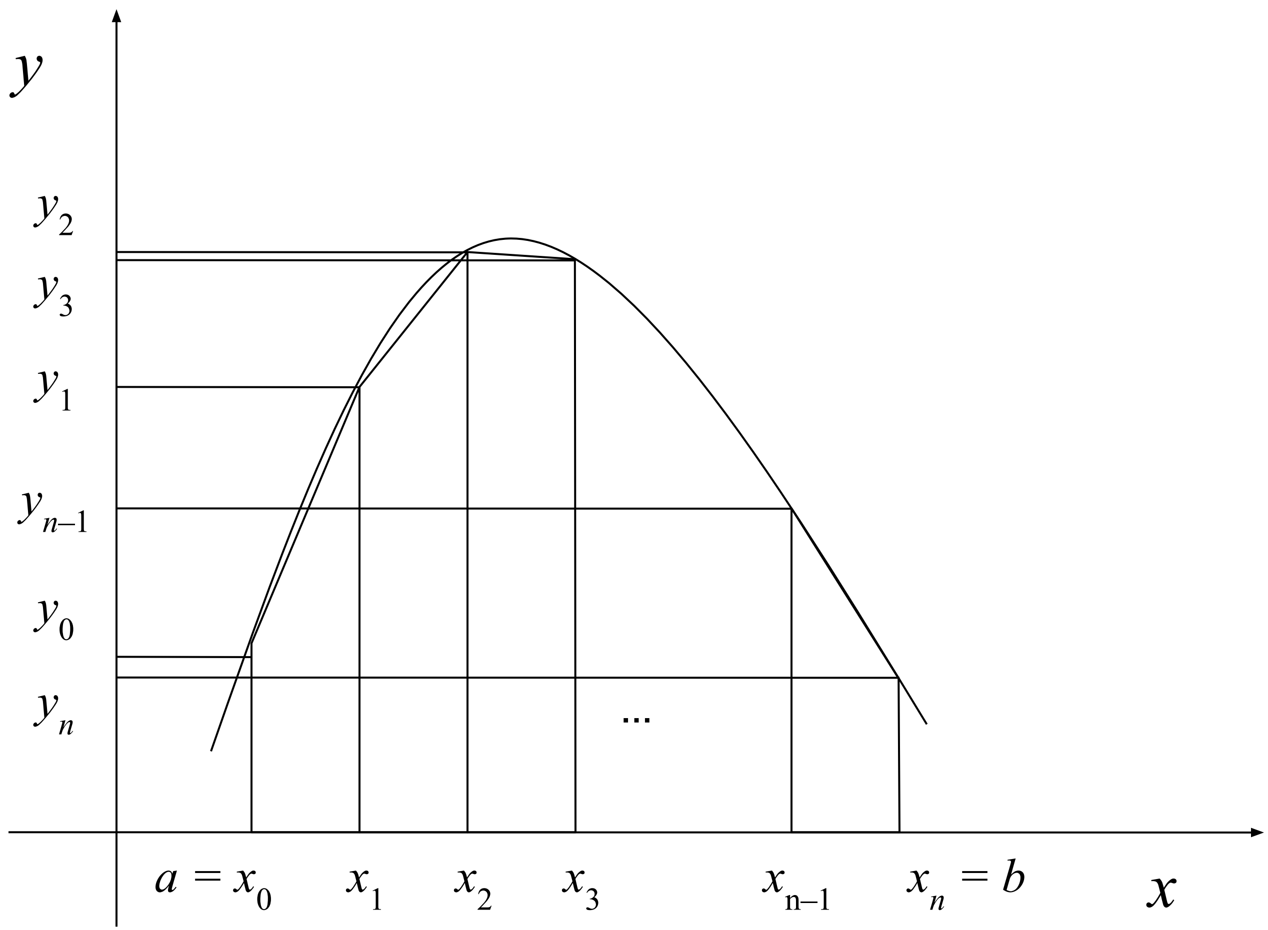
На отрезке $[a, b]$

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} I_i = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} h_i\left(y_i + y_{i+1}\right) = \frac{1}{2}\left(y_0 h_0 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\left(h_{i-1} + h_i\right) + y_n h_{n-1}\right)$$

Для равномерной сетки

$$I = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(y_i + y_{i+1}\right) = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n\right)$$

Формула трапеций



Квадратурные формулы

Вспомним формулу

$$I_i = \int\limits_{x_{ip}}^{x_{(i+1)p}} f(x)\,dx \approx \int\limits_{x_{ip}}^{x_{(i+1)p}} P_i(x)\,dx,\;\; P_i(x) = \sum_{j=0}^{p} c_{ij}\varphi_{ij}(x)$$

Выполним подстановку:

$$I_i \approx \int\limits_{x_{ip}}^{x_{(i+1)p}} \sum_{j=0}^{p} c_{ij}\varphi_{ij}(x)\,dx = \sum_{j=0}^{p}\left(c_{ij} \int\limits_{x_{ip}}^{x_{(i+1)\,p}} \varphi_{ij}(x)\,dx \right)$$

Квадратурные формулы

Если предположить, что $c_{ij} = y_{ip+j} \cdot C_{ij}$, то

$$I_i \approx \sum_{j=0}^{p} \left(c_{ij} \int_{x_{ip}}^{x_{(i+1)p}} \varphi_{ij}(x)\, dx \right) = \sum_{j=0}^{p} \left(y_{ip+j} \cdot C_{ij} \int_{x_{ip}}^{x_{(i+1)p}} \varphi_{ij}(x)\, dx \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{p} A_{ij} y_{ip+j},$$

где A_{ij} – *квадратурные коэффициенты*.
Тогда

$$I = \sum_{i=0}^{m} I_i = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{p} A_{ij} y_{ip+j}, \quad m = \frac{n}{p} - 1.$$

Квадратурные формулы

Если $P_i(x) = L_{p,i}(x)$, т.е.

$$P_p\left(x\right) = L_{p,i}\left(x\right) = \sum_{j=0}^{p}\left(y_{ip+j} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{p} \frac{x - x_{ip+k}}{x_{ip+j} - x_{ip+k}} \right),$$

то

$$C_{ij} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{p} \frac{1}{x_{ip+j} - x_{ip+k}}, \;\; \varphi_{ij}\left(x\right) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{p}\left(x - x_{ip+k}\right).$$

Квадратурные формулы

Тогда

$$A_{ij} = C_{ij} \int\limits_{x_{ip}}^{x_{(i+1)p}} \varphi_{ij}(x)\, dx = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{p} \frac{1}{x_{ip+j} - x_{ip+k}} \int\limits_{x_{ip}}^{x_{(i+1)p}} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{p} \left(x - x_{ip+k}\right) dx$$

Для $p = 1$ имеем:

$$P_1(x) = L_{1,i}(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$C_{i0} = \frac{1}{x_i - x_{i+1}},\ C_{i1} = \frac{1}{x_{i+1} - x_i},\ \varphi_{i0}(x) = x - x_{i+1},\ \varphi_{i1}(x) = x - x_i$$

Квадратурные формулы

Интегрируем:

$$A_{i0} = \frac{1}{x_i - x_{i+1}} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(x - x_{i+1}\right) dx = -\frac{1}{h_i} \frac{\left(x - x_{i+1}\right)^2}{2} \Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} =$$

$$= -\frac{1}{h_i}\left(0 - \frac{\left(x_i - x_{i+1}\right)^2}{2}\right) = \frac{h_i}{2}; \;\; A_{i1} = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(x - x_i\right) dx =$$

$$= \frac{1}{h_i} \frac{\left(x - x_i\right)^2}{2} \Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{1}{h_i}\left(\frac{\left(x_{i+1} - x_i\right)^2}{2} - 0\right) = \frac{h_i}{2}$$

Квадратурные формулы

В итоге

$$I_i = \frac{h_i}{2} y_i + \frac{h_i}{2} y_{i+1} = \frac{h_i}{2}\left(y_i + y_{i+1}\right),$$

$$m = \frac{n}{1} - 1 = n = 1,$$

$$I = \sum_{i=0}^{m} I_i = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} h_i \left(y_i + y_{i+1}\right)$$

Получили формулу трапеций.

Квадратурные формулы

Для $p = 2$ имеем:

$$P_2(x) = L_{2,i}(x) = y_{2i}\frac{(x - x_{2i+1})(x - x_{2i+2})}{(x_{2i} - x_{2i+1})(x_{2i} - x_{2i+2})} +$$

$$+ y_{2i+1}\frac{(x - x_{2i})(x - x_{2i+2})}{(x_{2i+1} - x_{2i})(x_{2i+1} - x_{2i+2})} + y_{2i+2}\frac{(x - x_{2i})(x - x_{2i+1})}{(x_{2i+2} - x_{2i})(x_{2i+2} - x_{2i+1})}$$

$$C_{i0} = \frac{1}{(x_{2i} - x_{2i+1})(x_{2i} - x_{2i+2})},\ \ \varphi_{i0}(x) = (x - x_{2i+1})(x - x_{2i+2}),$$

$$C_{i1} = \frac{1}{(x_{2i+1} - x_{2i})(x_{2i+1} - x_{2i+2})},\ \ \varphi_{i1}(x) = (x - x_{2i})(x - x_{2i+2}),$$

$$C_{i2} = \frac{1}{(x_{2i+2} - x_{2i})(x_{2i+2} - x_{2i+1})},\ \ \varphi_{i1}(x) = (x - x_{2i})(x - x_{2i+1}),$$

Квадратурные формулы

Интегрируем:

$$A_{i0} = \frac{1}{\left(x_{2i} - x_{2i+1}\right)\left(x_{2i} - x_{2i+2}\right)} \int\limits_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} \left(x - x_{2i+1}\right)\left(x - x_{2i+2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\left(-h_{2i}\right)\left(-h_{2i+1} - h_{2i}\right)} \int\limits_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} \left(x^2 - \left(x_{2i+1} + x_{2i+2}\right)x + x_{2i+1}x_{2i+2}\right) dx =$$

$$= \frac{h_{2i+1} + h_{2i}}{6h_{2i}}\left(2h_{2i} - h_{2i+1}\right)$$

и т.д.

Квадратурные формулы

В итоге получим:

$$A_{i0} = \frac{\left(h_{2i+1} + h_{2i}\right)\left(2h_{2i} - h_{2i+1}\right)}{6h_{2i}}, \quad A_{i1} = \frac{\left(h_{2i+1} + h_{2i}\right)^3}{6h_{2i+1}h_{2i}},$$

$$A_{i2} = \frac{\left(h_{2i+1} + h_{2i}\right)\left(2h_{2i+1} - h_{2i}\right)}{6h_{2i+1}}$$

Это формула Симпсона:

$$I_i = \frac{h_{2i+1} + h_{2i}}{6h_{2i+1}h_{2i}}\Big(h_{2i+1}\left(2h_{2i} - h_{2i+1}\right)y_{2i} + \left(h_{2i+1} + h_{2i}\right)^2 y_{2i+1} +$$

$$+ h_{2i}\left(2h_{2i+1} - h_{2i}\right)y_{2i+2}\Big)$$

Квадратурные формулы

Для отрезка $[a, b]$

$$I = \sum_{i=0}^{m} \frac{h_{2i+1} + h_{2i}}{6h_{2i+1}h_{2i}} \Big(h_{2i+1}\left(2h_{2i} - h_{2i+1}\right) y_{2i} + \left(h_{2i+1} + h_{2i}\right)^2 y_{2i+1} +$$

$$+ h_{2i}\left(2h_{2i+1} - h_{2i}\right) y_{2i+2} \Big),\ m = \frac{n}{2} - 1$$

Квадратурные формулы

Если сетка равномерная, то

$$I_i = \int_{x_{ip}}^{x_{(i+1)p}} P_i(q)\,dx = h\int_{ip}^{(i+1)p} P_p(q)\,dq = h\sum_{j=0}^{p} A_j y_{ip+j}.$$

т.е. коэффициенты A_j не зависят от индекса i. Для отрезка $[a, b]$

$$I = \sum_{i=0}^{m} I_i = h\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{p} A_j y_{ip+j},\;\; m = \frac{n}{p} - 1.$$

Квадратурные формулы

Интерполирующий полином

$$P_p(q) = L_p(q) = \sum_{j=0}^{p} \left((-1)^{p-j} \frac{y_j}{j!(p-j)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{p} (q-k) \right)$$

т.е.

$$C_j = \frac{(-1)^{p-j}}{j!(p-j)!}, \quad \varphi_j(q) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{p} (q-k)$$

Квадратурные формулы

Тогда

$$A_j = C_j \int_0^p \varphi_j(q)\, dq = \frac{(-1)^{p-j}}{j!(p-j)!} \int_0^p \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{p} (q-k)\, dq$$

Коэффициенты Ньютона-Котеса

В случае равномерной сетки положим

$$H_j = \frac{1}{p} A_j.$$

Здесь H_i – *коэффициенты Ньютона-Котеса*. Т.е.

$$H_j = \frac{1}{p} \frac{(-1)^{p-j}}{j!(p-j)!} \int_0^p \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{p} (q-k)\, dq$$

Коэффициенты Ньютона-Котеса

Свойства коэффициентов Ньютона-Котеса:

1) $H_j = H_{p-j}$;

2) $\sum_{j=0}^{p} H_j = 1$.

Примеры

i	0	1	2	3	4	5	6
x	0	1/9	1/4	1	9/4	4	9
y	0	1/3	1/2	1	3/2	2	3

$$n = 6$$

$$h_0 = \frac{1}{9} - 0 = \frac{1}{9};\ h_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36};\ h_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4};\ h_3 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4};$$

$$h_4 = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4};\ h_5 = 9 - 4 = 5$$

Примеры

i	0	1	2	3	4	5	6
x	0	1/9	1/4	1	9/4	4	9
y	0	1/3	1/2	1	3/2	2	3
h	1/9	5/36	3/4	5/4	7/4	5	

Левосторонние прямоугольники:

$$I = \sum_{i=0}^{5} y_i h_i = 0 \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{36} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{5}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{4} + 2 \cdot 5 =$$

$$= \frac{386}{27} \approx 14.2963$$

Примеры

i	0	1	2	3	4	5	6
x	0	1/9	1/4	1	9/4	4	9
y	0	1/3	1/2	1	3/2	2	3
h	1/9	5/36	3/4	5/4	7/4	5	

Правосторонние прямоугольники:

$$I = \sum_{i=0}^{5} y_{i+1} h_i = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{36} + 1 \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} + 2 \cdot \frac{7}{4} + 3 \cdot 5 =$$

$$= \frac{2293}{108} \approx 21.2315$$

Примеры

i	0	1	2	3	4	5	6
x	0	1/9	1/4	1	9/4	4	9
y	0	1/3	1/2	1	3/2	2	3
h	1/9	5/36	3/4	5/4	7/4	5	

Трапеции:

$$I = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{5} h_i \left(y_i + y_{i+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\cdot\left(0+\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{36}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)+\right.$$

$$\left.\frac{5}{4}\cdot\left(1+\frac{3}{2}\right)+\frac{7}{4}\cdot\left(\frac{3}{3}+2\right)+5\cdot(2+3)\right)=\frac{1297}{72}\approx 17.7639$$

Примеры

i	0	1	2	3	4	5	6
x	0	1/9	1/4	1	9/4	4	9
y	0	1/3	1/2	1	3/2	2	3
h	1/9	5/36	3/4	5/4	7/4	5	

Формула Симпсона:

$$I=\sum_{i=0}^{2}\frac{h_{2i+1}+h_{2i}}{6h_{2i+1}h_{2i}}\Big(h_{2i+1}\left(2h_{2i}-h_{2i+1}\right)y_{2i}+\left(h_{2i+1}+h_{2i}\right)^{2}y_{2i+1}+$$

$$+h_{2i}\left(2h_{2i+1}-h_{2i}\right)y_{2i+2}\Big)=\frac{5/36+1/9}{6\cdot 5/36\cdot 1/9}\left(\frac{5}{36}\cdot\left(2\cdot\frac{1}{9}-\frac{5}{36}\right)\cdot 0+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{5}{36}+\frac{1}{9}\right)^{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\cdot\left(2\cdot\frac{5}{36}-\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)+$$

Примеры

Формула Симпсона:

$$+\frac{5/4+3/4}{6\cdot 5/4\cdot 3/4}\left(\frac{5}{4}\cdot\left(2\cdot\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)^2\cdot 1+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{4}\cdot\left(2\cdot\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{3}{2}\right)+\frac{5+7/4}{6\cdot 5\cdot 7/4}\left(5\cdot\left(2\cdot\frac{7}{4}-5\right)\cdot\frac{3}{2}+\right.$$

$$\left.+\left(5+\frac{7}{4}\right)^2\cdot 2+\frac{7}{4}\cdot\left(2\cdot 5-\frac{7}{4}\right)\cdot 5\right)=\frac{91211}{5040}\approx 18.0974$$

Примеры

Точность интегрирования:

$$I = \int_0^9 \sqrt{x}dx = 18$$

	I	δ
$I_{ЛП}$	14.2963	20.6%
$I_{ПП}$	21.2315	17.9%
$I_{Т}$	17.7639	1.31%
$I_{С}$	18.0974	0.54%