Интеграл от функции комплексного переменного.

Выполнил: студент группы
НГ15-04,Ю.А. Пестерев
Преподаватель: В. М. Киселёв

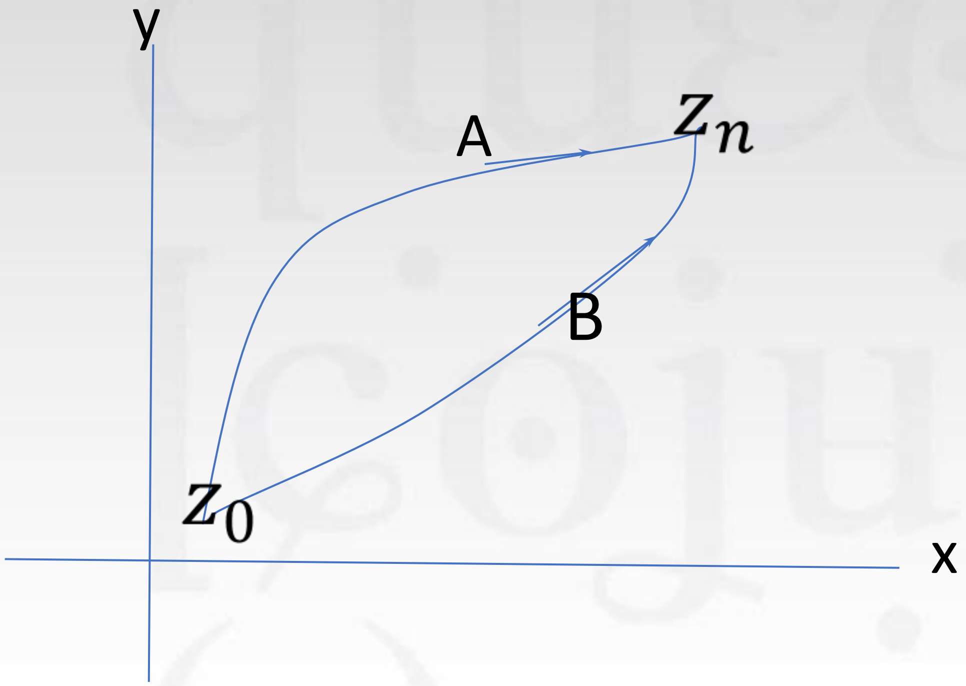
Красноярск 2017

План

1. Теорема Коши(доказательство)
2. Многозначные функции
3. Примеры к многозначным функциям

$$I = \lim_{\Delta z \to 0} \sum_{k=0}^{n} f(z_k)\,\Delta z \equiv \int_{z_0}^{z_n} f(z)dz$$

$$\Delta z = \frac{z_n - z_0}{n}$$



z_0 и z_n – начальная и конечная точки кривой L в комплексной плоскости, вдоль которой производится интегрирование, n – число отрезков, на которые разбита эта кривая

Теорема Коши

Доказательство

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (u+iv)d(x+iy) = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy) = I_1 + iI_2.$$

$$\oint_C \boldsymbol{A}d\boldsymbol{\ell} = \oint_C (u\,\boldsymbol{e_x} - v\boldsymbol{e_y})(dx\boldsymbol{e_x} - dy\boldsymbol{e_y}) = \oint_C (udx - vdy) = I_1\,.$$

$\oint_C \boldsymbol{A}d\boldsymbol{\ell} = \iint_\Sigma rot\boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{S}$ – теорема Стокса для векторного поля $\boldsymbol{A}$

где Σ – произвольная поверхность, натянутая на контур C

$$rot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e_z}\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$\dfrac{\boldsymbol{\partial u}}{\boldsymbol{\partial y}} = -\dfrac{\boldsymbol{\partial v}}{\boldsymbol{\partial x}}$ - второе условие Коши-Римана

$$\oint_C f(z)dz = \int_{z_0Az_n} f(z)dz + \int_{z_nBz_0} f(z)dz = \int_{z_0Az_n} f(z)dz - \int_{z_0Bz_n} f(z)dz = 0$$

$$\int_{z_0Az_n} f(z)dz = \int_{z_0Bz_n} f(z)dz.$$

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1$$

где $\Phi(z)$ – любая функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = f(z).$$

Многозначные функции

функция
$w = \sqrt{z}$

1. $w_1 = |z|e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad w_2 = |z|e^{i(\frac{\varphi}{2}+\pi)}$
2. $|z|e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}} = |z|e^{i(\frac{\varphi}{2}+\pi)} = w_2$
3. $|z|e^{i(\frac{\varphi+2\pi}{2}+\pi)} = |z|e^{i\frac{\varphi}{2}}e^{i2\pi} = w_1$

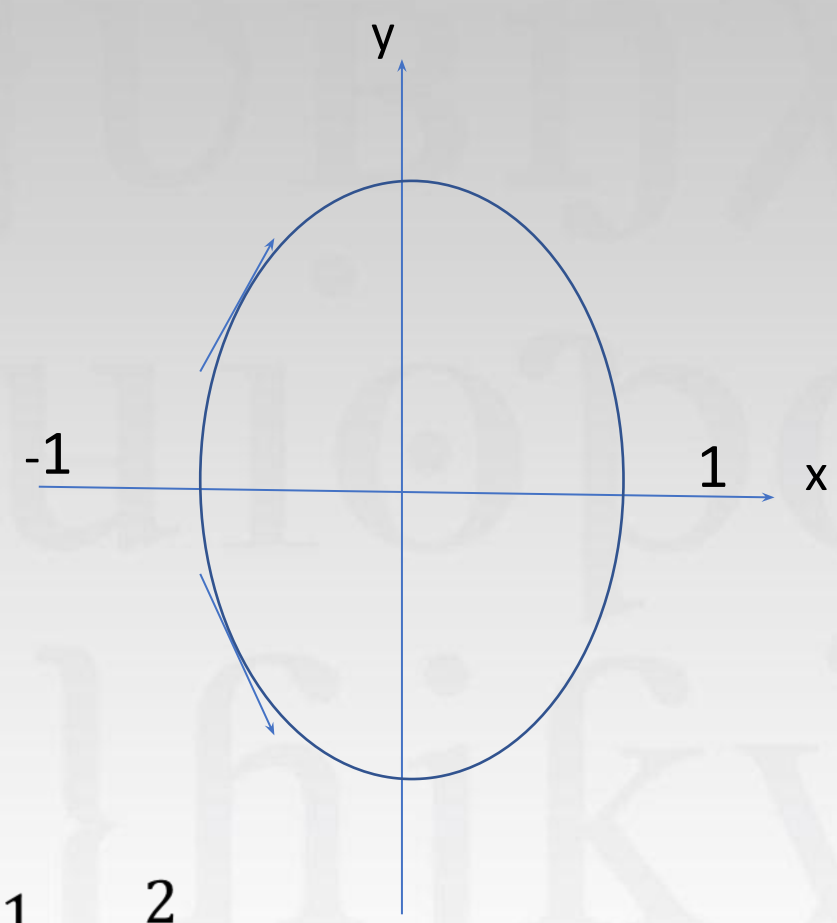
Функция
$w = lnz$

$$lnz = ln|z| + i(\varphi + 2k\pi), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Примеры к многозначным функциям

Найти интегралы по каждой из двух полуокружностей с центром в точке $z = 0$, идущих из $z = -1$ в $z = 1$ от функций:

А) $w = z^2$;
В) $w = 1/z$;



А) Функция $w = z^2$ аналитическая во всей плоскости (проверить!), поэтому результат интегрирования от пути не зависит и для обоих случаев

$$\int_{z=-1}^{z=1} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

В) Функция $w = 1/z$ в точке $z = 0$ обращается в бесконечность (имеет полюс), поэтому результат интегрирования будет зависеть от направления обхода точки $z = 0$.

По верхней полуокружности:

$$\int_{z=-1}^{z=1} \frac{1}{z} dz = [ln|z| - i\pi]|_{-1}^{1} = -i\pi.$$

Угол φ отсчитывается от оси OX против часовой стрелки.

По нижней полуокружности:

$$\int_{z=-1}^{z=1} \frac{1}{z} dz = [ln|z| + i\pi]|_{-1}^{1} = i\pi.$$