


Системы счисления.
Методы перевода чисел
из одной системы в
другую



Системы счисления

Римская система счисления

Позиционные системы счисления

Перевод чисел из двоичной, восьмеричной, шестнадцатеричной систем счисления в десятичную систему счисления

Перевод чисел из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную, шестнадцатеричную систему счисления

Алгоритм перевода числа из двоичной системы счисления в систему счисления с основанием 2^n

Арифметические операции в позиционных системах счисления

Практическая часть

Системы счисления

- ◆ *Система счисления* – это знаковая система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью символов некоторого алфавита, называемых цифрами.
- ◆ Все системы счисления делятся на две большие группы: *позиционные* и *непозиционные*. В позиционных системах счисления значение цифры зависит от ее положения в числе, а в непозиционных – не зависит.

Римская непозиционная система счисления

- ◆ Самой распространенной из непозиционных систем счисления является римская система счисления. В качестве цифр в римской системе счисления используются буквы.

I	1		C	100
V	5		D	500
X	10		M	1000
L	50			

Примеры:

- ◆ В числе XXX цифра X встречается трижды, и в каждом случае обозначает одну и ту же величину 10, т.к. величина используемой цифры одинакова, то получаем $XXX = 10 + 10 + 10 = 30$.
- ◆ В числе VII использованы цифры VII , в данной ситуации меньшая цифра стоит справа от большей, поэтому мы прибавляем значение данных цифр и получаем $VII = 5 + 1 + 1 = 7$.
- ◆ В числе IV тоже использованы цифры VI , но в данной ситуации меньшая цифра расположена слева от большей, поэтому мы вычитаем из большего значение меньшее и получаем $IV = 5 - 1 = 4$

M	C	M	X	C	V	I	I
1000	100	1000	10	100	5	1	1

- ◆ $MCMXCVII = 1000 + (1000 - 100) + (100 - 10) + 5 + 1 + 1 = 1000 + 900 + 90 + 7 = 1997$

M	M	V	I	I	I
1000	1000	5	1	1	1

- ◆ $MMVII = 1000 + 1000 + 5 + 1 + 1 + 1 = 2008$

Позиционные системы счисления

- ◆ Первая позиционная система счисления была придумана еще в древнем Вавилоне, причем вавилонская нумерация шестидесятеричной, т.е. ней использовалось шестьдесят цифр. При измерении времени мы до сих пор используем основание, равное 60 (в 1 часе 60 минут, в 1 минуте 60 секунд).

- ◆ Наиболее известна десятичная позиционная система счисления. В 595 году (уже нашей эры) в Индии впервые появилась знакомая всем нам сегодня десятичная система счисления. Знаменитый персидский математик Альхорезми выпустил учебник, в котором изложил основы десятичной системы индусов. После перевода его с арабского языка на латынь и выпуска книги Леонардо Пизано (Фибоначчи) эта система счисления стала доступна европейцам, получив название арабской, т.е. та система счисления, которой мы все с вами пользуемся.

- ◆ В позиционных системах счисления количественное значение цифры зависит от ее позиции в числе. Каждая позиционная система счисления имеет определенный алфавит цифр и основание. В позиционных системах счисления основание системы равно количеству цифр (знаков в ее алфавите) и определяет, во сколько раз различаются значения цифр соседних разрядов числа.

Система счисления	Основание	Алфавит цифр
Десятичная	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Двоичная	2	0, 1
Восьмеричная	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Шестнадцатеричная	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A (10), B (11), C (12), D (13), E (14), F (15)

Десятичная система счисления

- ◆ Наиболее распространенной позиционной системой счисления является десятичная система. Рассмотрим в качестве примера число **555**. Цифра **5** встречается трижды, причем самая правая обозначает пять единиц, вторая правая – пять десятков и, третья – пять сотен.
- ◆ Позиция цифры в числе называется **разрядом**. Разряд числа возрастает справа налево, от младших разрядов к старшим.

- ◆ Число *555* записано в *свернутой форме*. Для записи развернутой формы числа необходимо над каждым числом определить степень основания в которую данное основание системы будет возводиться, начиная с нулевого с самого крайнего целого числа.
- ◆ В *развернутой форме* записи числа *555* в десятичной системе будет выглядеть следующим образом:

Двоичная система счисления

- ◆ В двоичной системе счисления основание равно 2, а алфавит состоит из двух цифр (0 и 1). Следовательно, числа в двоичной системе в развернутой форме записываются в виде суммы разряда степеней основания 2 с коэффициентами, в качестве которых выступают цифры 0 или 1.

Восьмеричная система счисления

- ◆ В восьмеричной системе счисления основание равно 8, тогда записанное в свернутой форме восьмеричное число

$A_8 = 673,2_8$ в развернутой форме будет иметь вид:

$$A_8 = 6 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 3 \times 8^0 + 2 \times 8^{-1}$$

Шестнадцатеричная система счисления

- ◆ В шестнадцатеричной системе счисления основание равно 16, тогда записанное в свернутой форме восьмеричное число

$A_{16} = 8A, F_8$ в развернутой форме будет иметь вид:

$$A_{16} = 8 \times 16^1 + A \times 16^0 + F \times 16^{-1}$$

Позиционные системы счисления с произвольным основанием

- ◆ В общем случае в системе счисления с основанием q запись числа A_q , которое содержит n целых разрядов числа и m дробных разрядов числа, производится следующим образом:

$$A_2 = a_{n-1} \times q^{n-1} + a_{n-2} \times q^{n-2} + \dots + a_0 \times q^0 + a_{-1} \times q^{-1} + a_{-2} \times q^{-2} + \dots + a_{-m} \times q^{-m}$$

Перевод чисел из двоичной системы счисления в десятичную систему счисления.

- ◆ Возьмем любое двоичное число, например $10,11_2$. Запишем его в развернутой форме и произведем вычисления:

$$10,11_2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 1 \times 2 + 0 \times 2 + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} = 2,75_{10}$$

Перевод чисел из восьмеричной системы счисления в десятичную систему счисления.

- ◆ Возьмем любое восьмеричное число, например $67,58$. Запишем его в развернутой форме и произведем вычисления:

$$67,5_8 = 6 \times 8^1 + 7 \times 8^0 + 5 \times 8^{-1} = 6 \times 8 + 7 \times 1 + 5 \times \frac{1}{8} = 55,625_{10}$$

Перевод чисел из шестнадцатеричной системы счисления в десятичную систему счисления.

- ◆ Возьмем любое шестнадцатеричное число, например **19F16**. Запишем его в развернутой форме и произведем вычисления:

$$19F_{16} = 1 \times 16^2 + 9 \times 16^1 + F \times 16^0 = 1 \times 256 + 9 \times 16 + 15 \times 1 = 415_{10}$$

Перевод целых чисел из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.

- ◆ Для перевода чисел из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления необходимо последовательно выполнять деление исходного целого числа десятичной системы счисления на основание требуемой системы счисления и получаемых целых частных до тех пор, пока не получится частное меньше делителя, т.е. требуемого основания.

Пример:

Перевод числа 2910 в двоичную систему счисления.
Полученные остатки записываются в обратном порядке, начиная с последнего частного, следовательно:

29	2			
28	14	2		
1	14	7	2	
	0	6	3	2
		1	2	1
			1	

Перевод числа 2910 в восьмеричную систему счисления.
Полученные остатки записываются в обратном порядке, начиная с последнего частного, следовательно:

29	8			
24	3			
5				

Перевод числа 2910 в шестнадцатеричную систему счисления. Полученные остатки записываются в обратном порядке, начиная с последнего частного, следовательно:

29	16			
16	1			
13				

Перевод десятичных дробей из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.

- ◆ Последовательно выполнять умножение исходной дроби и полученных дробных частей произведения на основание требуемой системы счисления до тех пор, пока не получится нулевая дробная часть, или не будет достигнута точность вычисления, а целые части записываются по порядку после запятой.

Пример:

Перевод дроби 0,37510 в двоичную систему счисления.	0,	3	7	5
				2
	0,	7	5	0
			2	
	1,	5	0	0
		2		
	1,	0	0	0
Перевод дроби 0,37510 в восьмеричную систему счисления.	0,	3	7	5
				8
	3,	0	0	0
Перевод дроби 0,37510 в шестнадцатери чную систему счисления.	0,	3	7	5
			1	6
	2	2	5	0
	3	7	5	
	6,	0	0	0

Алгоритм перевода числа из двоичной системы счисления в систему счисления с основанием 2^n .

- ◆ Перевод чисел между системами счисления, основания которых является степенями числа 2 ($q=2^n$), может производиться по более простым алгоритмам. Такие алгоритмы могут применяться для перевода чисел между двоичной ($2=2^1$), восьмеричной ($8=2^3$) и шестнадцатеричной ($16=2^4$) системами счисления.
- ◆ Целую часть данного двоичного числа разбить справа налево, а дробную часть – слева направо на группы по n цифр в каждой.
- ◆ Если в последней левой или правой группе окажется меньше n разрядов, то ее (группу) необходимо дополнить до нужного числа разрядов нулями.
- ◆ Рассмотреть каждую группу, как n -разрядное двоичное число и записать его в соответствующей цифрой в системе счисления с основанием 2^n .
- ◆ Для упрощения перевода созданы таблицы соответствия между числами двоичной системы счисления и числами восьмеричной и шестнадцатеричной системами счисления.

Перевод чисел двоичной системы счисления в восьмеричную систему счисления.

- ◆ Восьмеричную систему счисления можно представить в виде 2^3 , $n=3$, т.о. для перевода двоичного числа в восьмеричную систему счисления его нужно разбить на группы по три цифры в каждой, а затем преобразовать каждую группу двоичных триад в восьмеричную цифру.

Примеры:

- ◆ *Пример №1.* Переведем число 1101011102 двоичной системы счисления в число восьмеричной системы счисления. Для перевода разделим данное число на группы по три разряда справа налево – получим двоичные триады, затем по таблице соответствия найдем для каждой двоичной триады число восьмеричной системы счисления. Получим: $110\ 101\ 1102 = 6568$
- ◆ *Пример №2.* Переведем число $274,1568$ восьмеричной системы счисления в число двоичной системы счисления. Для перевода каждой цифры данного числа найдем соответствие двоичной триады по таблице соответствия. Получим: $274,1568 = 010\ 111\ 100,001\ 101\ 1102 = 10111100,0011011102$

Перевод чисел двоичной системы счисления в шестнадцатеричную систему счисления.

- ◆ Шестнадцатеричную систему счисления можно представить в виде 2^4 , $n=4$, т.о. для перевода двоичного числа в шестнадцатеричную систему счисления его нужно разбить на группы по четыре цифры в каждой, а затем преобразовать каждую группу в шестнадцатеричную цифру.

Примеры:

- ◆ *Пример №1.* Переведем число $11010,11011116$ двоичной системы счисления в число шестнадцатеричной системы счисления. Для перевода разделим данное число на группы по четыре разряда справа налево и слева направо – получим двоичные тетрады, затем по таблице соответствия найдем для каждой двоичной тетрады число шестнадцатеричной системы счисления, обратим внимание на то, что крайней левой и крайней правой частях триад не хватает разрядов, поэтому дополняем их нулями. Получим: $1\ 1010, 1101\ 1116 = 0001\ 1010, 1101\ 110016 = 1A,DC16$
- ◆ *Пример №2.* Переведем число $5E,416$ шестнадцатеричной системы счисления в число двоичной системы счисления. Для перевода каждой цифры данного числа найдем соответствие двоичной тетрады по таблице соответствия. Получим: $5E,416 = 0101\ 1110, 01002 = 1011110,012$

Арифметические операции в позиционных системах счисления.

- ◆ Арифметические операции во всех позиционных системах счисления выполняются по одним и тем же правилам, которые мы используем в десятичной системе счисления. Для примера рассмотрим арифметические действия в двоичной системе счисления.

Сложение:

Важно обратить внимание на то, что при сложении двух единиц происходит переполнение разряда и производится перенос в старший разряд. Переполнение разряда наступает тогда, когда значение числа в нем становится равным или больше основания. Для двоичной системы это число равно двум.

$$0 + 0 = 0$$

$$1 + 0 = 1$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 1 = 10$$

Рассмотрим пример: $110_2 + 11_2$, произведем сложение столбиком.

	1	1	0_2
+		1	1_2
	1	0	0_2

Вычитание:

Важно обратить внимание на то, что при вычитании из меньшего числа (0) большего числа (1) производится заем из старшего разряда. В таблице заем обозначен 1 с чертой.

$$0 - 0 = 0$$

$$1 - 0 = 1$$

$$0 - 1 = 1\bar{1}$$

$$1 - 1 = 0$$

Рассмотрим пример: $110_2 - 11_2$, произведем вычитание столбиком.

	1	1	0_2
-		1	1_2
		1	1_2

Умножение:

Важно обратить внимание на то, что при сложении двух единиц происходит переполнение разряда и производится перенос в старший разряд. Переполнение разряда наступает тогда, когда значение числа в нем становится равным или больше основания. Для двоичной системы это число равно двум.

$$0 \times 0 = 0$$

$$1 \times 0 = 0$$

$$0 \times 1 = 0$$

$$1 \times 1 = 1$$

Рассмотрим пример: $110_2 \times 11_2$, произведем умножение столбиком.

		1	1	0_2
	X		1	1_2
		1	1	0
+	1	1	0	
1	0	0	1	0_2

Деление:

Операция деления выполняется по алгоритму, подобному алгоритму выполнения операции деления в десятичной системе счисления. В качестве примера произведем деление двоичного числа 110_2 на 11_2 .

-	1	1	0_2	1	1_2
	1	1		1	0_2
		0			

Практическая часть:

- ◆ Задание 1:
- ◆ Перевести числа из римской системы счисления в арабскую систему счисления.
- ◆ XXI *1 балл*
- ◆ CVII *1 балл*
- ◆ CMLXXIV *2 балла*

Задание 2:

- ◆ Перевести числа из римской системы счисления в арабскую систему счисления, выполнить указанные арифметические действия и полученный результат перевести обратно - из арабской системы счисления в римскую систему счисления.
- ◆ $LV \div XI$ *2 балла*
- ◆ $CXX \div (V \times IV)$ *2 балла*

Задание 3:

- ◆ Перевести целое число 11810 десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную, шестнадцатеричную системы счисления.
- ◆ $11810 = X_2$ *2 балла*
- ◆ $11810 = X_8$ *2 балла*
- ◆ $11810 = X_{16}$ *2 балла*

Задание 4:

- ◆ Используя развернутую форму записи числа, перевести числа из двоичной, восьмеричной, шестнадцатеричной систем счисления в десятичную систему счисления.
- ◆ $1010_2 = X_{10}$ *2 балла*
- ◆ $10,10_2 = X_{10}$ *2 балла*
- ◆ $645_8 = X_{10}$ *2 балла*
- ◆ $64,5_8 = X_{10}$ *2 балла*
- ◆ $39F_{16} = X_{10}$ *2 балла*
- ◆ $39,F_{16} = X_{10}$ *2 балла*

Задание 5:

- ◆ Используя таблицу «Соответствия двоичных триад и цифр восьмеричной системы счисления» и таблицу «Соответствия двоичных тетрад и цифр шестнадцатеричной системы счисления» перевести числа из двоичной системы счисления в восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.
- ◆ $10101100_2 = X_{16}$ *1 балл*
- ◆ $1011010,1_2 = X_{16}$ *2 балла*
- ◆ $1100111_2 = X_8$ *1 балл*
- ◆ $10111,10111_2 = X_8$ *2 балла*

Задание 6:

- ◆ Используя таблицу «Соответствия двоичных триад и цифр восьмеричной системы счисления» и таблицу «Соответствия двоичных тетрад и цифр шестнадцатеричной системы счисления» перевести числа из восьмеричной и шестнадцатеричной систем счисления в двоичную систему счисления.
- ◆ $46,278 = X_2$ *2 балла*
- ◆ $EF,1216 = X_2$ *2 балла*

Задание 7:

- ◆ Перевести целые числа десятичной системы счисления в произвольную систему счисления, указанную в примере.
- ◆ $15310 = X_3$ *3 балла*
- ◆ $12010 = X_7$ *3 балла*
- ◆ $35210 = X_6$ *3 балла*

Задание 8:

- ◆ Используя развернутую форму записи числа перевести числа из произвольной (указанной в примере) системы счисления в десятичную систему счисления.
- ◆ $125_6 = X_{10}$ *3 балла*
- ◆ $32,1_4 = X_{10}$ *3 балла*
- ◆ $241,31_5 = X_{10}$ *3 балла*

Задание 9:

- ◆ Используя таблицу «Соответствие чисел различных систем счисления» перевести числа в десятичную систему счисления и выполнить сравнение полученных чисел.
- ◆ $108_{16} ? A16_{16}$ *1 балл*
- ◆ $1516_{16} ? 11102_2$ *1 балл*