Раздел I. Линейная алгебра

ТЕМА 1.

Определители 2-го, 3-го, n-го порядка

Определителем называется число, заданное в виде квадратной таблицы чисел. Он обозначается Δ или det A. В общем вид определитель записывается следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} \ldots & a_{1.n} \\ a_{2.1} & a_{2.2} & a_{2.3} \ldots & a_{2.n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n.1} & a_{n.2} & a_{n.3} \ldots & a_{.n.n} \end{vmatrix}$$

Свойства определителя

1. Если в определителе поменять местами два соседних параллельных ряда (строки или столбцы), то определитель поменяет знак на противоположный
2. Если соответствующие элементы двух столбцов (или двух строк) определителя равны или пропорциональны, то определитель равен нулю
3. Значение определителя не изменится, если поменять местами строки и столбцы, сохранив их порядок (иначе, при замене строк столбцами (транспонировании) значение определителя не изменится)
4. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя. Или: Если все элементы определителя, стоящие в одном ряду, умножить на одно и то же число, то значение определителя изменится в это число раз
5. Если к элементам какой-либо строки или столбца прибавить произведение соответствующих элементов другой строки или столбца на постоянный множитель, то значение определителя не

Свойства определителя

6. Определитель второго порядка вычисляется по форм $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$

7. Определитель третьего порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

8. Теорема Лапласа: Определитель равен сумме произведений каждого элемента некоторой строки (или столбца) на его алгебраическое дополнение.

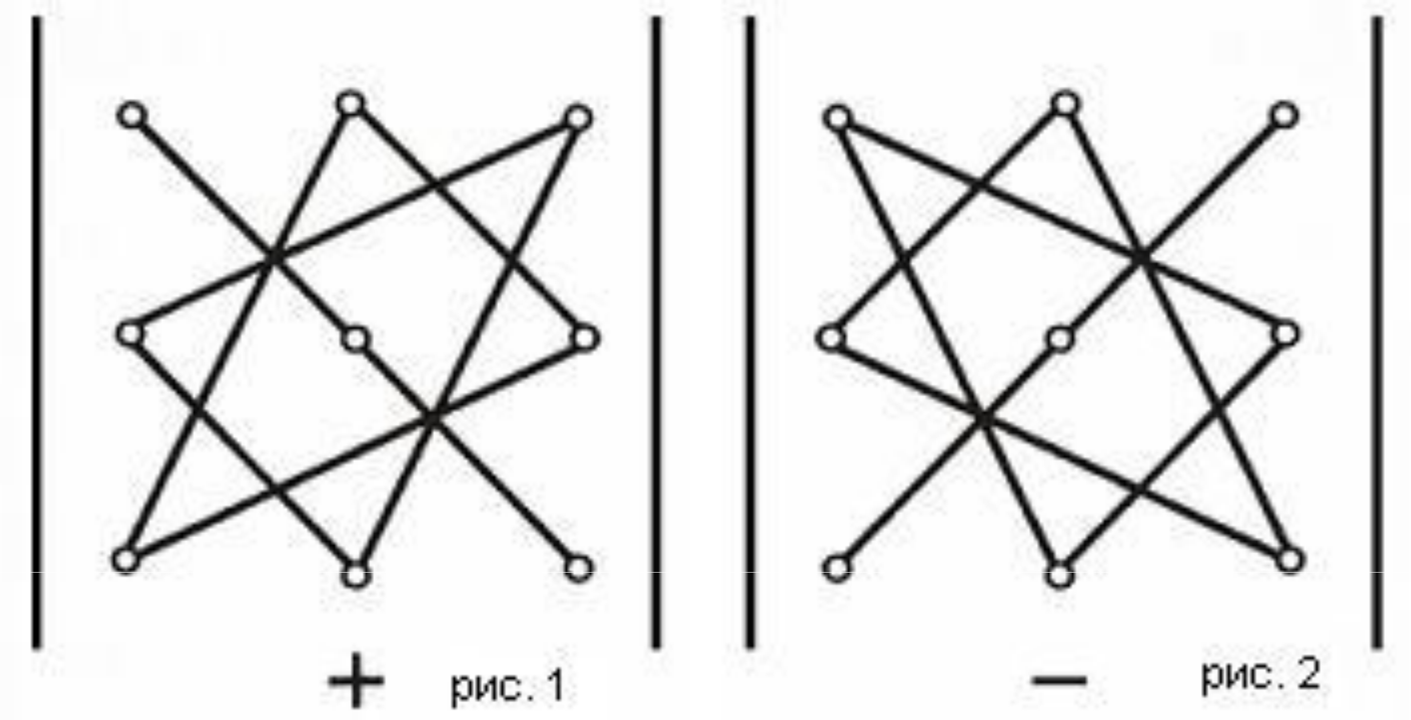
9. Если все элементы какого-нибудь ряда определителя, кроме одного, равны нулю, то определитель равен этому не равному нулю элементу, умноженному на его алгебраическое дополнение.

10. Если хотя бы один ряд (строка или столбец) состоит из нулей, то определитель равен нулю.

11. Если в определителе все элементы одного ряда представлены в виде суммы двух слагаемых, то он равен сумме двух определителей.

12. det(AB)=det(A)*det(B)

Схема для вычисления определителя 3-го порядка



По схеме рис.1. произведения соединенных элементов берутся со своим знаком, а по схеме рис. 2 - с обратным. Величина определителя равна алгебраической сумме полученных шести произведений.

Алгебраическим дополнением элемента в определителе порядка n, стоящего на пересечении k-го столбца и i-й строки, называется определитель порядка (n - 1), получаемый из данного вычеркиванием в нем строки и столбца, на пересечении которых стоит этот элемент, причем к этому определителю присоединяется множитель $(-1)^{k+l}$, где ($k + i$) - сумма номеров вычеркнутой строки и столбца.

Минором элемента называется алгебраическое дополнение элемента, рассматриваемое без множителя $(-1)^{k+\mathrm{i}}$.

Разложение определителя

- по элементам i-й строки:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}.$$

- по элементам j-го столбца:

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}.$$

Пример. В определителе 5-го порядка

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

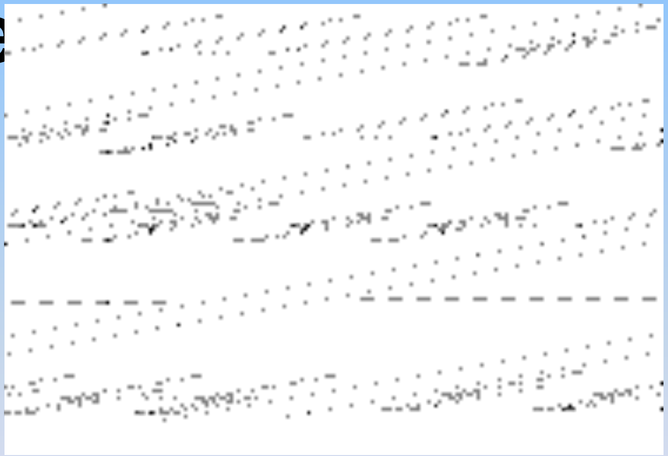
алгебраическим дополнением, соответствующим элементу d_3, будет о порядка

$$(-1)^{3+4} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & e_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & e_5 \end{vmatrix}.$$

Здесь в показателе степени у (-1) три - номер строки, четыре - номер столбца, на пересечении которых стоит элемент d_3.

Определитель, где все элементы, лежащие по одну сторону одной из диагоналей, равны нулю, называется **ре**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

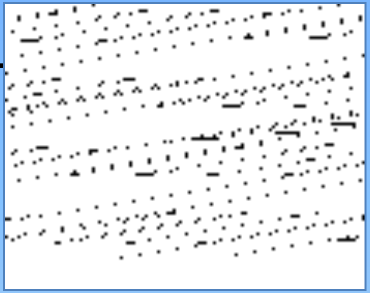


Решение задач на тему «Определители 2-го, 3-го, n-го порядка»

Пример 1. Вычислить определител

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Пример 2. Вычислить определител



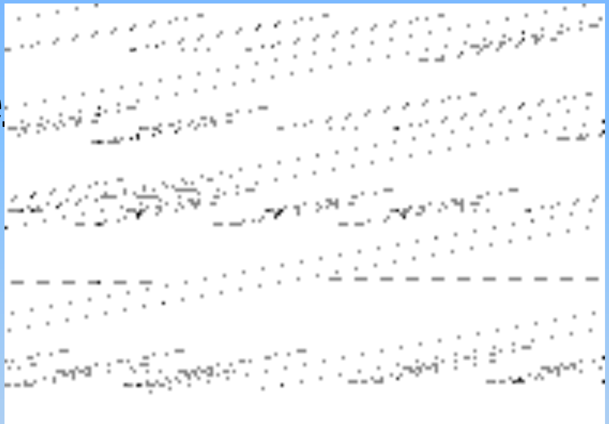
Пример 3. Вычислить определител

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Пример 4. Не вычисляя определителя , показать, что он равен нулю.

Пример 5. Вычислить определитель, разложив его по элементам второго столбца.

Пример 6. Вычислить определите



Пример 7. Вычислить определите

Вопросы самоконтроля

- Определитель $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 11 \\ 0 & 2\alpha - 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$ при α равном:

1) 2

2) 0

3) 1

4) 0,5

Вопросы самоконтроля

- **Определитель** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ **. Тогда определитель** $3 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ **равен:**

1) $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} a_{11}+3 & a_{12}+3 & a_{13}+3 \\ a_{21}+3 & a_{22}+3 & a_{23}+3 \\ a_{31}+3 & a_{32}+3 & a_{33}+3 \end{vmatrix}$