ПРОЕКТ ПО АЛГЕБРЕ

- **Решение уравнений высших степеней с помощью теоремы Безу.**

- **Выполнила ученица 9 класса Зингейской СОШ Батраканова Махабат.**

ЦЕЛИ ПРОЕКТА:

1. ОВЛАДЕТЬ СПОСОБОМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ БЕЗУ.

2. ИСПОЛЬЗОВАТЬ РЕСУРСЫ ИНТЕРНЕТА.

3. СОЗДАТЬ ПРЕЗЕНТАЦИЮ, ИСПОЛЬЗУЯ СОБРАННЫЙ МАТЕРИАЛ

- Только в 11 веке таджикский поэт и ученый Омар Хаям впервые решил уравнение III степени.
- Установить, существует ли формула для нахождения корней любого уравнения, пытались многие.
- Но в конце 18 века французский ученый Луи Лагранж пытался доказать невозможность алгоритма общих уравнений, а вначале 19 века француз Галуа развил идею Лагранжа.
- С тех пор математика пошла другим путем.
- Ученые стали искать другие методы решения уравнений высших степеней.
- Одним из них является метод разложения многочлена на множители с использованием теоремы Безу.

Этьен Безу

- Французский ученый-математик, член Парижской Академии наук.
- Годы жизни: 1733-1783гг.
- Изучал системы алгебраических уравнений высших степеней;

Этьен Безу

- Установил общие методы решения уравнений высших степеней;
- Знаменитость ему принесла теорема.
- Алгебраические работы Безу опубликованы в мемуарах Академии

ТЕОРЕМА БЕЗУ:

При решении целых уравнений бывает полезна теорема о корне многочлена.

ТЕОРЕМА 1 о корне многочлена

Если число a является корнем многочлена

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \text{ где } a_0 \neq 0,$$

то этот многочлен можно представить в виде произведения $(x - a)\,P_1(x)$, где $P_1(x)$ — многочлен $n - 1$-й степени.

Эта теорема позволяет решение целого уравнения n-й степени для которого известен один из корней, свести к решению уравнения $n - 1$-й степени, в частности, от уравнения третьей степени перейти к квадратному.

Если целое уравнение с одной переменной, с целыми коэффициентами имеет целый корень, то его можно найти, используя теорему о целых корнях целого уравнения.

ТЕОРЕМА 2 о целых корнях целого уравнения

Если уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

в котором все коэффициенты — целые числа, причем свободный член отличен от нуля, имеет целый корень, то этот корень является делителем свободного члена.

$X^4 + 4X^3 - 18X^2 - 12X + 9 = 0$

Найдем делители свободного члена и выясним, при каком из них левая часть равна нулю.
Делители:-1;1;-3;3;-9;9.
P(-1)=
P(1)=
P(-3)=
P(3)= и т.д.

- P(-1)=1-4-18+12+9=-22+22=0.

Вывод: «-1»– корень уравнения.

$X^4 + 4X^3 - 18X^2 - 12X + 9 = 0$

$$
\begin{array}{l|l}
-\; x^4+4x^3-18x^2-12x+9 & x+1 \\
\quad \underline{x^4+x^3} & \overline{x^3+3x^2-21x+9} \\
\qquad -\; 3x^3-18x^2 & \\
\qquad\quad \underline{3x^3+3x^2} & \\
\qquad\qquad -\; -21x^2-12x & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-21x^2-21x} & \\
\qquad\qquad\qquad -\; 9x+9 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{9x+9} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$X^4+4x^3-12x+9=(x+1)\cdot(x^3+3x^2-21x+9)=0$

$(x+1)\,(x^3+3x^2-21x+9)=0$

$x+1=0$ или $x^3+3x^2-21x+9=0$

$x=-1$ | Делители 9 : $\pm 1;\ \pm 3;\ \pm 9$

$$
\begin{array}{l|l}
-\; x^3+3x^2-21x+9 & x-3 \\
\quad \underline{x^3-3x^2} & \overline{x^2+6x-3} \\
\qquad -\; 6x^2-21x & \\
\qquad\quad \underline{6x^2-18x} & \\
\qquad\qquad -\; -3x+9 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-3x+9} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

ЗНАЧИТ, ДАННОЕ УРАВНЕНИЕ МОЖНО РАЗЛОЖИТЬ НА СЛЕДУЮЩИЕ МНОЖИТЕЛИ

$$x^4+4x^3-18x^2-12x+9=(x+1)(x-3)(x^2+6x-3)=0$$

$x+1=0$ или $x-3=0$ или $x^2+6x-3=0$

$x_1=-1$ $\quad$ $x_2=3$ $\quad$ $Д=36+12=48$

$$x_{3,4}=-3\pm2\sqrt{3}$$

Ответ: $x_1=-1$ $\quad x_2=3$ $\quad x_{3,4}=-3\pm2\sqrt{3}$

$$X^4+4X^3-18X^2-12X+9=0$$

КАК РЕШАЮТ ЭТИ УРАВНЕНИЯ:
$x^4-2x^3-7x^2+4x+4=0$

- Делители **4** :1; -1; 2; -2; 4; -4
- Р (1) = 1-2-7+4+4=0

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-2x^3-7x^2+4x+4 & x-1 \\
\underline{-\;x^4-x^3\quad\quad\quad\quad\quad} & \overline{x^3-x^2-8x-4} \\
-x^3-7x^2\quad\quad\quad & \\
\underline{-\;-x^3+x^2\quad\quad\quad} & \\
-8x^2+4x\quad & \\
\underline{-\;-8x^2+8x\quad} & \\
-4x+4 & \\
\underline{-\;-4x+4} & \\
0 &
\end{array}
$$

$(x-1)(x^3-x^2-8x-4)=0$

Делители **4** :1; -1; 2; -2; 4; -4

Р(-2)= -8-4+16-4=0

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-x^2-8x-4 & x+2 \\
\underline{-\;x^3+2x^2\quad\quad\quad} & \overline{x^2-3x-2} \\
-3x^2-8x\quad & \\
\underline{-\;-3x^2-6x\quad} & \\
-2x-4 & \\
\underline{-\;-2x-4} & \\
0 &
\end{array}
$$

$(x-1)(x+2)(x^2-3x-2)=0$

$x-1=0$ или $x+2=0$ или $x^2-3x-2=0$

$x_1=1$ $\quad$ $x_2=-2$ $\quad$ $D=9+8=17$

$x_3=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ $\quad$ $x_4=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$

Ответ: $x_1=1$; $x_2=-2$; $x_3=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$; $x_4=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$

$x^3-6x^2+6x+8=0$

- **Делители 8: 1; -1 ; 2 ; -2; 4; -4; 8; -8;**
- **Р (4)=64-96+24+8=0**

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-6x^2+6x+8 & x-4 \\ \cline{2-2}
-\;x^3-4x^2 & x^2-2x-2 \\ \cline{1-1}
-2x^2+6x & \\
-\;-2x^2+8x & \\ \cline{1-1}
-2x+8 & \\
-\;-2x+8 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$(x-4)(x^2-2x-2)=0$

$x-4=0$ или $x^2-2x-2=0$

$x_1=4$

Д$=4+8=12$

$x_{2,3}=1\pm\sqrt{3}$

ОТВЕТ: $X_1=4$, $X_{2,3}=1\pm\sqrt{3}$

$X^3-8X^2+13X-2=0$

- Делители **2**: -1; 1; -2; 2
- P (2)=8-32+26-2=0

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3-8x^2+13x-2 & x-2 \\
\cline{2-2}
x^3-2x^2 & x^2-6x+1 \\
\cline{1-1}
-\,-6x^2+13x & \\
-6x^2+12x & \\
\cline{1-1}
-\,x-2 & \\
x-2 & \\
\cline{1-1}
0 & \\
\end{array}
$$

$(x-2)(x^2-6x+1)=0$

$x-2=0$ или $x^2-6x+1=o$

$x_1=2$ $D=36-4=32$

$x_{2,3}=3\pm2\sqrt{2}$

Ответы: $x_1=2$, $x_{2,3}=3\pm2\sqrt{2}$

$X^3-4X^2+3X+2=0$

- Делители **2**: -1; 1; -2; 2
- $P(2)=8-16+6+2=0$

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3-4x^2+3x+2 & x-2 \\
\underline{x^3-2x^2} & \overline{x^2-2x-1} \\
-\,-2x^2+3x & \\
\underline{-2x^2+4x} & \\
-\,-x+2 & \\
\underline{-x+2} & \\
0 &
\end{array}
$$

$(x-2)(x^2-2x-1)=0$

$X-2=0$ или $x^2-2x-1=0$

$X_1=2$ $D=4+4=8$

$x_{2.3}=1\pm\sqrt{2}$

Ответ : $x_1=2$,

$x_{2.3}=1\pm\sqrt{2}$

$x^3+2x^2+3x+2=0$

- Делители **2**: -1; 1; -2; 2
- P (-1)=-1+2-3+2=0

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+2x^2+3x+2 & x+1 \\
\underline{x^3+x^2\quad\quad} & \overline{x^2+x+2} \\
x^2+3x\quad & \\
\underline{x^2+x\quad} & \\
2x+2 & \\
\underline{2x+2} & \\
0 &
\end{array}
$$

$(x+1)(x^2+x+2)=0$

$x+1=0$ или $x^2+x+2=0$

$x_1= -1$ $Д= -7$

корней нет

Ответ: $x_1=-1$.

$X^3+4X^2+X-6=0$

- Делители **6**: 1; -1; 2; -2; 3; -3; 6; -6
- $P(1)=1+4+1-6=0$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+4x^2+x-6 & x-1 \\
\cline{2-2}
-\;(x^3-x^2) & x^2+5x+6 \\
\cline{1-1}
5x^2+x & \\
-\;(5x^2-5x) & \\
\cline{1-1}
6x-6 & \\
-\;(6x-6) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$(x-1)(x^2+5x+6)=0$

$X-1=0$ или

$x^2+5x+6=0$

$X_1=1$

$D=25-24=1$

$x_2=-2,\ x_3=-3$

Ответ: -3, -2; 1.

$X^3+6X^2-X-6=0$

- Делители **6:**1; -1; 2; -2; 3; -3; 6; -6
- P (1)=1+6-1-6=0

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+6x^2-x-6 & x-1 \\
\underline{x^3-x^2} & \overline{x2+7x+6} \\
7x^2-x & \\
\underline{7x^2-7x} & \\
6x-6 & \\
\underline{6x-6} & \\
0 &
\end{array}
$$

$(x-1)(x^2+7x+6)=0$

$x-1=0$ или $x^2+7x+6=0$

$x_1=1$

D=49-24=25

$x_2=-6$ $x_3=-1$

Ответ:-6; -1; 1.

$X^3+4X^2-9X-36=0$

- Делители **36**: 1; -1; 2; -2; 3; -4; 6; -6; 9; -9; 12; -12; 18; -18; 36; -36
- $P(-3)=27-36-27+36=0$

$$
\begin{array}{r|l}
-\; x^3+4x^2-9x-36 & x+3 \\
\cline{2-2}
x^3+3x^2 & x^2+x-12 \\
\cline{1-1}
-\; x^2-9x & \\
x^2+3x & \\
\cline{1-1}
-\; -12x-36 & \\
-12x-36 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$(x+3)(x^2+x-12)=0$

$x+3=0$ или $x^2+x-12=0$

$x_1=-3$

$D=1+48=49$

$x_2=3$ $x_3=-4$

Ответ: -4;-3; 3.