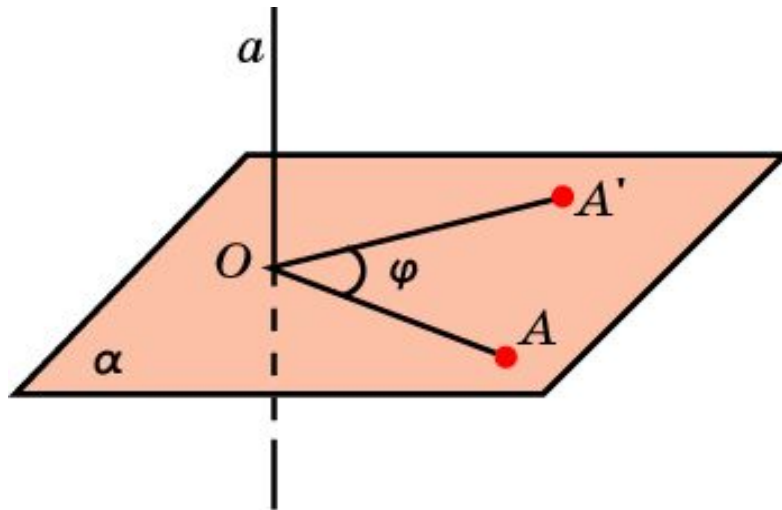


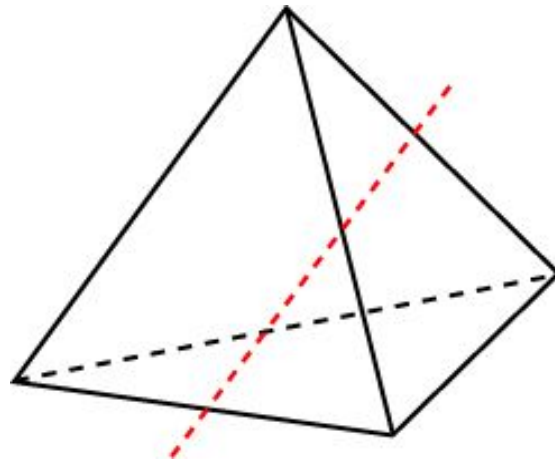
ПОВОРОТ

Пусть теперь в пространстве задана прямая a и точка A , не принадлежащая этой прямой. Через точку A проведем плоскость α , перпендикулярную прямой a , и точку пересечения a и α обозначим O . Говорят, что точка A' пространства получается из точки A поворотом вокруг прямой a на угол φ , если в плоскости α точка A' получается из точки A поворотом вокруг центра O на угол φ . Преобразование пространства, при котором точки прямой a остаются на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг этой прямой (в одном и том же направлении) на угол φ называется **поворотом**, или **вращением**. Прямая a при этом называется **осью вращения**.



Упражнение 1

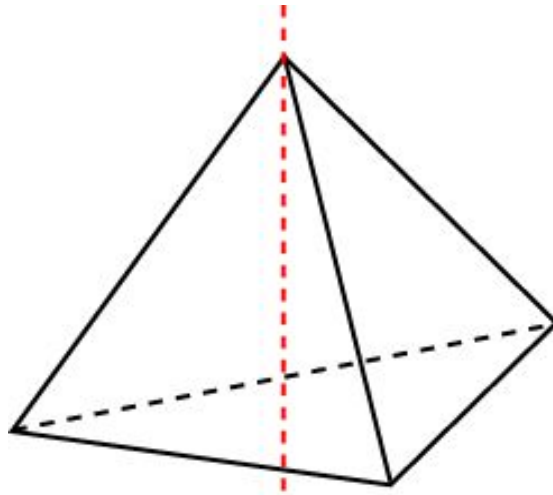
На какой угол нужно повернуть правильный тетраэдр вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ: 180° .

Упражнение 2

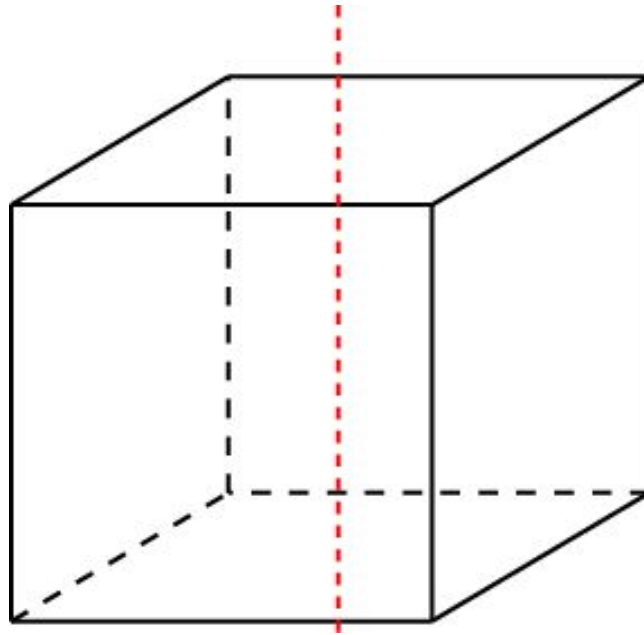
На какой наименьший угол нужно повернуть правильный тетраэдр вокруг прямой, содержащей его высоту, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ: 120° .

Упражнение 3

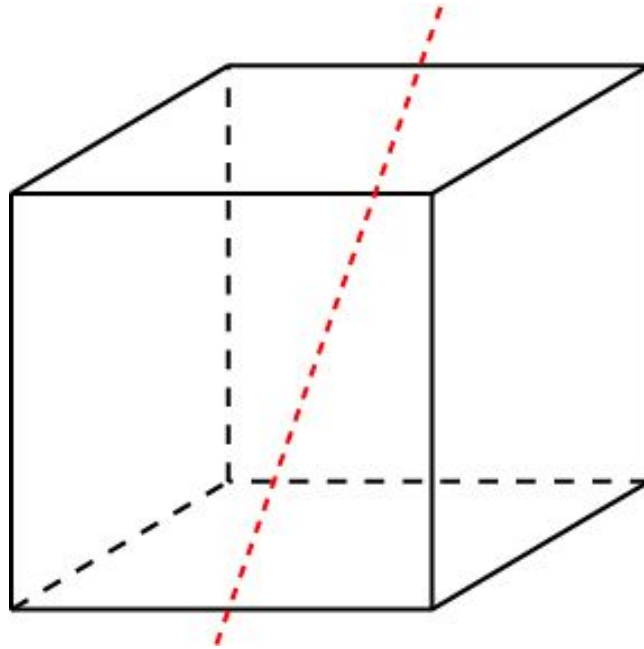
На какой наименьший угол нужно повернуть куб вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ: 90° .

Упражнение 4

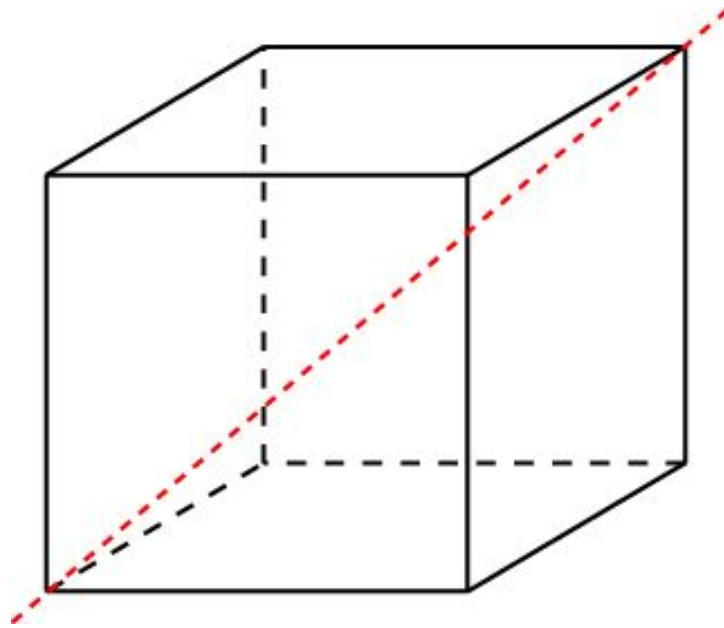
На какой наименьший угол нужно повернуть куб вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ: 180° .

Упражнение 5

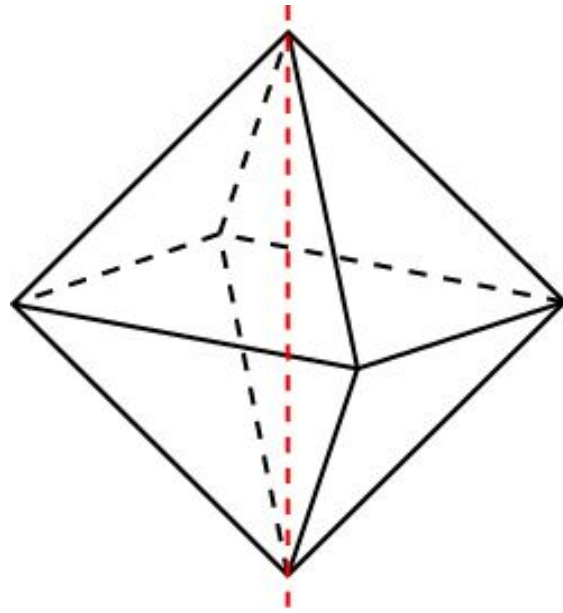
На какой наименьший угол нужно повернуть куб вокруг прямой, проходящей через противоположные вершины, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ: 120° .

Упражнение 6

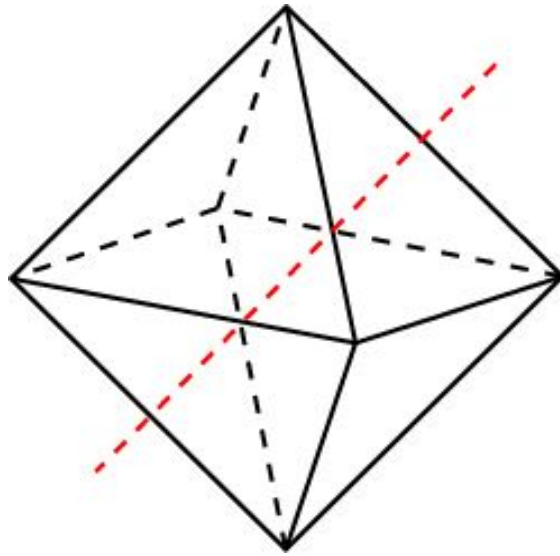
На какой наименьший угол нужно повернуть октаэдр вокруг прямой, проходящей через противоположные вершины, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ: 90° .

Упражнение 7

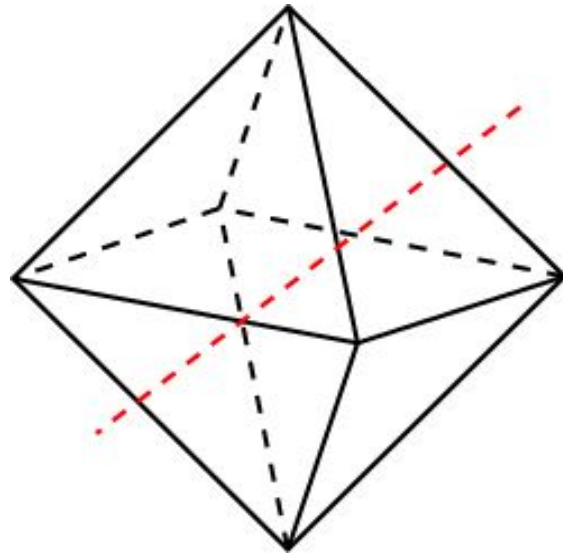
На какой наименьший угол нужно повернуть октаэдр вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ: 180° .

Упражнение 8

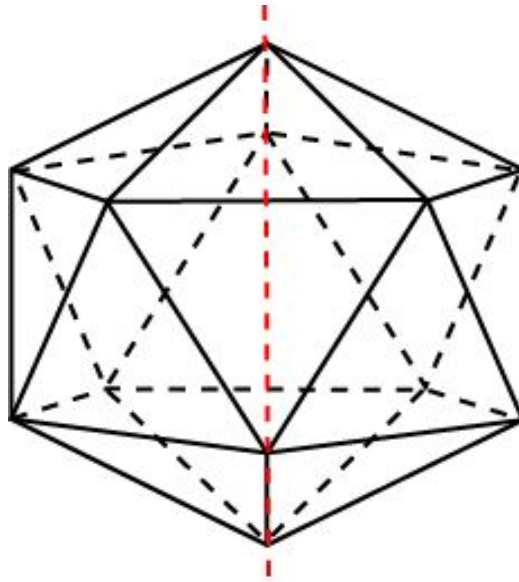
На какой наименьший угол нужно повернуть октаэдр вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ: 120° .

Упражнение 9

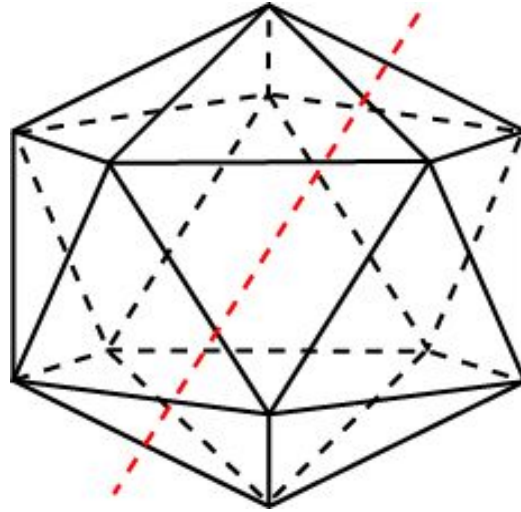
На какой наименьший угол нужно повернуть икосаэдр вокруг прямой, проходящей через противоположные вершины, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ: 72° .

Упражнение 10

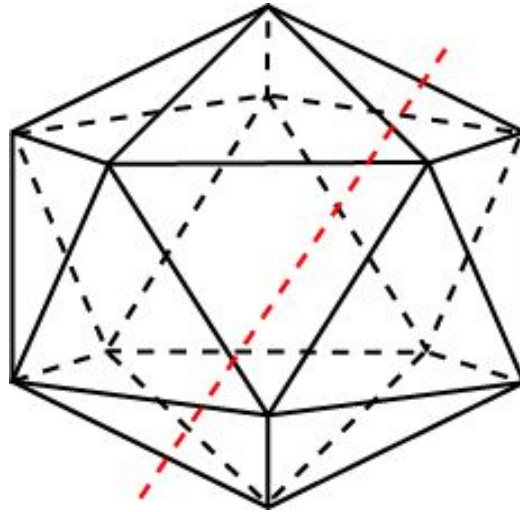
На какой наименьший угол нужно повернуть икосаэдр вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ: 180° .

Упражнение 11

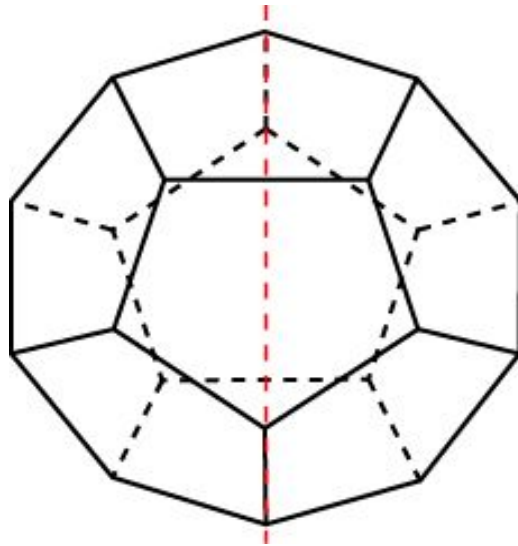
На какой наименьший угол нужно повернуть икосаэдр вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ: 120° .

Упражнение 12

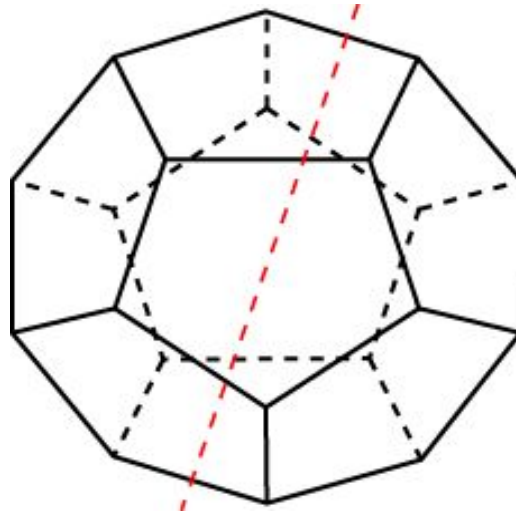
На какой наименьший угол нужно повернуть додекаэдр вокруг прямой, проходящей через противоположные вершины, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ: 120° .

Упражнение 13

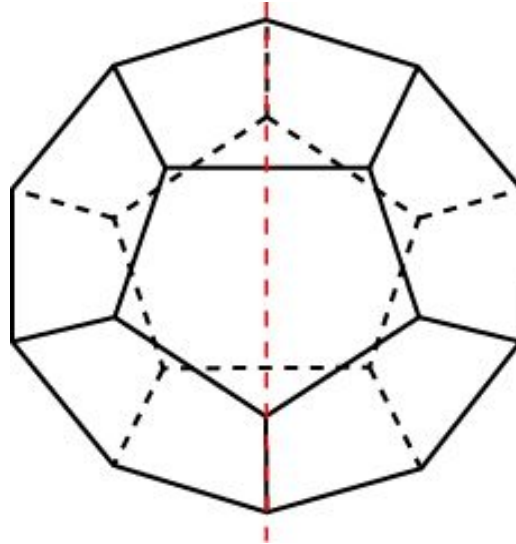
На какой наименьший угол нужно повернуть додекаэдр вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ: 180° .

Упражнение 14

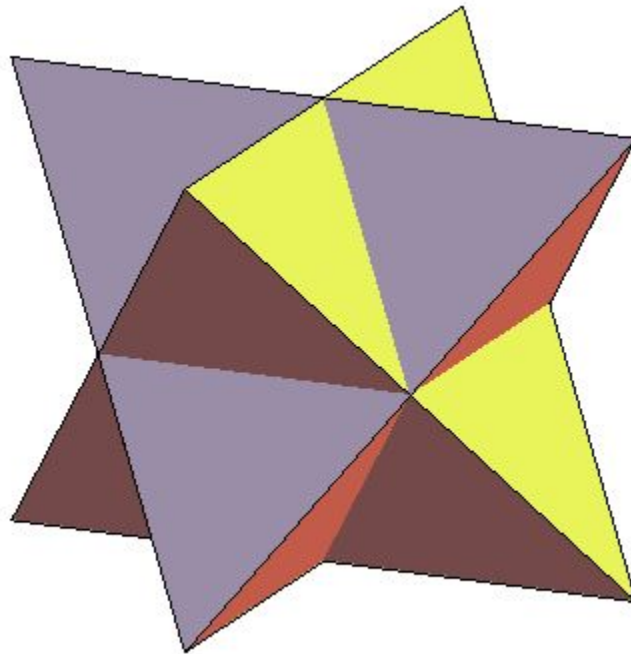
На какой наименьший угол нужно повернуть додекаэдр вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ: 72° .

Упражнение 15

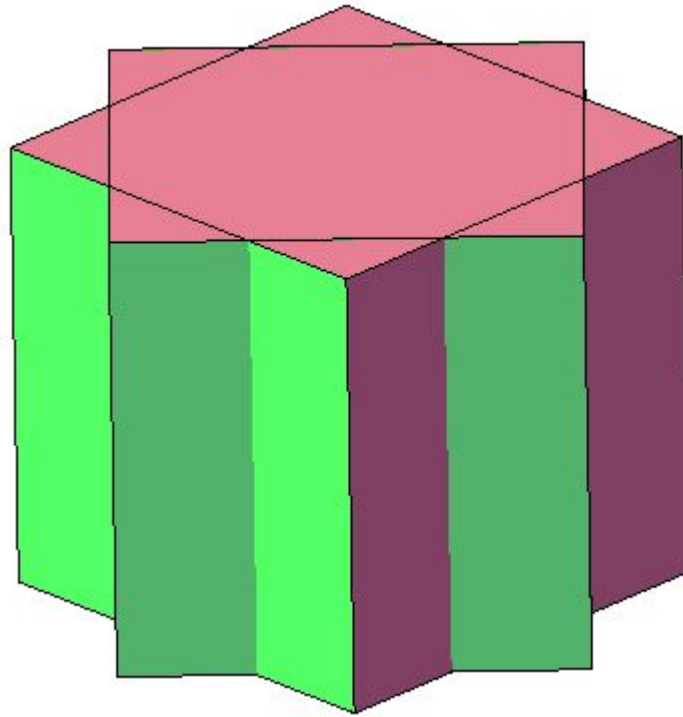
Тетраэдр повернут вокруг прямой, соединяющей середины противоположных ребер, на угол 90° . Какая фигура является объединением и пересечением исходного тетраэдра и повернутого?



Ответ: Звезда Кеплера, октаэдр.

Упражнение 16

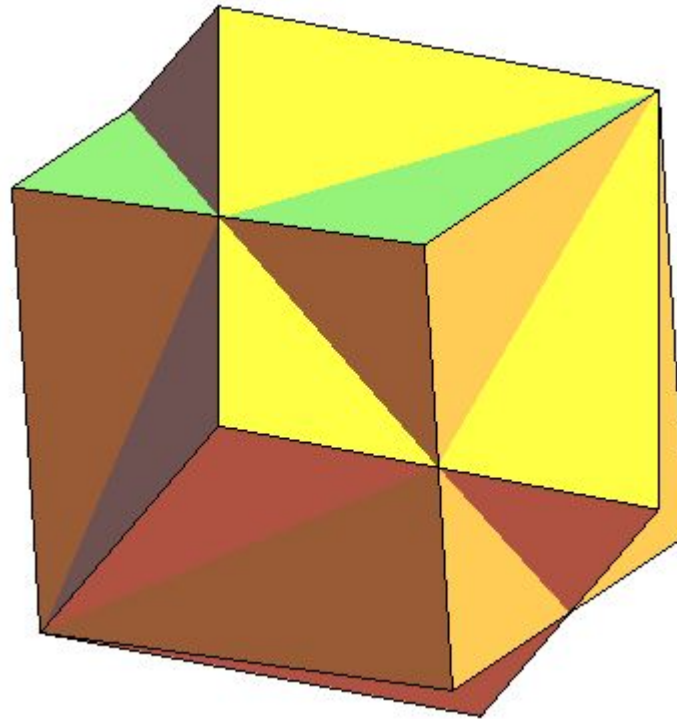
Куб повернут вокруг прямой, соединяющей центры противоположных граней, на угол 45° . Какая фигура является общей частью исходного куба и повернутого?



Ответ: Правильная 8-я призма.

Упражнение 17

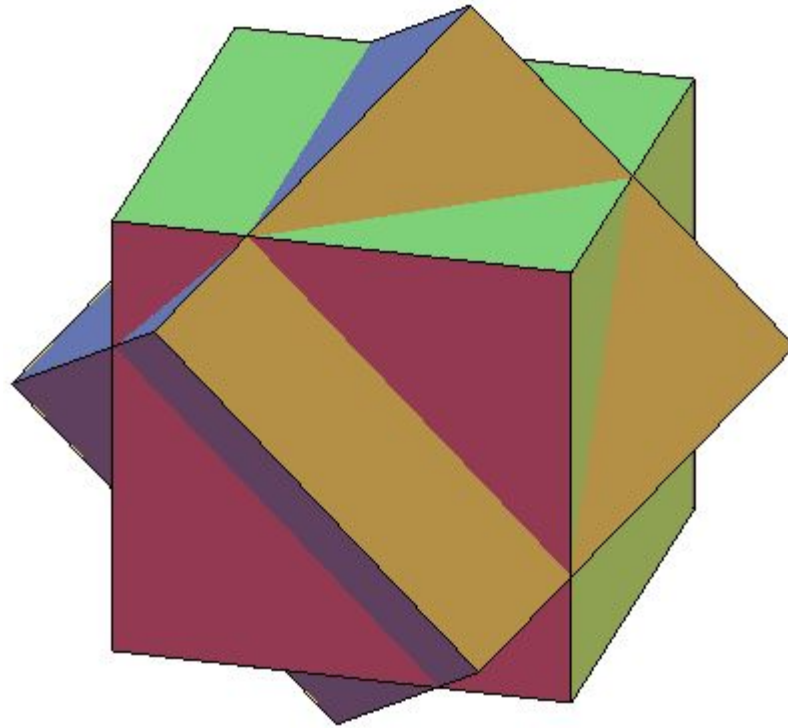
Куб повернут вокруг диагонали на угол 60° . Какая фигура является общей частью исходного куба и повернутого?



Ответ: Правильная 6-я бипирамида.

Упражнение 18

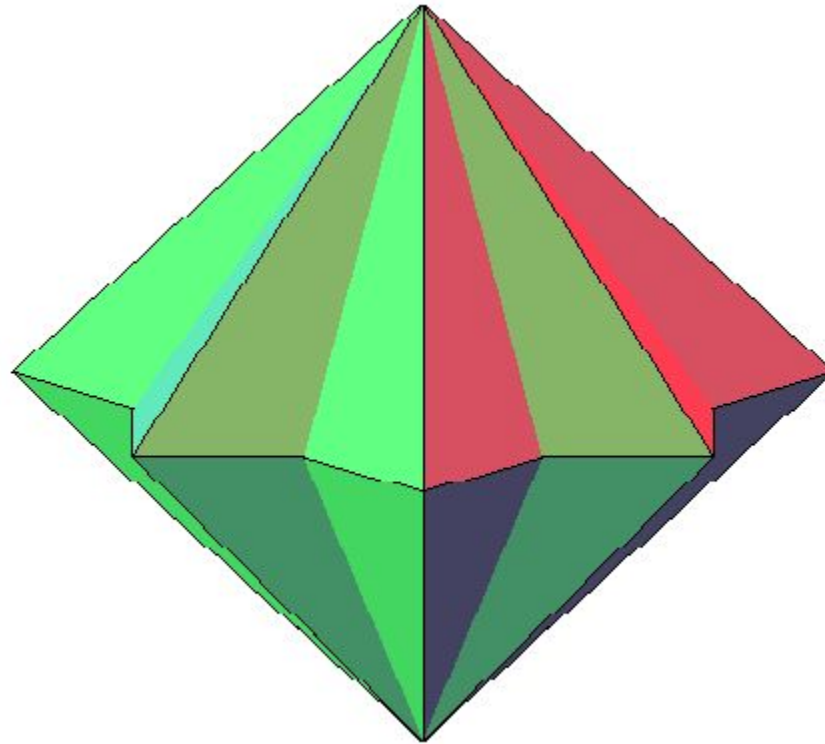
Куб повернут вокруг прямой, соединяющей середины противоположных ребер, на угол 90° . Какая фигура является общей частью исходного куба и повернутого?



Ответ: Две правильные 4-е пирамиды, поставленные на основания правильной 4-ой призмы.

Упражнение 19

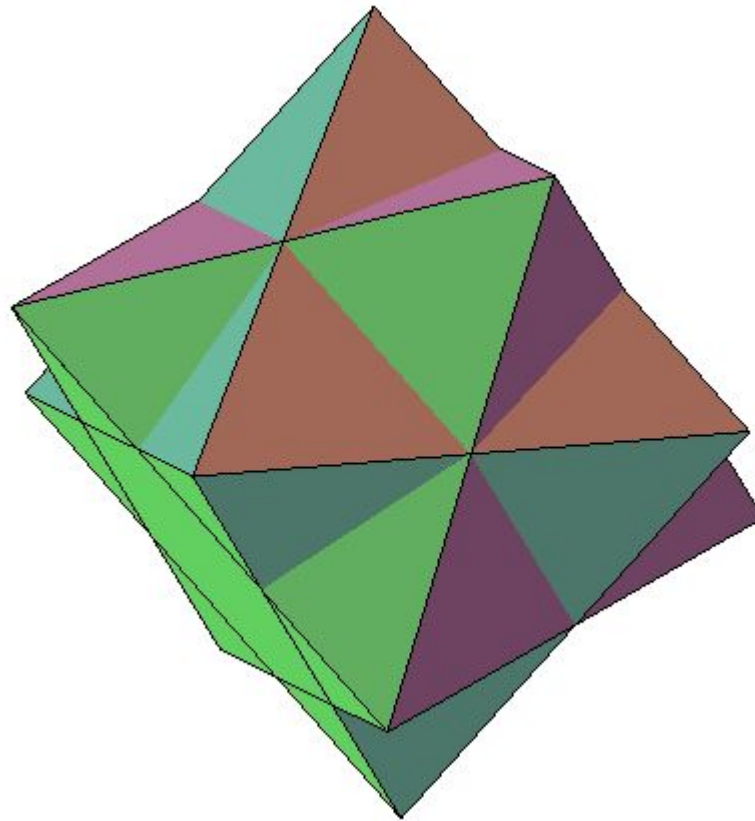
Октаэдр повернут вокруг прямой, соединяющей противоположные вершины, на угол 45° . Какая фигура является общей частью исходного октаэдра и повернутого?



Ответ: Правильная 8-я бипирамида.

Упражнение 20

Октаэдр повернут вокруг прямой, соединяющей центры противоположных граней, на угол 60° . Какая фигура является общей частью исходного октаэдра и повернутого?

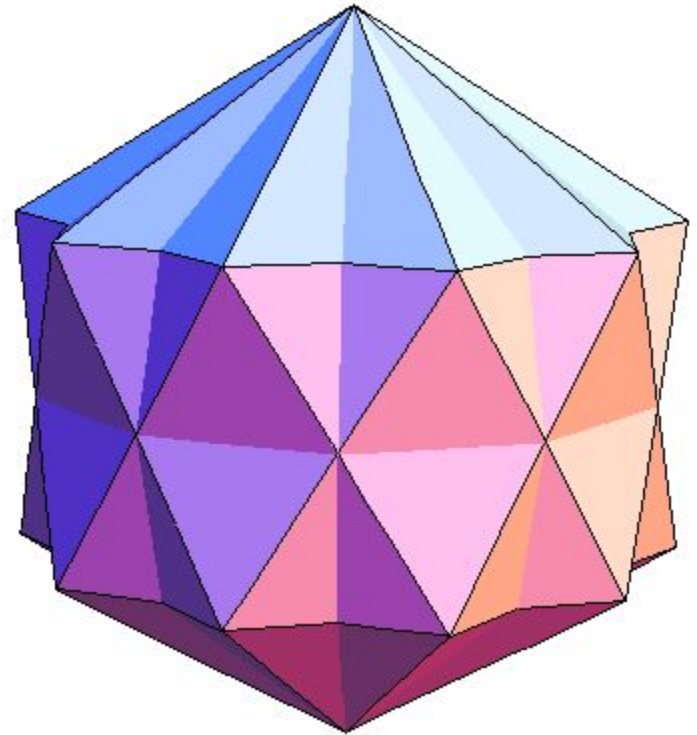


Ответ: Правильная усеченная 6-я бипирамида.

Упражнение 21

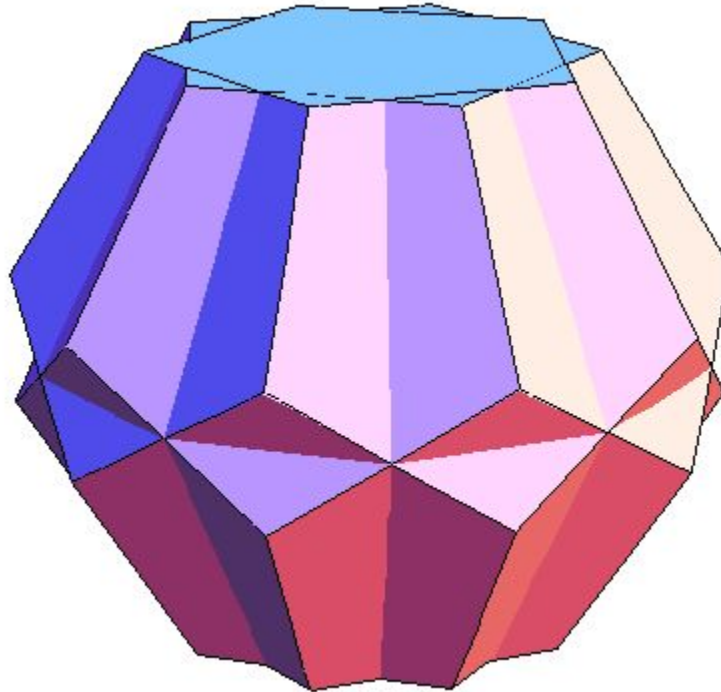
Икосаэдр повернут вокруг прямой, соединяющей противоположные вершины, на угол 36° . Какая фигура является общей частью исходного икосаэдра и повернутого?

Ответ: Правильная усеченная 10-я бипирамида, на основания которой поставлены правильные 10-угольные пирамиды.



Упражнение 22

Додекаэдр повернут вокруг прямой, соединяющей центры противоположных граней, на угол 36° . Какая фигура является общей частью исходного додекаэдра и повернутого?



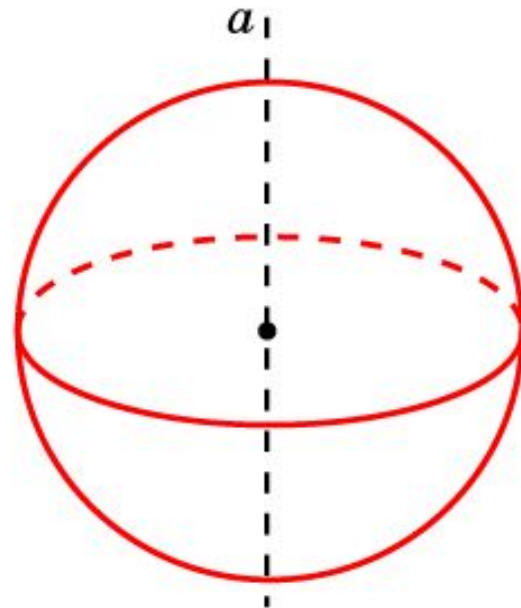
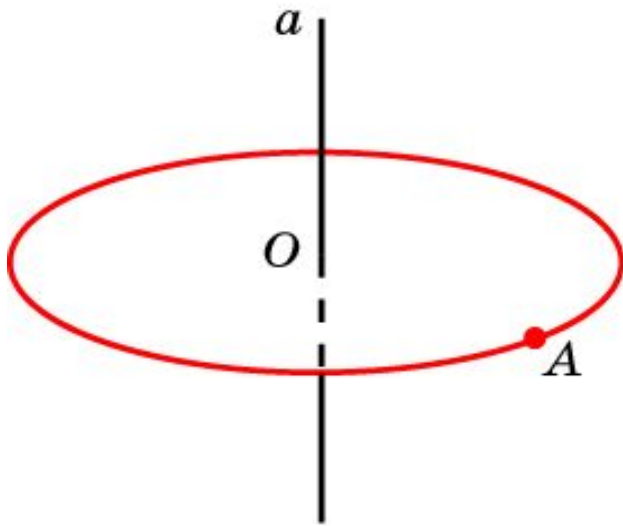
Ответ: Правильная усеченная 10-я бипирамида

ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

Говорят, что фигура Φ в пространстве получена вращением фигуры F вокруг оси a , если точки фигуры Φ получаются всевозможными поворотами точек фигуры F вокруг оси a . Фигура Φ при этом называется **фигурой вращения**.

При вращении точки A вокруг прямой a получается **окружность**.

Сфера получается вращением окружности вокруг ее диаметра. Аналогично, **шар** получается вращением круга вокруг какого-нибудь его диаметра.

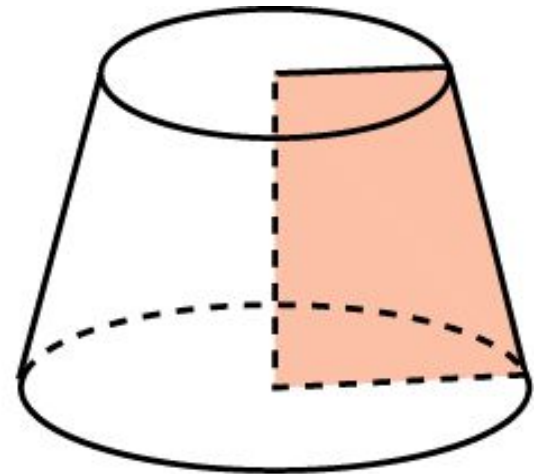
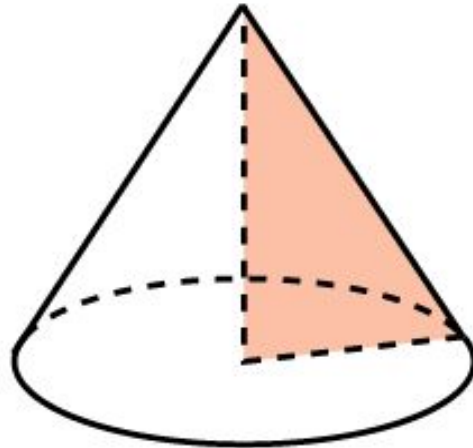
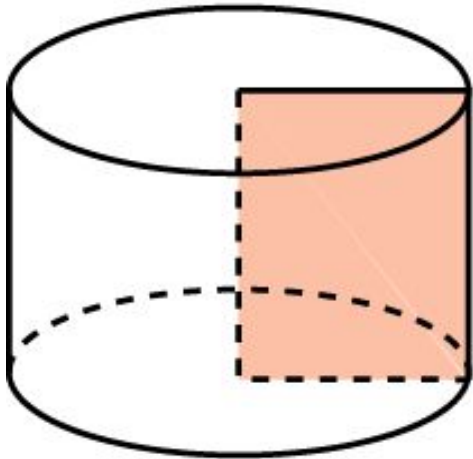


ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

Цилиндр получается вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

Конус получается вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.

Усеченный конус получается вращением трапеции, один из углов которой является прямым, вокруг боковой стороны, прилегающей к этому углу.

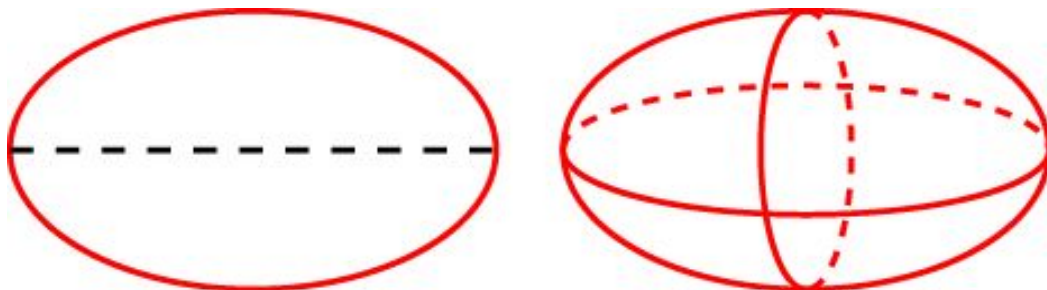


ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

Если окружность вращать вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности и не имеющей с этой окружностью общих точек, то полученная поверхность вращения называется **тором** и по форме напоминает баранку или бублик.

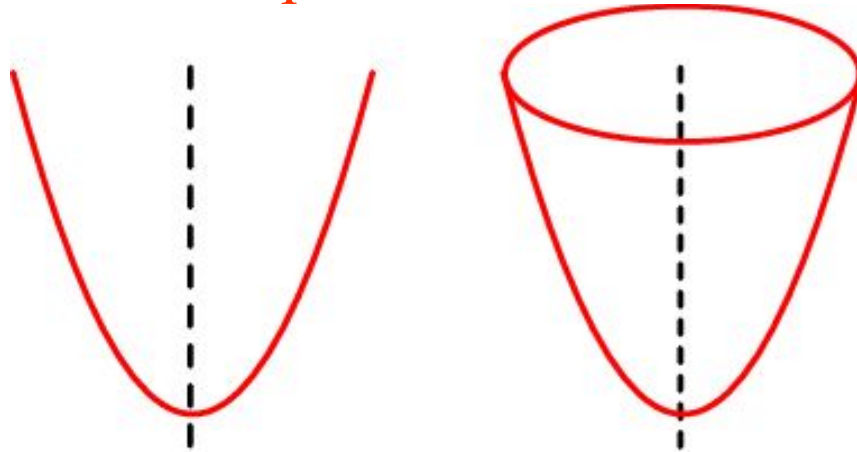


При вращении эллипса вокруг его оси получается поверхность, называемая **эллипсоидом вращения**.



ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

При вращении параболы вокруг ее оси получается поверхность, называемая **параболоидом вращения**.

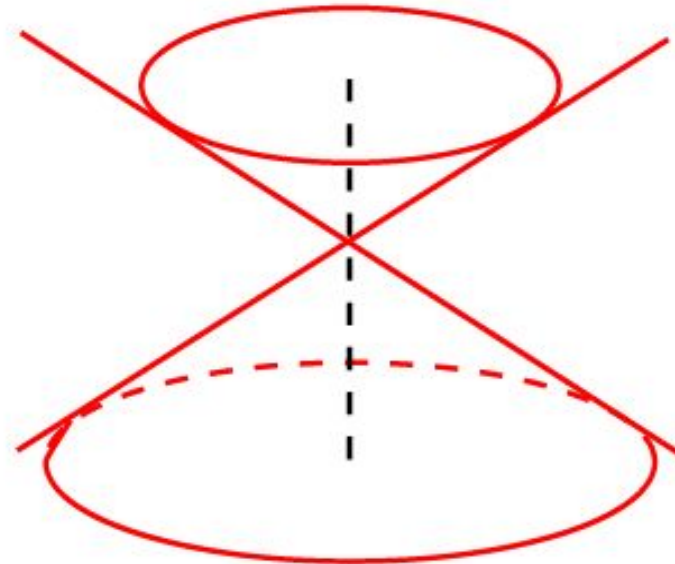
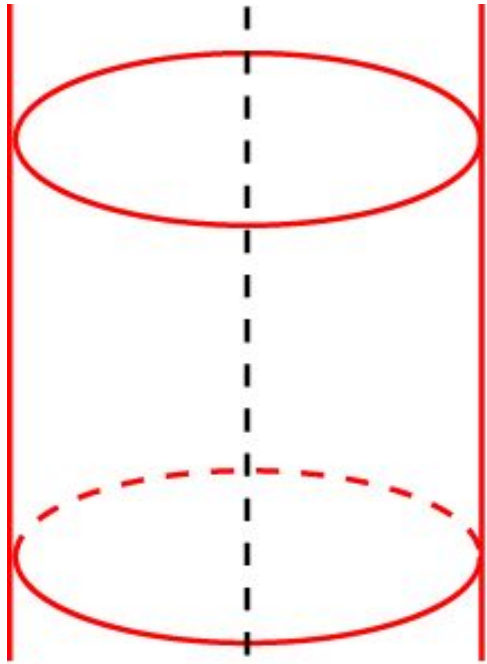


При вращении гиперболы вокруг ее оси получается поверхность, называемая **гиперболоидом вращения**.



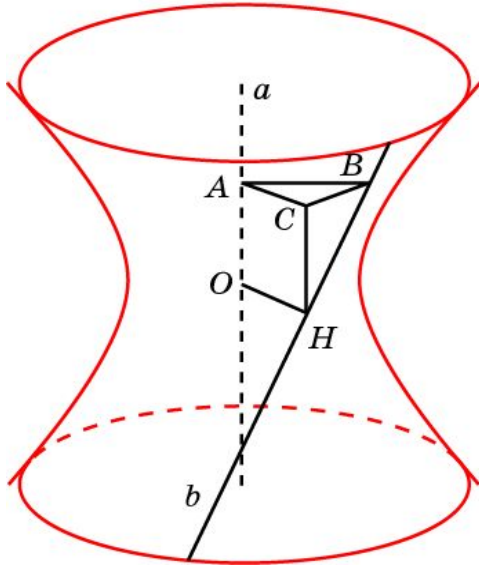
ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

Если прямая параллельна оси, то при вращении получается фигура, называемая **цилиндрической поверхностью**. Если прямая пересекает ось, то при вращении получается фигура, называемая **конической поверхностью**.



ГИПЕРБОЛОИД ВРАЩЕНИЯ

Теорема. При вращении прямой, скрещивающейся с осью вращения, получается гиперboloид вращения.



Доказательство. Пусть a и b - скрещивающиеся прямые, OH - их общий перпендикуляр длины d . Рассмотрим произвольную точку B на прямой b , отличную от H , и опустим из нее перпендикуляр BA на прямую a . При вращении точка B описывает окружность, радиус которой равен AB . Через точку H проведем прямую, параллельную a , и через точку A - прямую, параллельную OH . Точку пересечения этих прямых обозначим C .

Пусть расстояние AB равно x , расстояние OA равно y и угол BHC равен α . Треугольник ABC - прямоугольный, катет AC равен d , катет BC равен $y \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Поэтому выполняется равенство $x^2 = d^2 + y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$. Перенеся слагаемое, содержащее y , в левую часть равенства и разделив обе части полученного равенства на d^2 , получим уравнение $\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{d^2} = 1$, которое представляет собой уравнение гиперболы. При вращении этой гиперболы получается та же самая фигура, что и при вращении прямой, скрещивающейся с осью вращения. Следовательно, искомой фигурой вращения является гиперboloид вращения.

Упражнение 1

Какая фигура получается при вращении отрезка OA вокруг прямой, проходящей через точку O и перпендикулярной OA ?

Ответ: Круг.

Упражнение 2

Назовите прямые, при вращении вокруг которых данного прямоугольника получается цилиндр.

Ответ: Прямые, пересекающие прямоугольник по отрезку, параллельному его стороне.

Упражнение 3

Какая фигура получается при вращении равнобедренного треугольника вокруг прямой, содержащей высоту, опущенную на основание этого треугольника?

Ответ: Конус.

Упражнение 4

Какая фигура получается при вращении полукруга вокруг прямой, содержащей диаметр?

Ответ: Круг.

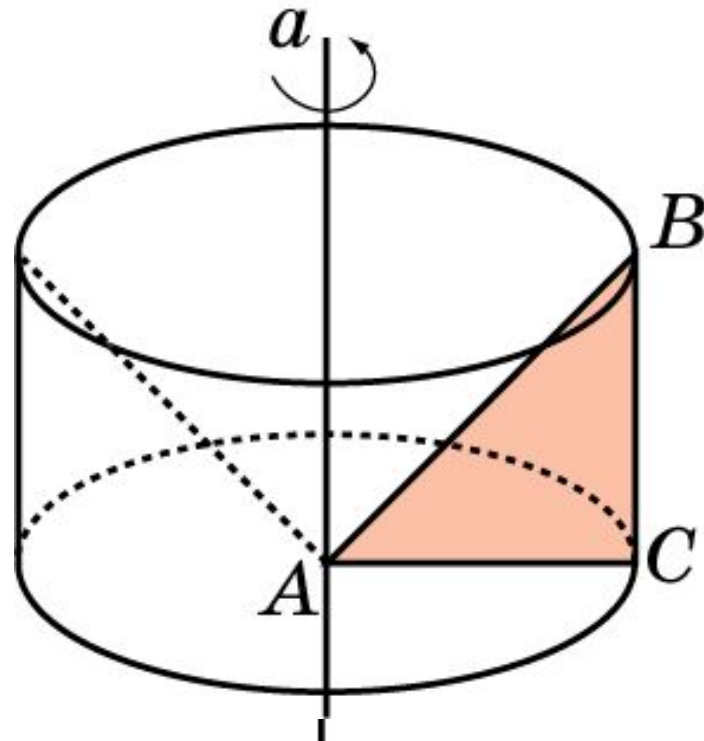
Упражнение 5

Какая фигура получается вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его катет?

Ответ: Конус.

Упражнение 6

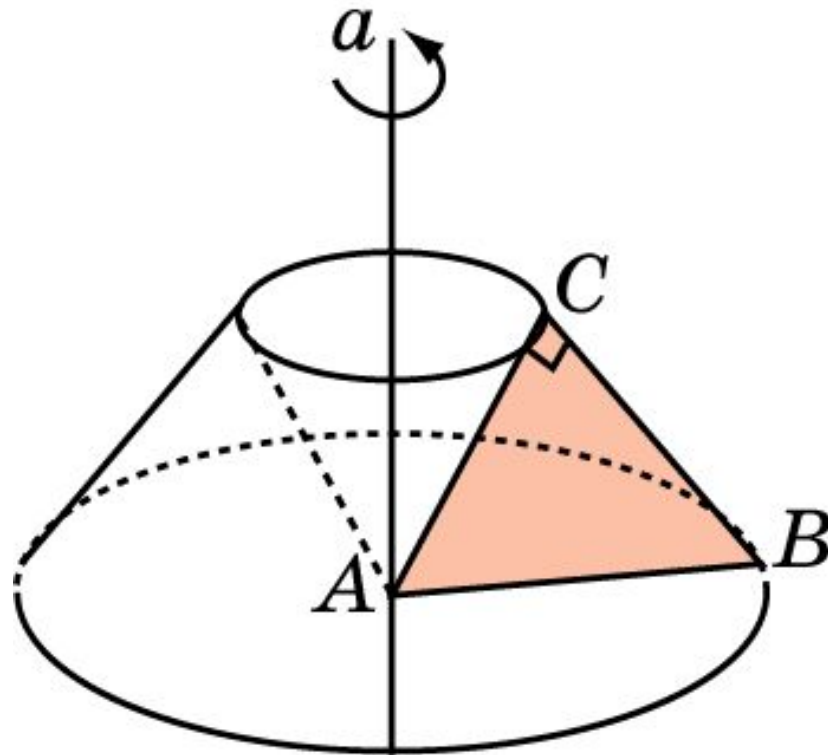
Какая фигура получается вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг прямой a , проходящей через вершину A острого угла, и параллельную катету BC ?



Ответ: Цилиндр, из которого вырезан конус.

Упражнение 7

Какая фигура получается вращением равнобедренного прямоугольного треугольника ABC вокруг прямой a , лежащей в плоскости этого треугольника, перпендикулярной гипотенузе AB и проходящей через вершину A острого угла.



Ответ: Усеченный конус, из которого вырезан конус.

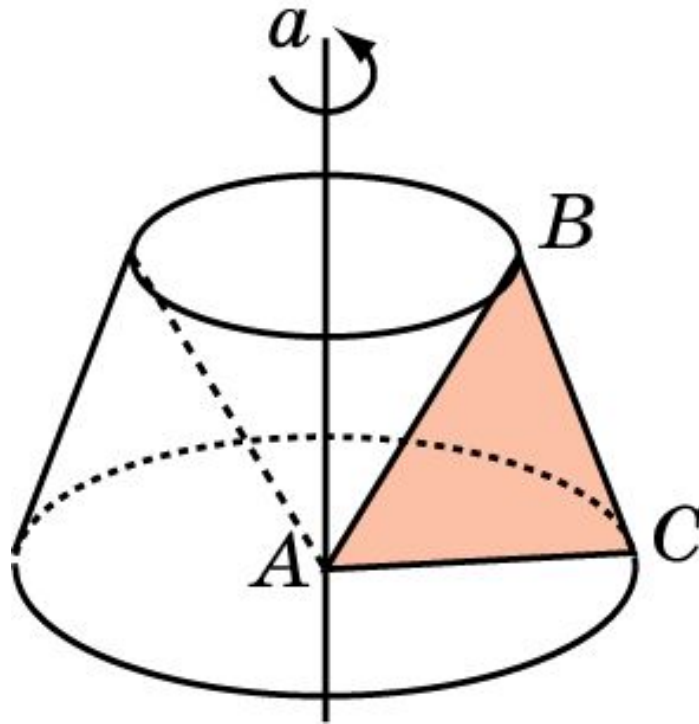
Упражнение 8

Какая фигура получается вращением остроугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его сторону?

Ответ: Фигура, состоящая из двух конусов с общим основанием.

Упражнение 9

Какая фигура получается вращением остроугольного треугольника вокруг прямой, лежащей в плоскости этого треугольника и проходящей через его вершину перпендикулярно стороне?



Ответ: Усечённый конус с вырезанным внутри конусом.

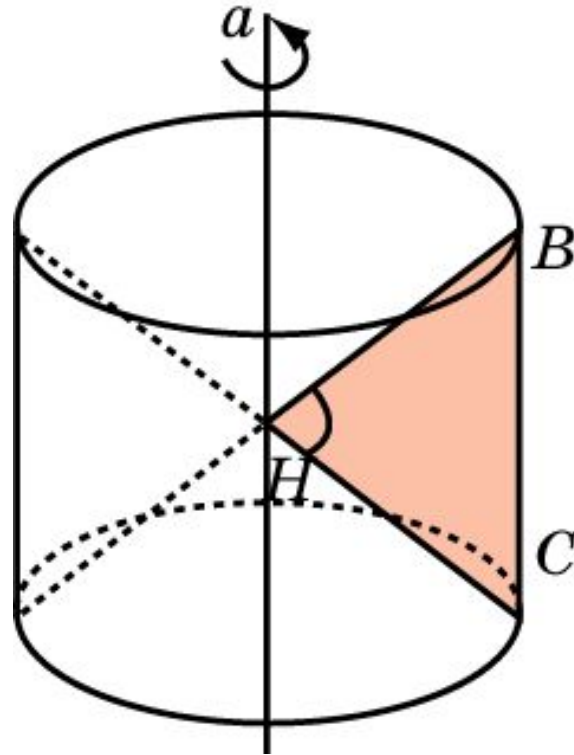
Упражнение 10

Какая фигура получается вращением тупоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его сторону, прилежащую к тупому углу?

Ответ: Фигура, полученная из конуса, вырезанием из него другого конуса.

Упражнение 11

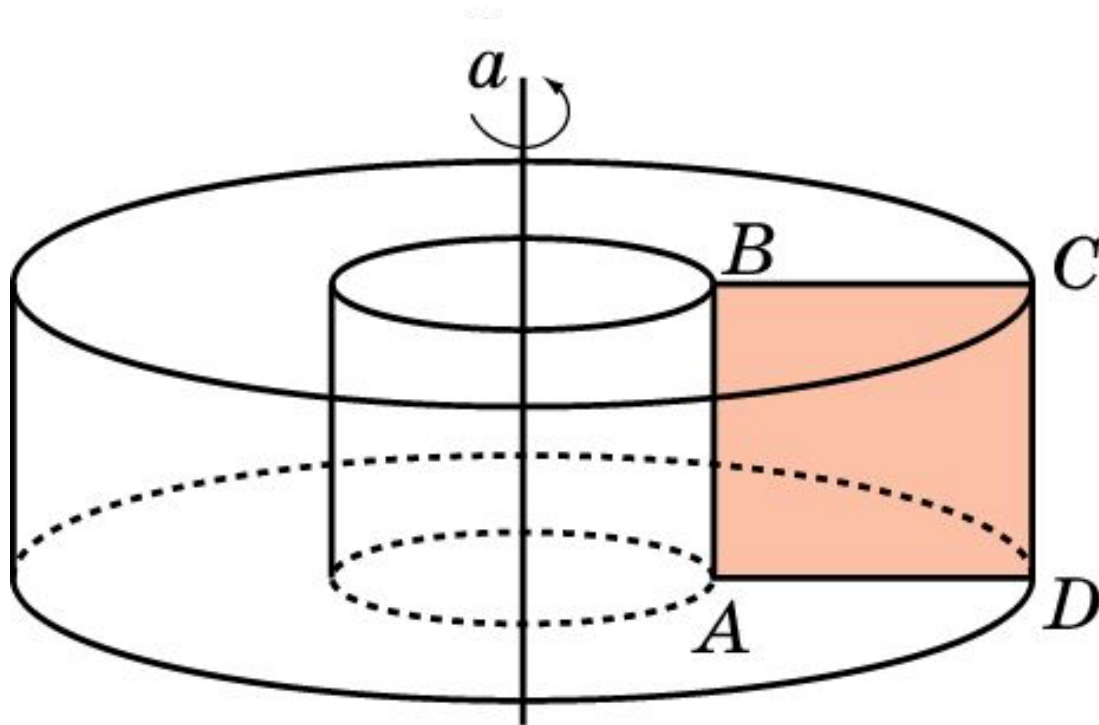
Какая фигура получается вращением тупоугольного треугольника вокруг прямой, лежащей в плоскости этого треугольника и проходящей через вершину тупого угла параллельно противоположной стороне?



Ответ: Цилиндр с вырезанными внутри двумя конусами, имеющими общую вершину.

Упражнение 12

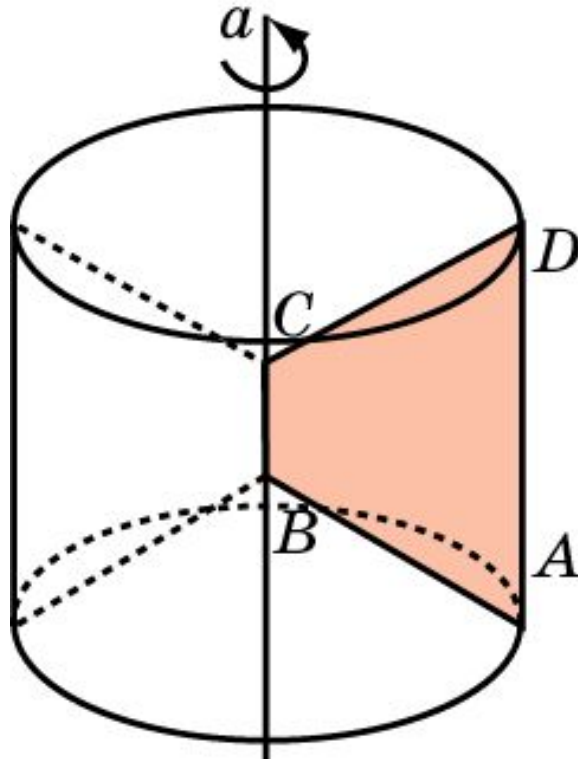
Какая фигура получается вращением прямоугольника вокруг прямой, лежащей в плоскости этого прямоугольника, параллельной его стороне, и не имеющей с ним общих точек?



Ответ: Фигура, полученная из цилиндра, вырезанием из него другого цилиндра.

Упражнение 13

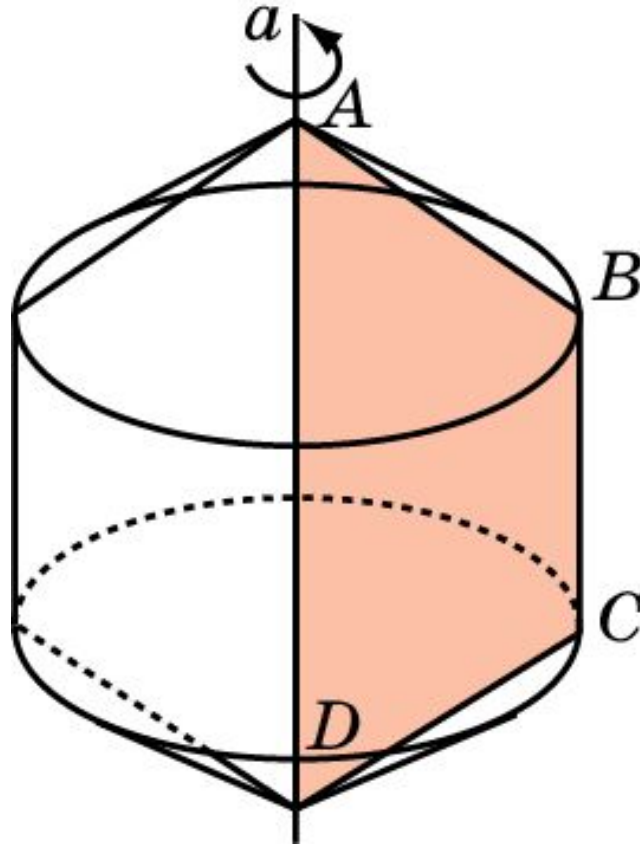
Какая фигура получается вращением трапеции вокруг прямой, содержащей меньшее её основание?



Ответ: Цилиндр с вырезанными внутри двумя конусами.

Упражнение 14

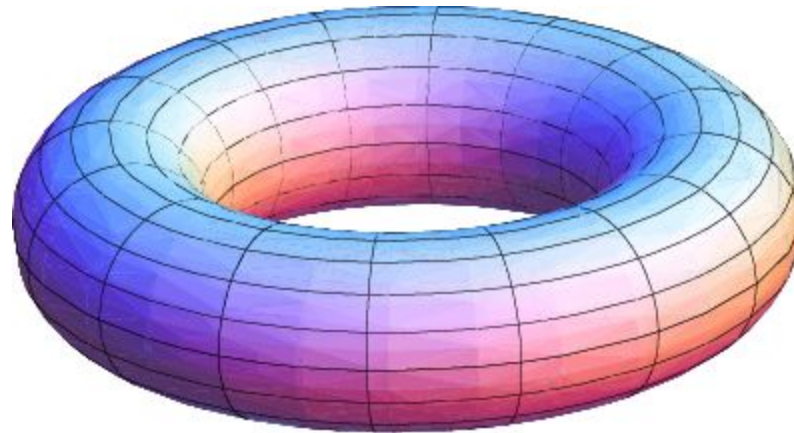
Какая фигура получается вращением трапеции вокруг прямой, содержащей большее её основание?



Ответ: Цилиндр, на основания которого поставлены конусы.

Упражнение 15

Вращением какой фигуры получается поверхность, изображенная на рисунке, называемая тором.



Ответ: Вращением окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности и не имеющей с этой окружностью общих точек.

Упражнение 16

Какая фигура получается при вращении куба вокруг прямой, соединяющей центры противоположных граней.

Ответ: Цилиндр.

Упражнение 17

Какая фигура получится при вращении правильной n -угольной призмы вокруг прямой, проходящей через центры ее оснований?

Ответ: Цилиндр.

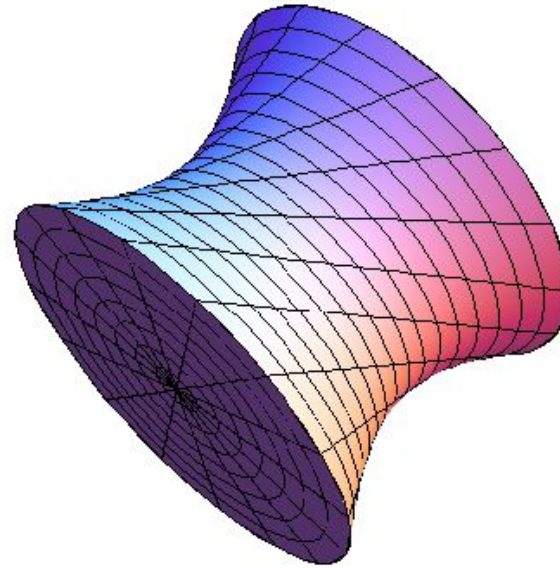
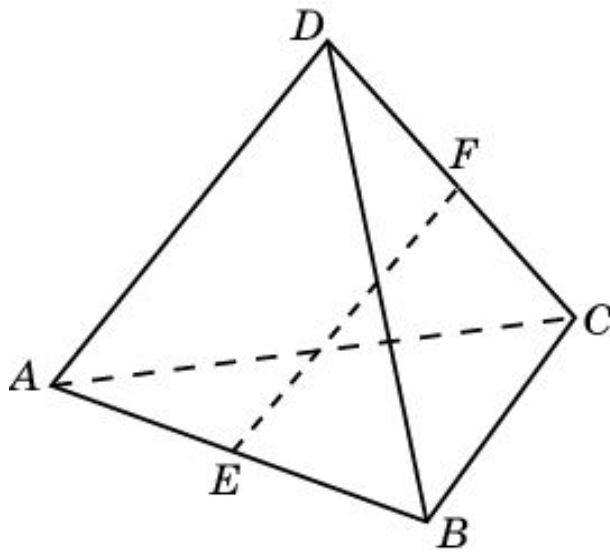
Упражнение 18

Какая фигура получается при вращении правильной n -угольной пирамиды вокруг прямой, содержащей ее высоту?

Ответ: Конус.

Упражнение 19

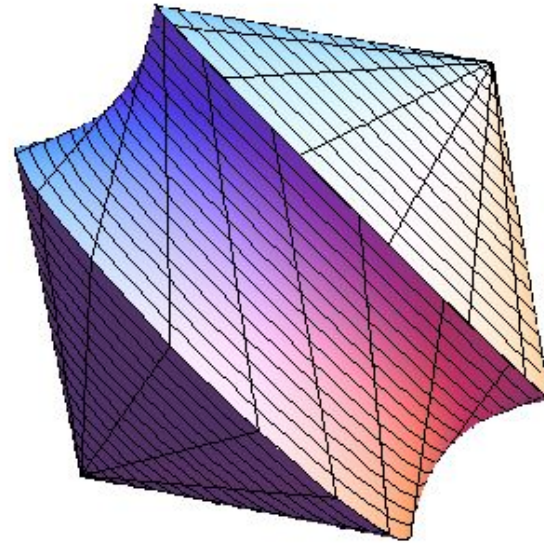
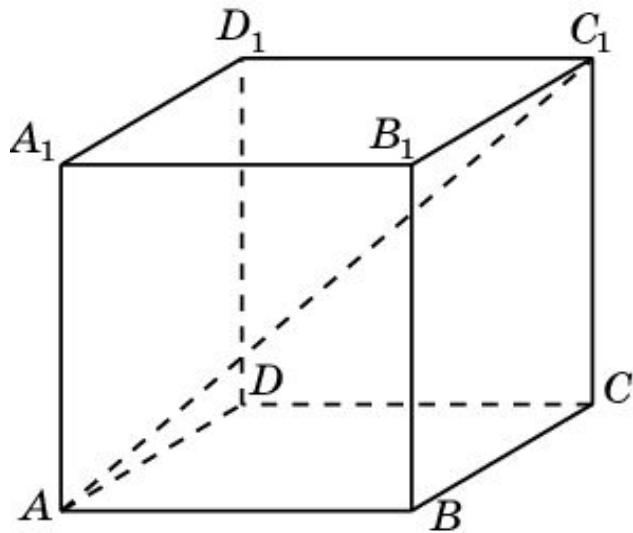
Какая фигура получается при вращении тетраэдра вокруг прямой, соединяющей середины скрещивающихся ребер?



Ответ: Фигура, ограниченная двумя кругами и гиперболоидом вращения.

Упражнение 20

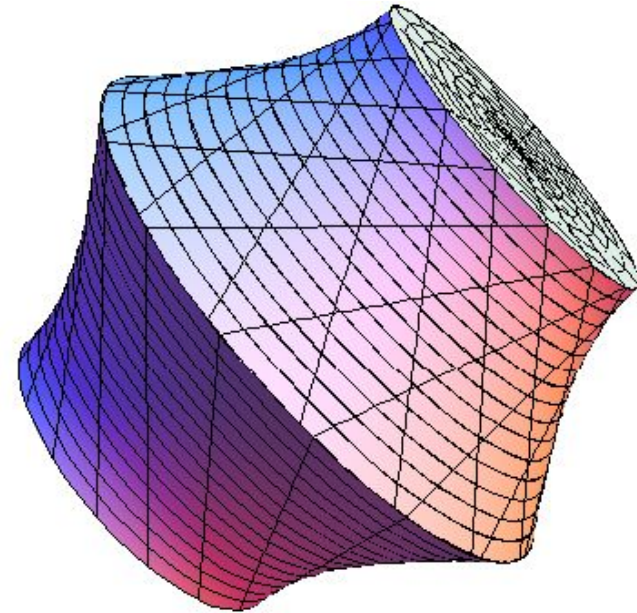
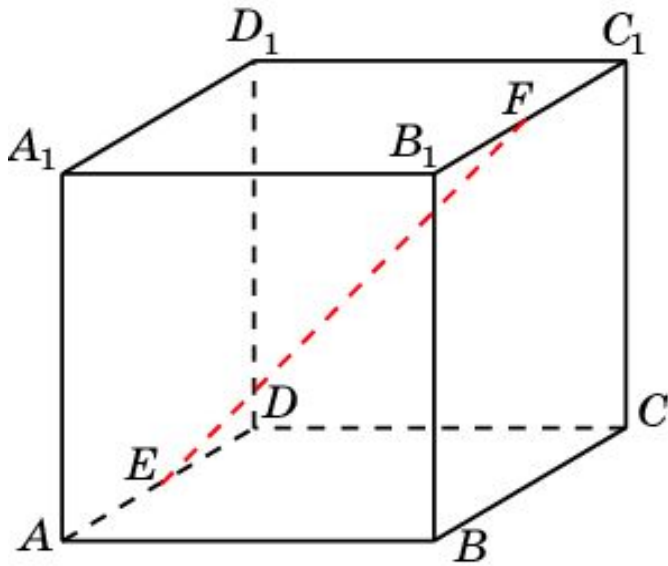
Какая фигура получается при вращении куба вокруг прямой, содержащей его диагональ?



Ответ. Фигура, поверхность которой состоит из боковых поверхностей двух конусов и гиперboloида вращения.

Упражнение 21

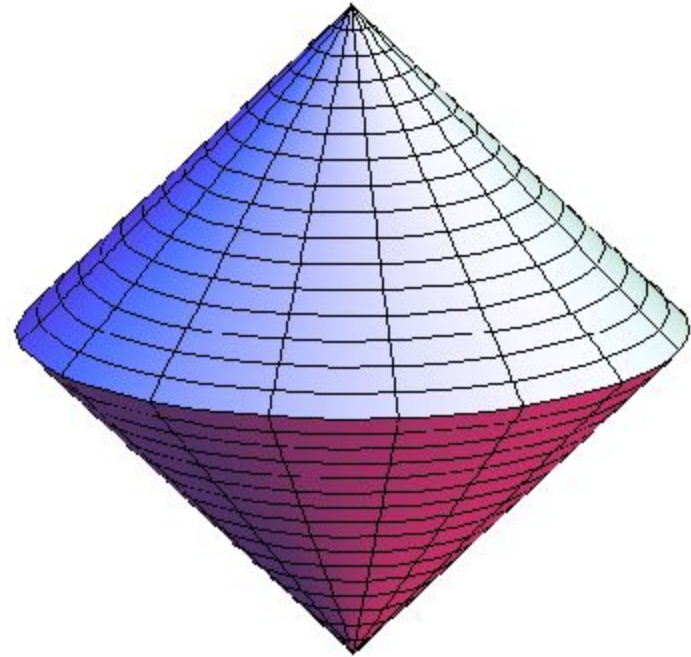
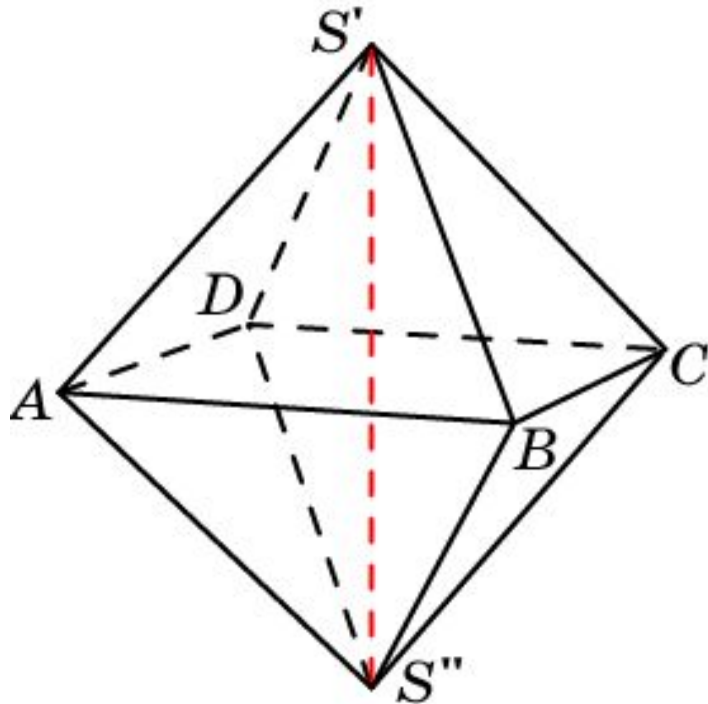
Какая фигура получается при вращении куба вокруг прямой, соединяющей середины двух противоположных ребер?



Ответ. Фигура, поверхность которой состоит из двух кругов и двух гиперболоидов вращения.

Упражнение 22

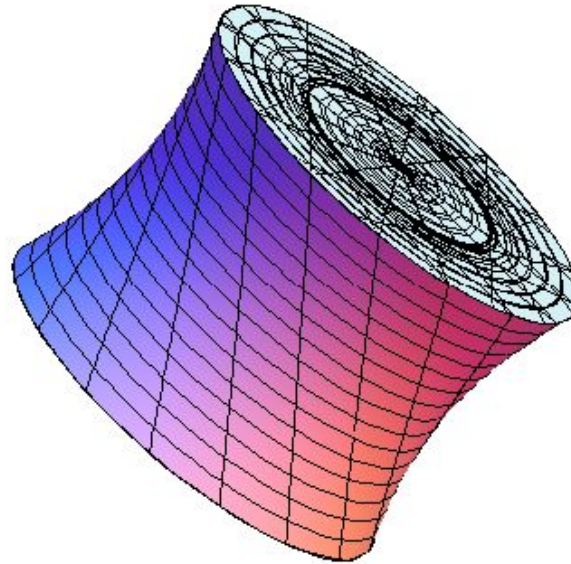
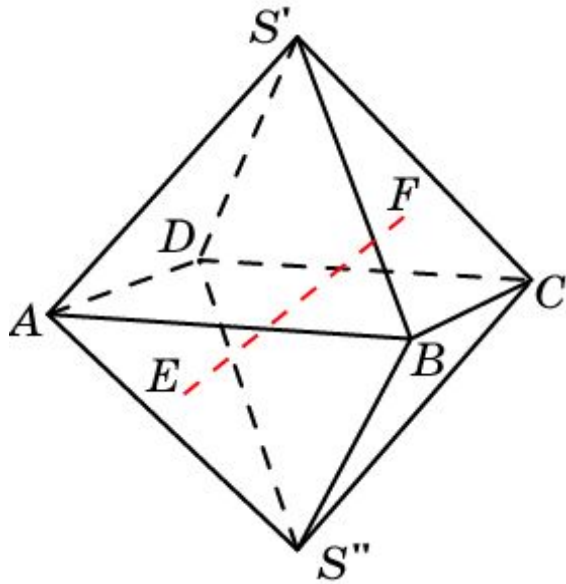
Какая фигура получается при вращении октаэдра вокруг прямой, проходящей через две противоположные вершины?



Ответ. Фигура, поверхность которой состоит из двух боковых поверхностей конусов.

Упражнение 23

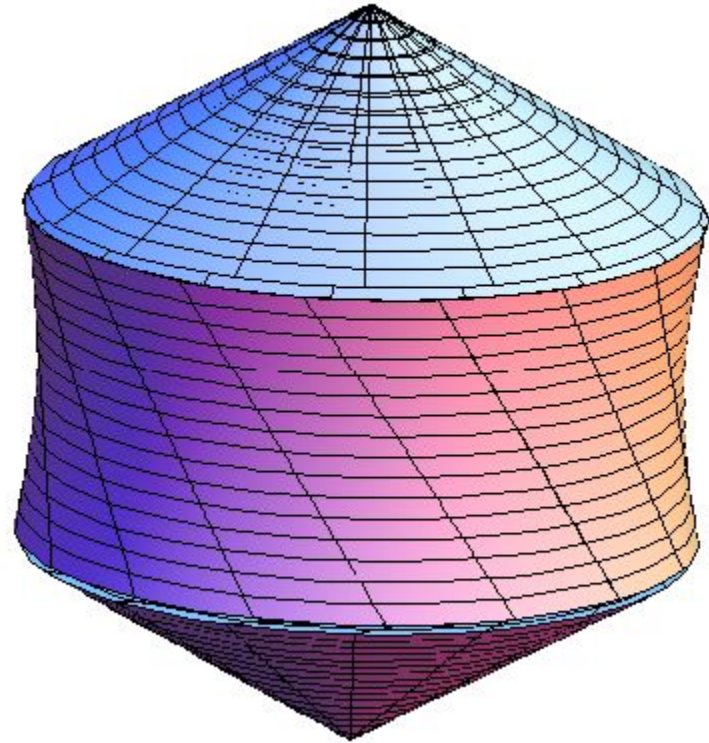
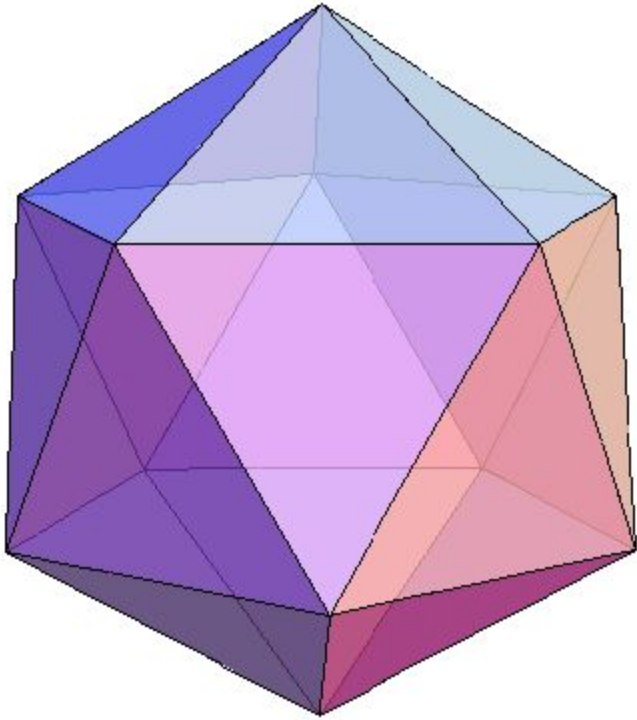
Какая фигура получается при вращении октаэдра вокруг прямой, проходящей через центры двух противоположных граней?



Ответ. Фигура, поверхность которой состоит из двух кругов и гиперboloида вращения.

Упражнение 24

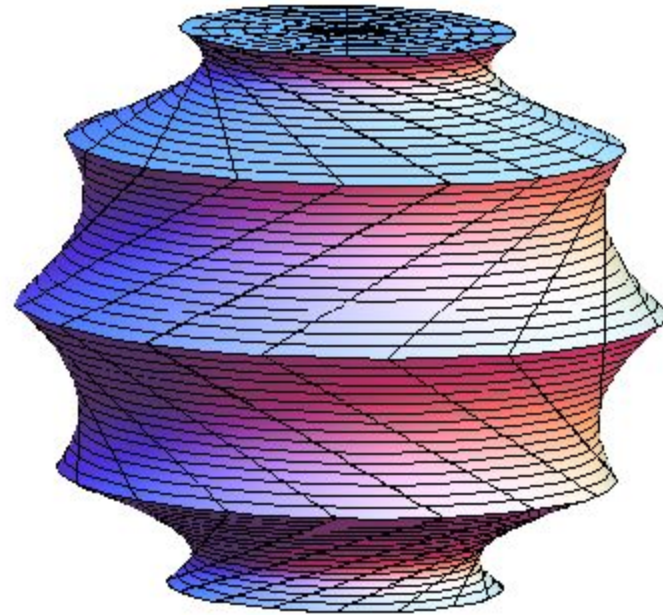
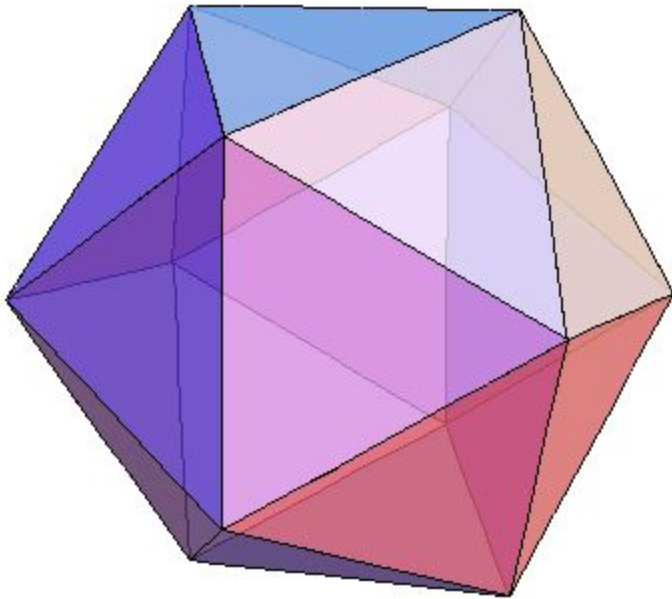
Какая фигура получается при вращении икосаэдра вокруг прямой, проходящей через две противоположные вершины?



Ответ. Фигура, поверхность которой состоит из двух боковых поверхностей конусов и гиперboloида вращения.

Упражнение 25

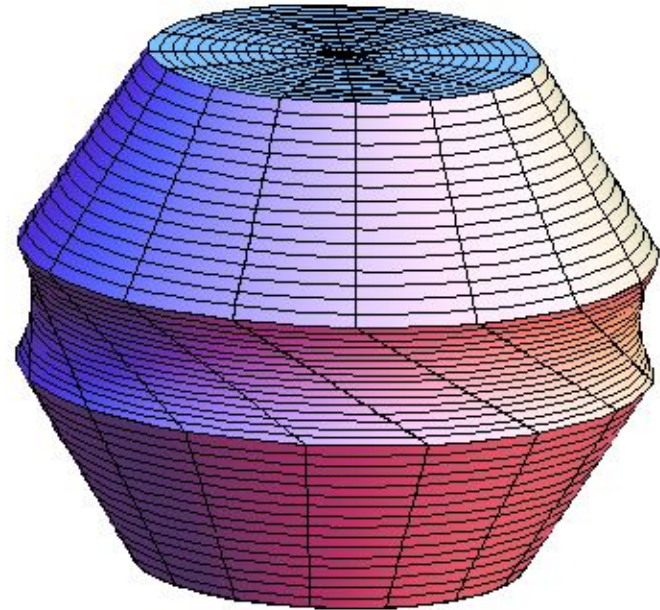
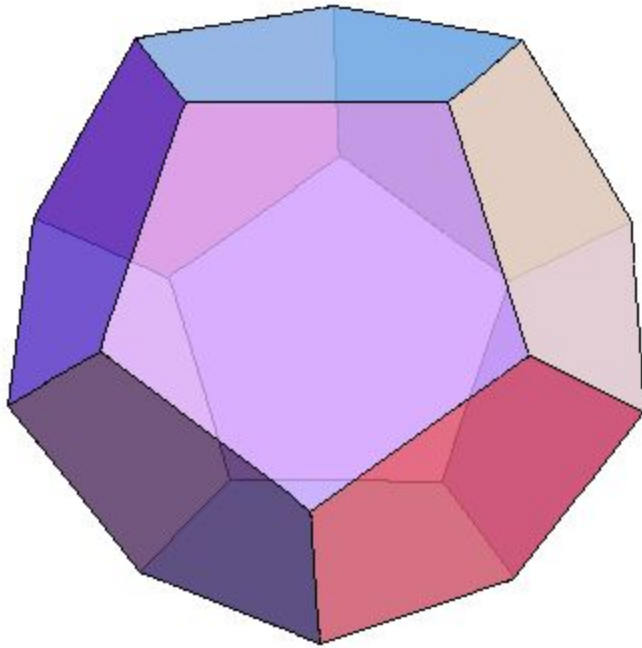
Какая фигура получается при вращении икосаэдра вокруг прямой, проходящей через середины двух противоположных ребер?



Ответ. Фигура, поверхность которой состоит из двух кругов и четырех гиперболоидов вращения.

Упражнение 26

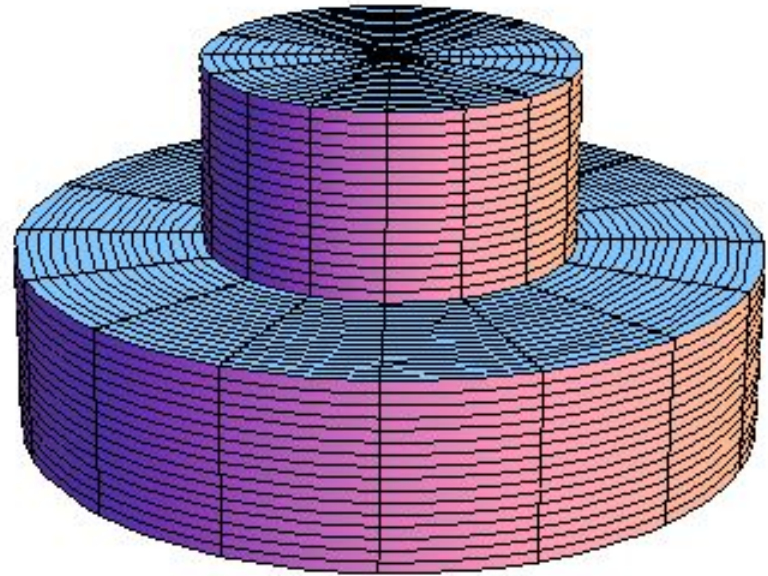
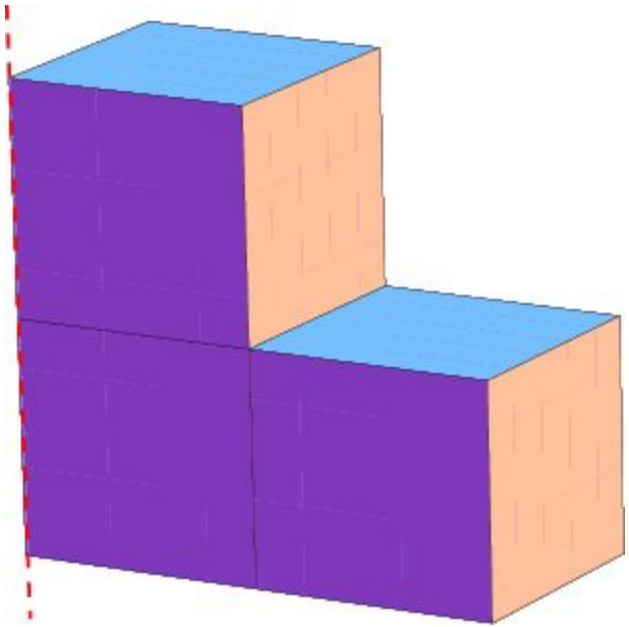
Какая фигура получается при вращении додекаэдра вокруг прямой, проходящей через центры двух противоположных граней?



Ответ. Фигура, поверхность которой состоит из двух кругов, двух боковых поверхностей усеченных конусов и гиперboloида вращения.

Упражнение 27

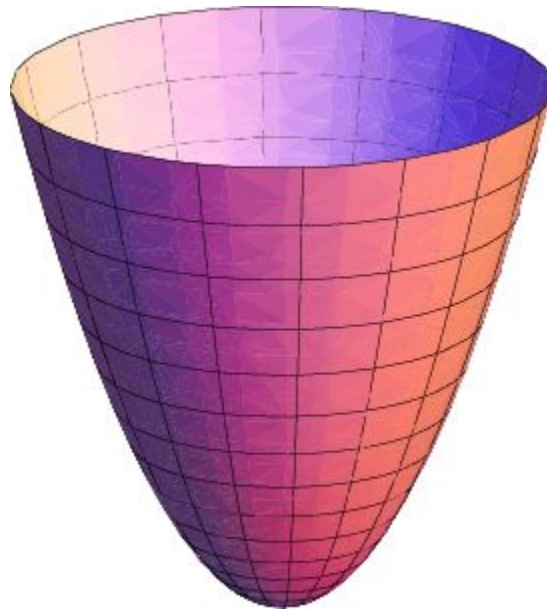
Какая фигура получается при вращении многогранника, состоящего из трех кубов вокруг прямой, изображенной на рисунке?



Ответ. Фигура, состоящая из двух цилиндров.

Упражнение 28

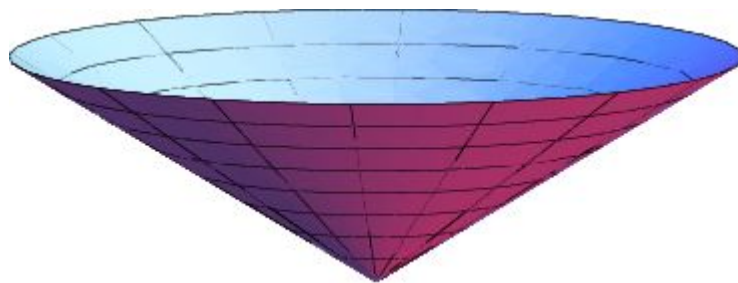
Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



Ответ: $y = x^2$.

Упражнение 29

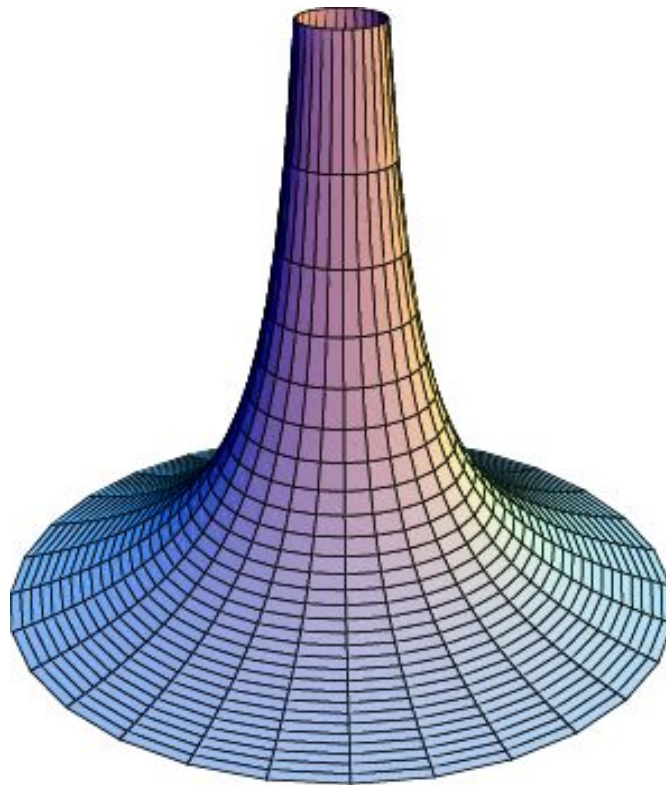
Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



Ответ: $y = |x|$.

Упражнение 30

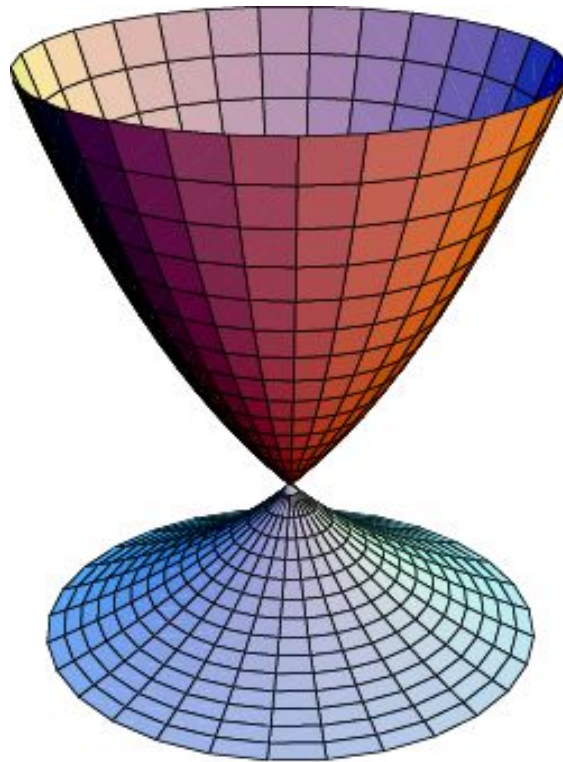
Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



Ответ: $y = \frac{1}{x}$.

Упражнение 31

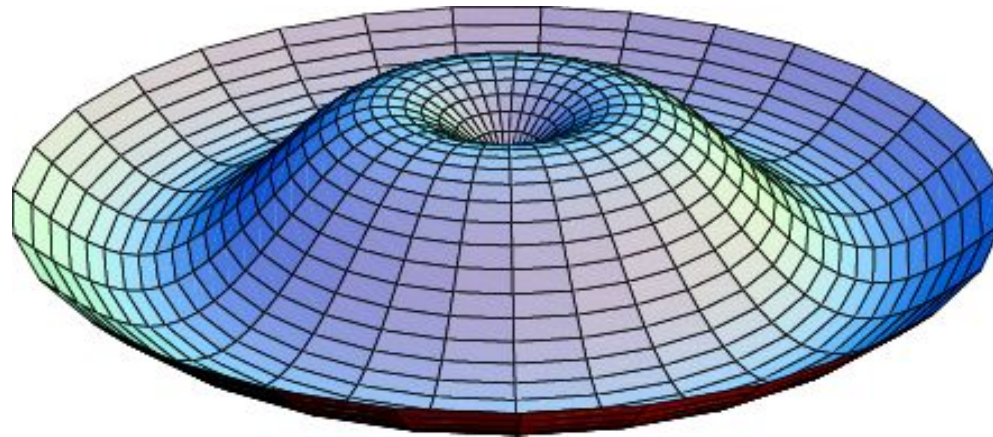
Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



Ответ: Показательной функции.

Упражнение 32

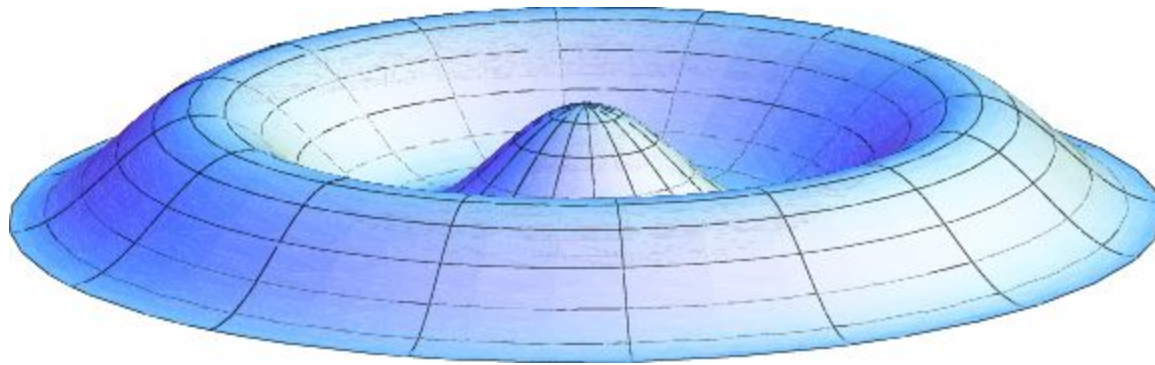
Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



Ответ: Синусоиды.

Упражнение 33

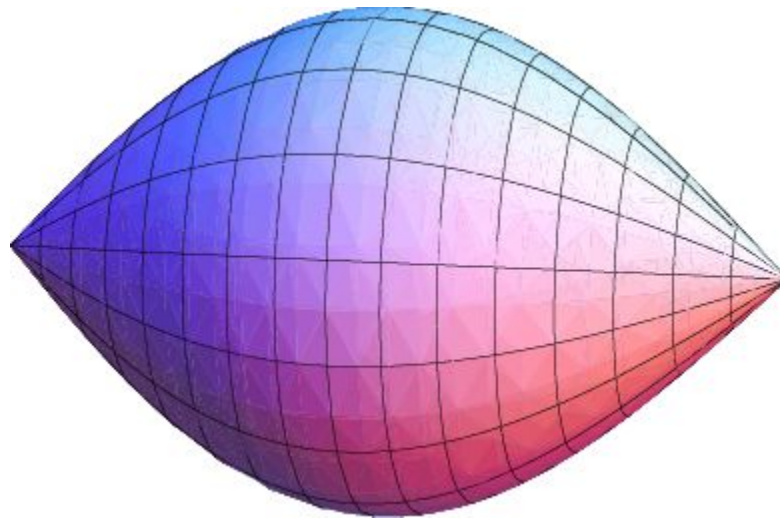
Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



Ответ: Косинусоиды.

Упражнение 34

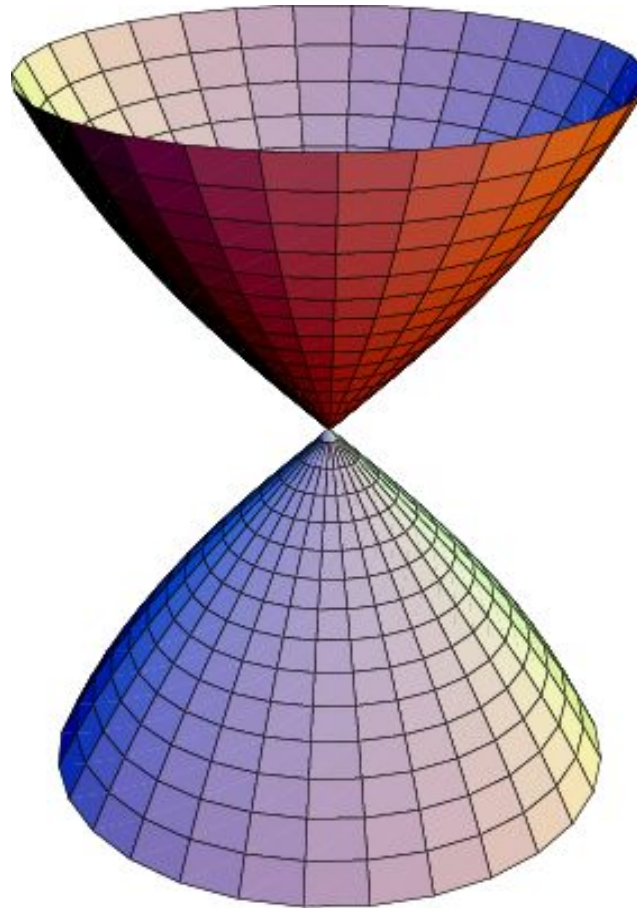
Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



Ответ: $y = \sin x$.

Упражнение 35

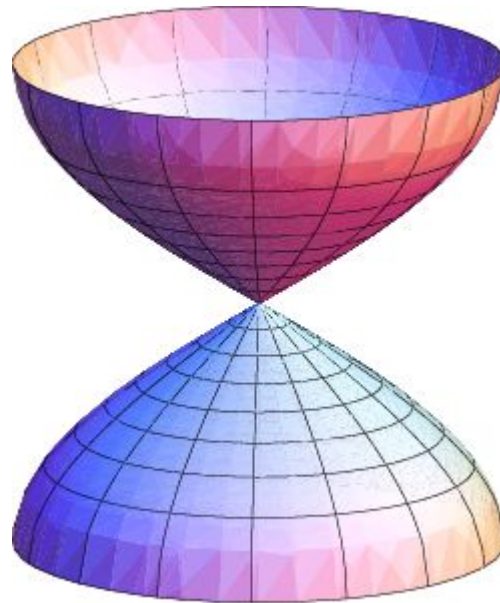
Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



Ответ: $y = \operatorname{tg} x$.

Упражнение 36

Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



Ответ: $y = \arcsin x$.