Задачи линейного программирования (ЗЛП)

Для задач линейного программирования характерно наличие следующих 3-х компонентов:

- целевая функция;
- система ограничений;
- ограничения на знак переменных

ЗЛП – это задача следующего вида: (1)

$$z = \sum_{j=1}^{n} x_j c_j \to \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \; (\le, \ge, =) \; b_i \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,l}) \quad l \le n \qquad (3)$$

Уравнение (1) – это *целевая функция*, а (2) и (3) – это *система ограничений.*

Вектор $X = (x_1, \ldots, x_n)$ называется *допустимым планом* ЗЛП, если он удовлетворяет ограничениям (2) и (3).

Вектор $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ называется *оптимальным планом* ЗЛП, если он является допустимым и обеспечивает минимум или максимум целевой функции.

Множество всех допустимых планов ЗЛП образует *область допустимых значений* (ОДЗ).

Формы записи ЗЛП

1) *Развёрнутая форма записи:*

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + \ldots + a_{k+1,n}x_n \le b_{k+1}, \\ \vdots \\ a_{l1}x_1 + \ldots + a_{\mathrm{ln}}x_n \le b_l, \\ a_{l+1,1}x_1 + \ldots + a_{l+1,n}x_n \ge b_{l+1}, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m. \end{cases}$$

$$x_1, \ldots x_p \ge 0,\ p \le n$$

2) Матричная форма записи ЗЛП:

(1) $CX \to \min(\max), \quad C=(c_1, \ldots, c_n);$

(2) $AX(\leq,=,\geq)B,$

$X \geq 0, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};$

(3) $A=(a_{ij})_{m\times n}.$

3) Векторная форма записи ЗЛП:

$$z=CX \to \min(\max)$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^T X_j = B \qquad A_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

$$x_j \geq 0, \quad (j=\overline{1,n})$$

Каноническая форма записи ЗЛП

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (2)$$

В системе ограничений стоят знаки только равенства.

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,n}) \qquad (3)$$

$$b_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (4)$$

В системе ограничений присутствует выделенный исходный базис.

Базисным решением системы уравнений называется решение, в котором значение всех небазисных переменных равно нулю. *Базисное решение* называется *вырожденным*, если в нем хотя бы одна базисная переменная равна нулю. *Базисное решение* называется *опорным,* если значение всех базисных переменных неотрицательно.

Приведение ЗЛП к канонической форме

1) *max z'=-z,* $z' = -c_1x_1 - \dots - c_nx_n \to \min$

2) $3x_1 + x_2 \le 5 \to 3x_1 + x_2 + x_{n+1} = 5, \quad x_{n+1} \ge 0$

Если в ограничении стоит знак $\le$, то к левой части ограничения добавляем дополнительную переменную x_{n+k} со знаком “+”($x_{n+k} \ge 0$);

3) Если $x_k \ge 0$ не указано, то $x_k = x_k' - x_k'', \quad x_k', x_k'' \ge 0$

Пункты (4) и (5) означают поиск в системе ограничений исходного опорного решения.

Если в ЗЛП нет опорного решения, то такая задача не имеет решений по причине несовместности системы ограничений.

ЗЛП может не иметь решения по двум причинам:

1) система ограничений несовместна;

2) целевая функция не ограничена на ОДЗ.

Пример

1) $z = 3x_1 - 4x_2 + 5x_5 \to \max$

$$\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 \le 10, \\ 2x_1 + 4x_5 = 18, \\ 7x_2 - 8x_4 \ge 15. \end{cases} \quad x_1, x_3, x_4 \ge 0$$

2) $z' = -3x_1 + 4x_2 - 5x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_6 = 10, \\ 2x_1 + 4x_5 = 18, \\ 7x_2 - 8x_4 - x_7 = 15. \end{cases}$$

$x_1, x_3, x_4 \ge 0, \;\; x_6, x_7 \ge 0,$

3) $x_2 = x_2' - x_2'', \;\; x_5 = x_5' - x_5''$

$$z' = -3x_1 + 4x_2' - 4x_2'' - 5x_5' + 5x_5'' \to \min$$

$$\begin{cases} 8x_1 - 4x_2' + 4x_2'' + 3x_3 + x_6 = 10, \\ 2x_1 + 4x_5' - 4x_5'' = 18, \\ 7x_2' - 7x_2'' - 8x_4 - x_7 = 15. \end{cases}$$

$x_1, x_3, x_4, x_6, x_7, x_2', x_2'', x_5', x_5'' \ge 0$

$x_2', x_2'', x_5', x_5'' \ge 0,$

4) $$\begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$