Линейная алгебра

практическое занятие

Примеры.
1. Выполните операции над матрицами

__Пример__

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\end{pmatrix}$. Найдите $(A\cdot B+2\cdot E)\cdot A$.

Решение.

Начнем с умножения матрицы A на B:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0 & 1\cdot(-1)\\ 2\cdot 0 & 2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

Умножим единичную матрицу второго порядка E на два:

$$2\cdot E=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 0\\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Сложим полученные результаты:

$$A \cdot B + 2 \cdot E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 & -1+0 \\ 0+0 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Осталось выполнить умножение на матрицу A:

$$(A \cdot B + 2 \cdot E) \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найдите произведение A на B и B на A.

Так как порядок матрицы A равен *3* на *1*, а матрицы B равен *1* на *3*, то $A \cdot B$ будет иметь порядок *3* на *3*, а $B \cdot A$ порядок *1* на *1*.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 \\ 0 \cdot (-3) & 0 \cdot 4 & 0 \cdot 5 \\ 1 \cdot (-3) & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left((-3) \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1\right) = (-1)$$

Как видите, $A \cdot B \neq B \cdot A$. Это как раз одно из свойств операции умножения матриц.

$$3)\ AB = (1\ \ 2\ \ 7)\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix} = (1*3+2*5+7*4) = (41)$$

$A \in M_{1x3},\ B \in M_{3x1},\ C \in M_{1x1}$

$$BA = \begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}(1\ \ 2\ \ 7) = \begin{pmatrix}3 & 6 & 21\\5 & 10 & 35\\4 & 8 & 28\end{pmatrix} \in M_{3x3}$$

$$\boxed{AB \neq BA}$$

$$4)\ (1\ \ 2\ \ 7)\begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 5\\6 & 7\\8 & 9\end{pmatrix} = ?$$

2. Вычислить определитель матрицы

Примеры.

1) Вычислить определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3\cdot(-1) - 4\cdot 2 = 3$$

.

2) Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ двумя способами: с помощью разложения по первой строке и по правилу треугольника:

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,(42-0) - 3\,(35-8) + 4\,(0-6) = 84 - 81 - 24 = -21.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot6\cdot7 + 4\cdot5\cdot0 + 3\cdot8\cdot1 - 4\cdot6\cdot1 - 2\cdot8\cdot0 - 3\cdot5\cdot7 =$$

$$= 84 + 0 + 24 - 24 - 0 - 105 = -21.$$

О т в е т: -21.

Пример.

Вычислите определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 3 & 1 & 7 & 1\\ -1 & 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$ четвертого порядка.

Решение.

$$\begin{vmatrix}-1 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 5\\ 3 & 1 & 7 & 1\\ -1 & 0 & 4 & 2\end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} + a_{14}\cdot A_{14} =$$

$$=(-1)\cdot A_{11} + (-4)\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13} + 0\cdot A_{14} = (-1)\cdot A_{11} + (-4)\cdot A_{12} =$$

$$=(-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 5\\ 1 & 7 & 1\\ 0 & 4 & 2\end{vmatrix} - 4\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1 & 5\\ 3 & 7 & 1\\ -1 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 7\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 0 + 5\cdot 1\cdot 4 - 5\cdot 7\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 4 =$$

$$= 14 + 0 + 20 - 0 - 2 - 4 = 28$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0\cdot 7\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot (-1) + 5\cdot 3\cdot 4 - 5\cdot 7\cdot (-1) - 1\cdot 3\cdot 2 - 0\cdot 1\cdot 4 =$$

$$= 0 - 1 + 60 + 35 - 6 - 0 = 88$$

Подставляем результаты и получаем искомое значение

$$\begin{vmatrix} -1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} - 4\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot 28 + 4\cdot 88 = 324$$

3. Вычислить матрицу, обратную данной

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

1) Определитель det A=2*0*8+1*5*4+(-1)*(-2)*(-3)-4*0*(-3)-5*(-2)*2 -1*(-1)*8=0+20-6-0+20+8=42

2)
$$\mathrm{A}_{11} = (-1)^{\wedge}2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 0*8-(-2)*5 = 0+10 = 10;$$

$$\mathrm{A}_{12} = (-1)^{\wedge}3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = -(8-6) = -2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5-0 = 5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -(-8-20) = 28;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 16+12 = 28;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -(10-3) = -7;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4-4) = 8;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1.$$

$$3)\ \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 5 \\ 28 & 28 & -7 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix};$$

$$4)\ \widetilde{A}^T = \begin{pmatrix} 10 & 28 & 2 \\ -2 & 28 & 8 \\ 5 & -7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$5)\ A^{-1} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 10 & 28 & 2 \\ -2 & 28 & 8 \\ 5 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -2\\ -3 & 5 & 8\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{42}\begin{pmatrix}10 & 28 & 2\\ -2 & 28 & 8\\ 5 & -7 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E\,.$$

Элемент (11): 2*10+(-1)*(-2)+4*5=42

Элемент (12): 2*28+(-1)*28+4*(-7)=0

Элемент (13): 2*2+(-1)*8+4*1=0

Элемент (21): 1*10+0*(-2)+(-2)*5=0

Элемент (22): 1*28+0*28+(-2)*(-7)=42

Элемент (23): 1*2+0*8+(-2)*1=0

Элемент (31): (-3)*10+5*(-2)+8*5=0

Элемент (32): (-3)*28+5*28+8*(-7)=0

Элемент (33): (-3)*2+5*8+8*1=42

4. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Поменяем вторую и первую строки местами (для ручного счета удобно, чтобы элемент a_{11} был равен 1 или -1 (если это возможно)).

Получим матрицу $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

В дальнейшем первую строку менять не будем. Теперь с помощью элемента a_{11}=-1 образуем нули в первом столбце, во второй, третьей и четвертой строках. Для этого ко второй строке прибавим первую, умноженную на число 2, из третьей строки вычтем первую, к четвертой прибавим первую строку:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Поменяем местами в этой матрице вторую и третью строки, и в дальнейшем первая и вторая строки меняться не будут. И с помощью элемента 1 получим нули во втором столбце в третьей и четвертой строках:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Здесь из третьей строки вычли вторую, умноженную на 5, а из четвертой – вторую, умноженную на 6.

Из четвертой строки вычтем третью, получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Угловые элементы -1, 1, 1, их число равно 3. следовательно, ранг матрицы равен 3.

5. Решить систему уравнений

Найти решение системы уравнений методом Крамера $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 16 \\ 3x_1 + x_2 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 24 + 0 - 12 - 0 - 15 = -2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & 5 & 4 \\ 8 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 16 + 64 + 0 - 44 - 0 - 40 = -4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 16 & 4 \\ 3 & 8 & 0 \\ 3 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 132 + 0 - 96 - 0 - 48 = -4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 16 \\ 3 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 + 96 + 120 - 48 - 16 - 165 = -2.$$

Итак, $x_1 = \frac{-4}{-2} = 2;\ x_2 = \frac{-4}{-2} = 2;\ x_1 = \frac{-2}{-2} = 1.$

Решим систему уравнений методом Гаусса

Составим расширенную матрицу и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 16 \\ 3 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 16 \\ 0 & -14 & -12 & -40 \\ 0 & -13 & -11 & -37 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 16 \\ 0 & -14 & -12 & -40 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Первую строку перепишем, и в дальнейшем менять не будем. С помощью элемента 1 получим нули в первом столбце. Для этого умножим первую строку на 3 и вычтем ее из второй и третьей строк. Получим вторую матрицу. Далее с помощью второй строки получаем нули во втором столбце, третьей строке. Для этого умножим вторую строк на (-13), третью – на 14 и сложим. Получим третью (последнюю) матрицу.

На основе последней матрицы запишем эквивалентную ступенчатую систему:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 16 \\ -14x_2 - 12x_3 = -40; \\ 2x_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2. \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим x3, далее переходим ко второму уравнению, подставляя вместо x3=1 и находим x2 и т.д.

Таким образом, решением данной системы уравнений является вектор $X = (2;\, 2;\, 1)$.

6. Найти косинус угла между векторами

Даны два вектора $\bar{a}(1,1,-2)$ и $\bar{b}(2,-1,0)$. Найти косинус угла между векторами $\bar{c}=2\bar{a}-\bar{b}$ и $\bar{d}=\bar{a}+\bar{b}$.

Решение. Найдем координаты векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$:

$$\bar{c}=2\cdot(1,1,-2)-(2,-1,0)=(2,2,-4)-(2,-1,0)=(0,3,-4);$$

$$\bar{d}=(1,1,-2)+(2,-1,0)=(3,0,-2).$$

Вычислим длины векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$:

$$|\bar{c}|=\sqrt{0^2+3^2+(-4)^2}=5;\quad \bar{d}=\sqrt{3^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{13}.$$

Вычислим косинус угла φ между этими векторами:

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{c},\bar{d})}{|\bar{c}|\cdot|\bar{d}|}=\frac{0\cdot 3+3\cdot 0+(-4)\cdot(-2)}{5\cdot\sqrt{13}}=\frac{8}{5\sqrt{13}}.$$

Пример. При каком значении α векторы $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ и $\bar{d} = \alpha\bar{a} + \bar{b}$ перпендикулярны (ортогональны)? (Координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы в предыдущем примере).

Решение. Найдем координаты векторов $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ и $\bar{d} = \alpha\bar{a} + \bar{b}$:

$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} = (1,1,-2) - (2,-1,0) = (-1,2,-2)$;

$\bar{d} = \alpha\bar{a} + \bar{b} = \alpha(1,1,-2) + (2,-1,0) = (\alpha,\alpha,-2\alpha) + (2,-1,0) = (\alpha+2,\alpha-1,-2\alpha)$.

Запишем условие ортогональности полученных векторов:

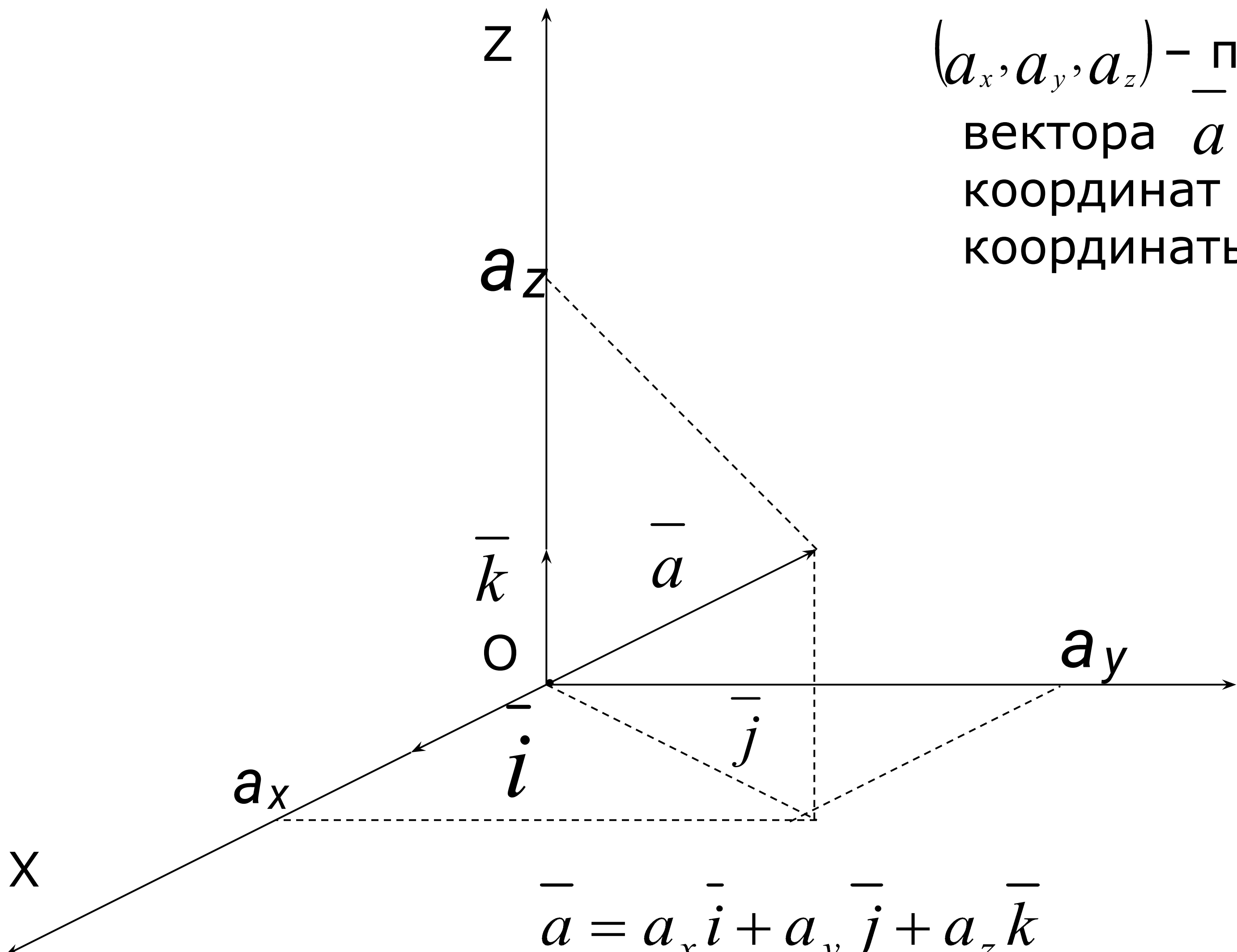
$$(\bar{a} - \bar{b})(\alpha\bar{a} + \bar{b}) = 0;$$

$$-1\cdot(\alpha+2) + 2\cdot(\alpha-1) + (-2)\cdot(-2\alpha) = 0;$$

$$-\alpha - 2 + 2\alpha - 2 + 4\alpha = 0;$$

$$5\alpha - 4 = 0;$$

$$\alpha = \frac{4}{5}.$$



(a_x, a_y, a_z) – проекции вектора $\overline{a}$ на оси координат (или координаты вектора $\overline{a}$)

$$\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}$$

Пример. Найти векторное произведение векторов

$$\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k},$$

$$\overline{b} = 3\overline{i} - \overline{j} - 4\overline{k}.$$

Решение.

$$\overline{a} = (2;3;-1),$$

$$\overline{b} = (3;-1;-4)$$

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \cdot \overline{i} -$$

$$- \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \cdot \overline{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \overline{k} = -13\overline{i} + 5\overline{j} - 11\overline{k}.$$

$$\overline{d} = (-13;5;-11)$$

7. Уравнение прямой

Пример 1. Треугольник ABC задан своими вершинами A(1; 3), B(-2; 0), C(4;-1). Составить уравнение средней линии треугольника ABC, параллельной прямой BC, и высоты, опущенной из вершины A.

Решение. а) Найдем середины отрезков AB и AC (точки M и N соответственно):

$$M\left(\frac{1+(-2)}{2};\frac{3+0}{2}\right)=M\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right);\ N\left(\frac{1+4}{2};\frac{3+(-1)}{2}\right)=N\left(\frac{5}{2};1\right).$$

Составим уравнение прямой MN по двум точкам:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1};$$

$$\frac{x-(-\frac{1}{2})}{\frac{5}{2}-(-\frac{1}{2})}=\frac{y-\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}};\quad \frac{x+\frac{1}{2}}{3}=\frac{y-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}};\quad \frac{x+\frac{1}{2}}{3}=\frac{-2y+3}{1};\ x+\frac{1}{2}=-6y+9;$$

$y=-\frac{1}{6}x+\frac{17}{12}$ - уравнение средней линии треугольника ABC, параллельной BC.

б) Из вершины А треугольника АВС опустим перпендикуляр АН, и составим уравнение этой прямой.

Прежде всего составим уравнение прямой ВС:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1};$$

$$\frac{x-(-2)}{4-(-2)}=\frac{y-0}{-1-0}; \quad \frac{x+2}{6}=\frac{y}{-1}; \; 6y=-x-2; \quad y=-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}; \quad k_{BC}=-\frac{1}{6}.$$

Так как $BC\perp AH \Rightarrow k_{BC}\cdot k_{AH}=-1,\; k_{AH}=\dfrac{-1}{-\frac{1}{6}}=6.$

Тогда, уравнение прямой АН с угловым коэффициентом $k_{AH}=6$ и проходящей через точку А(1;3) имеет вид:

$$y-y_0=k(x-x_0);$$

$$y-3=6(x-1);$$

$y=6x-3$ - уравнение высоты треугольника АВС, опущенной из вершины А.

Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2;\ 3)$ и $M_2(3;\ -1)$.

Решение. Воспользуемся формулой:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-3}{-1-3}=\frac{x-2}{3-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-3}{-4}=\frac{x-2}{1}$$

Разрешим полученное уравнение относительно y:

$$y-3=-4(x-2) \quad \Rightarrow \quad y-3=-4x+8$$

$$y=-4x+11.$$

8. Кривые второго порядка

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение второго порядка

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0.$$

Решение. Сгруппируем члены, содержащие x, и отдельно члены, содержащие y, и выделим их полные квадраты.

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0;$

$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) - 4 = 0;$

$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 - 4 = 0;$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9;$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2.$

Мы получили уравнение окружности с центром в точке C(1, -2) и радиусом, равным 3.

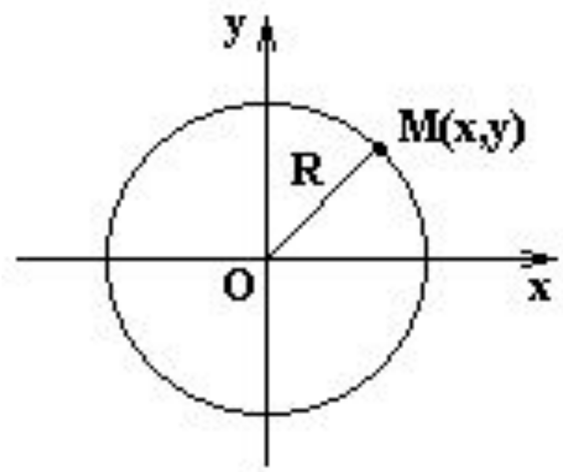
Окружность

Окружность - геометрическое место точек, равноудаленных от точки O (центр).

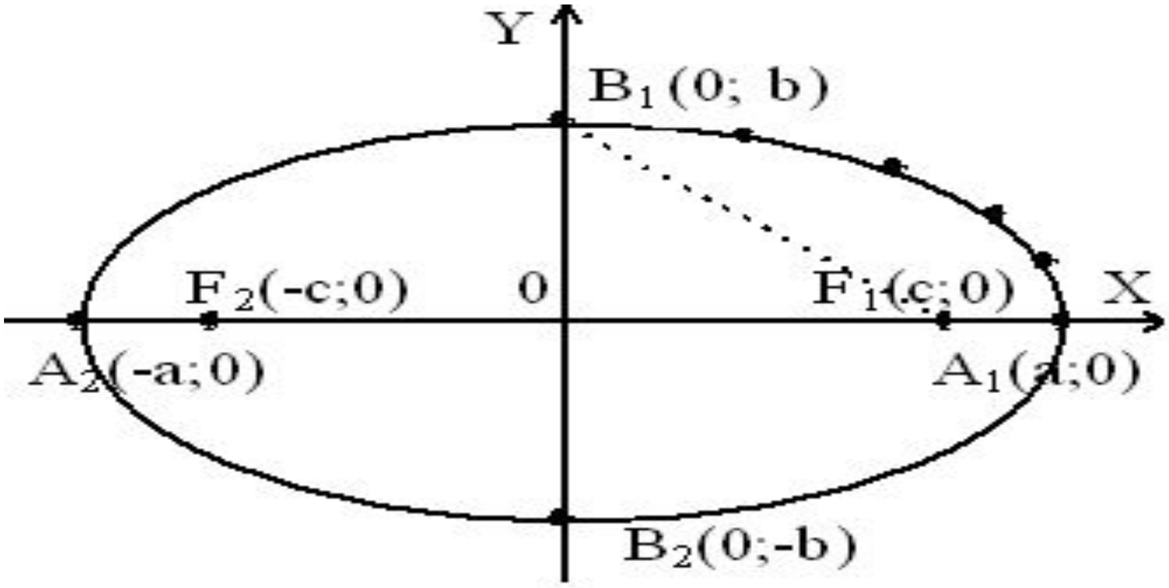
$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$ - уравнение окружности с радиусом R и центром в начале координат;

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}$$

- с центром в точке (x_0, y_0);

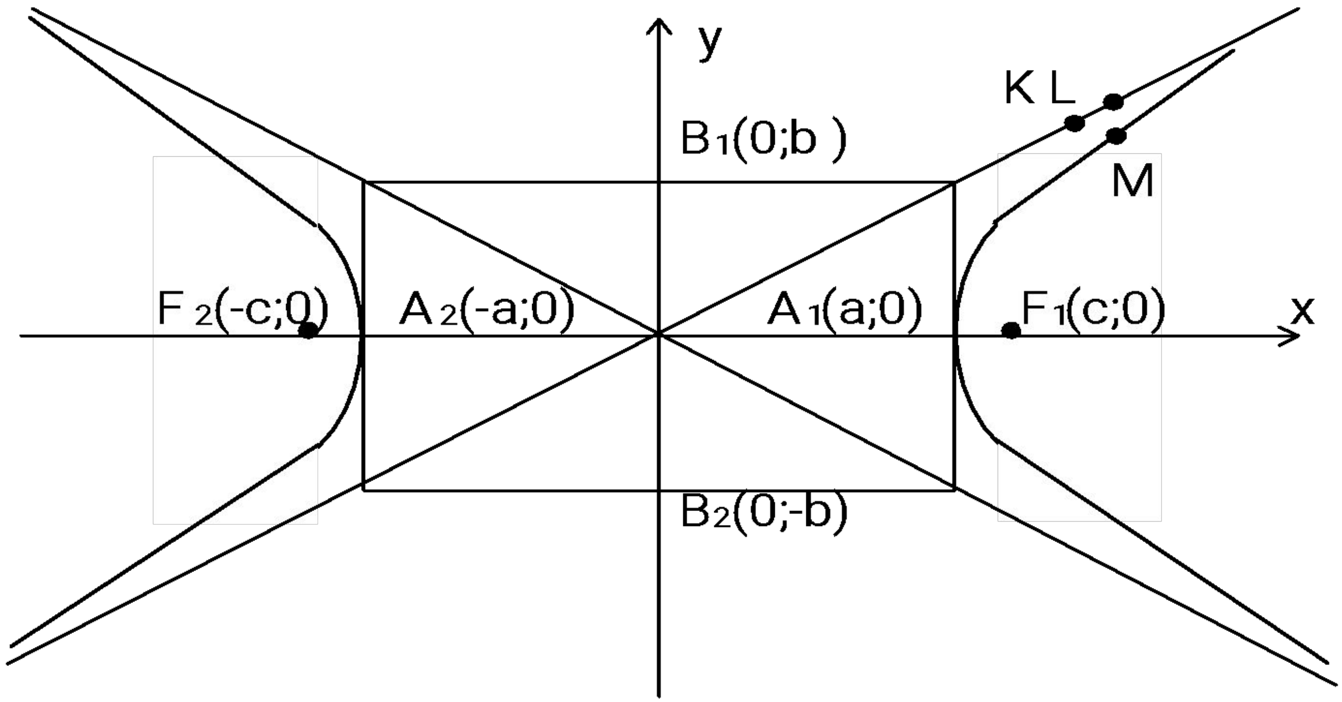


Эллипс



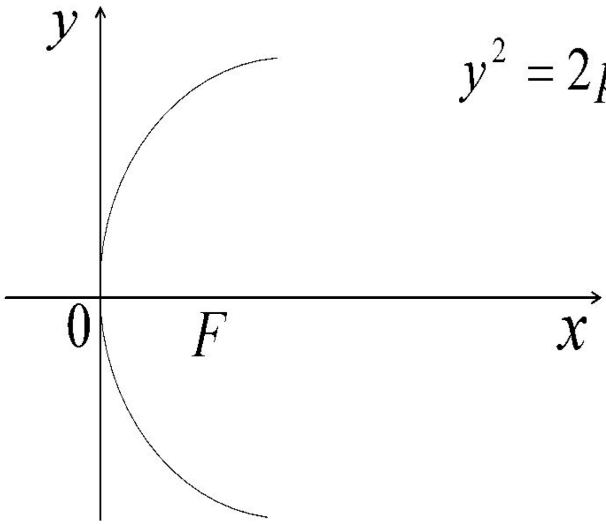
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1.$$

ГИПЕРБОЛА

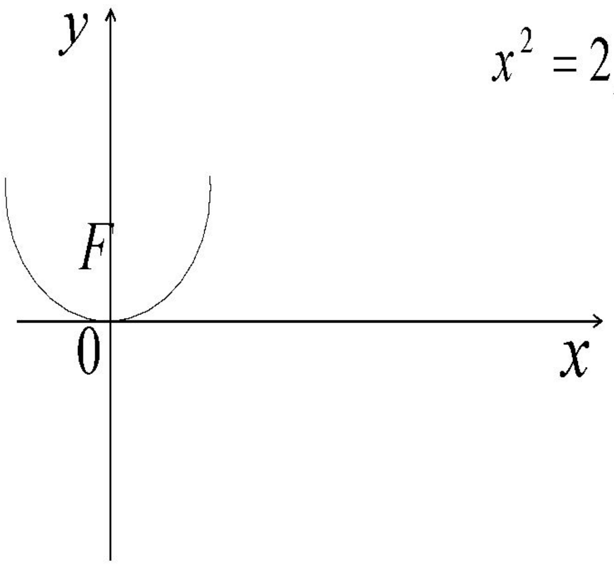


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1.$$

ПАРАБОЛА



$$y^2 = 2px,$$



$$x^2 = 2py.$$

Пример 2. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b = 3$.

Решение. По условию, $2c = 8$, $c = 4$, $b = 3$.

Мы знаем, что $b^2 = a^2 - c^2$, $a^2 = b^2 + c^2$, $a^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, $a = 5$.

Итак, каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Пример 3. Установите, какую линию определяет уравнение

$$y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13},\ y < 7,\ x \in R.$$

Нарисуйте ее график.

Пример 4. Установите, какую линию определяет уравнение

$$x = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y+1}{2}}.$$

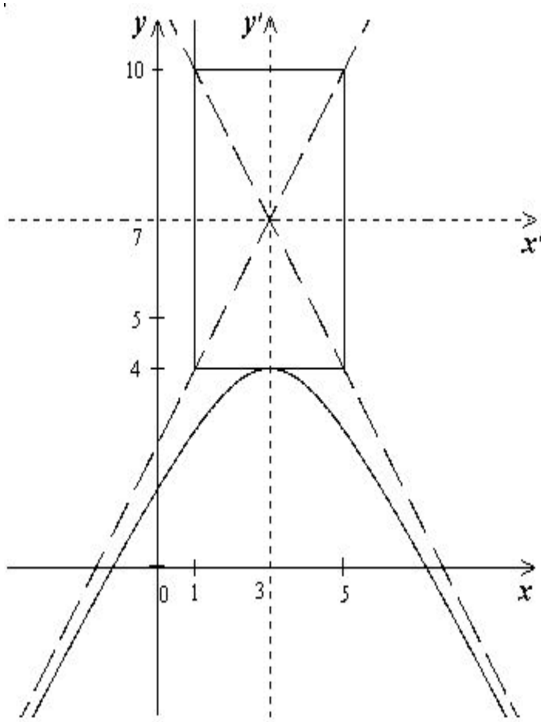
Нарисуйте ее график.

Пример 5. Установите, какую линию определяет уравнение

$$y = -2 - \sqrt{9 - x^2 + 8x}.$$

Нарисуйте ее график.

Пример 3.



ОЗФ: $y<7$.

$$y-7=-\frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13},\ \frac{4}{9}(y-7)^2=\left(x^2-6x+13\right).$$

Выделим в правой части полный квадрат:

$$\frac{4}{9}(y-7)^2=(x-3)^2+4,\ \frac{(y-7)^2}{9}-\frac{(x-3)^2}{4}=1$$

- гипербола, $O(3,\ 7)$, полуоси $a=2$, $b=3$.

Исходное уравнение $\begin{cases} y=7-\frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13}, \\ y<7 \end{cases}$ определяет нижнюю ветвь гиперболы, расположенную под прямой $y=7$.

Пример 4.

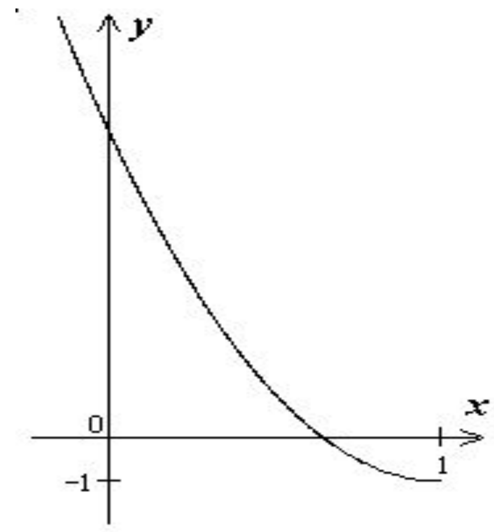
ОДЗ: $\begin{cases} \dfrac{y+1}{2} \geq 0, \\ 1 - x \geq 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq -1, \\ x \leq 1. \end{cases}$

$(y+1)/2 = 4\cdot(1-x)^2 \rightarrow y+1 = 8\cdot(1-x)^2.$

Искомая кривая –

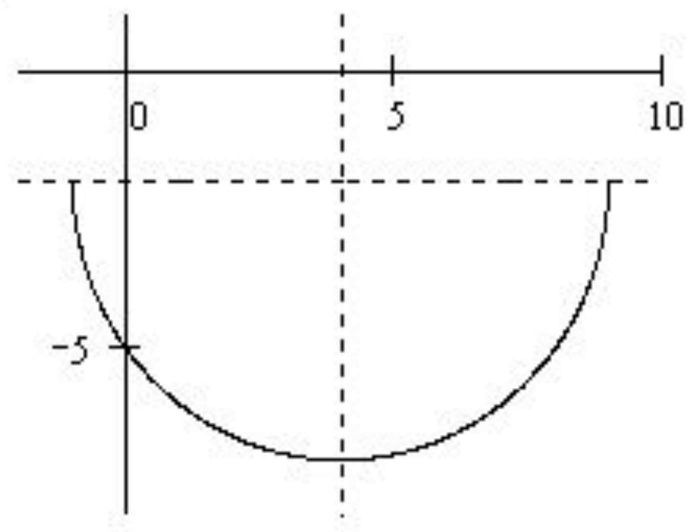
часть параболы с вершиной

в точке (1, -1).



Пример 5.

Искомая кривая –
часть окружности:
$(y + 2)^2 + (x - 4)^2 = 5^2$,
$y \le -2$, $x \in [-1, 9]$.



Пример 6.

Определить тип кривой и схематически построить ее

$$9x^2-25y^2-36x+150y-414=0$$

Решение. Приведем заданное уравнение к каноническому виду. Для этого в исходном уравнении выделим полные квадраты по переменным *x* и *y*. Перепишем исходное уравнение в виде:

$$9x^2-36x-25y^2+150y-414=0,$$

$$9(x^2-4x)-25(y^2-6y)-414=0,$$

$$9(x^2-2\cdot 2x+2^2-2^2)-25(y^2-2\cdot 3y+3^2-3^2)-414=0,$$

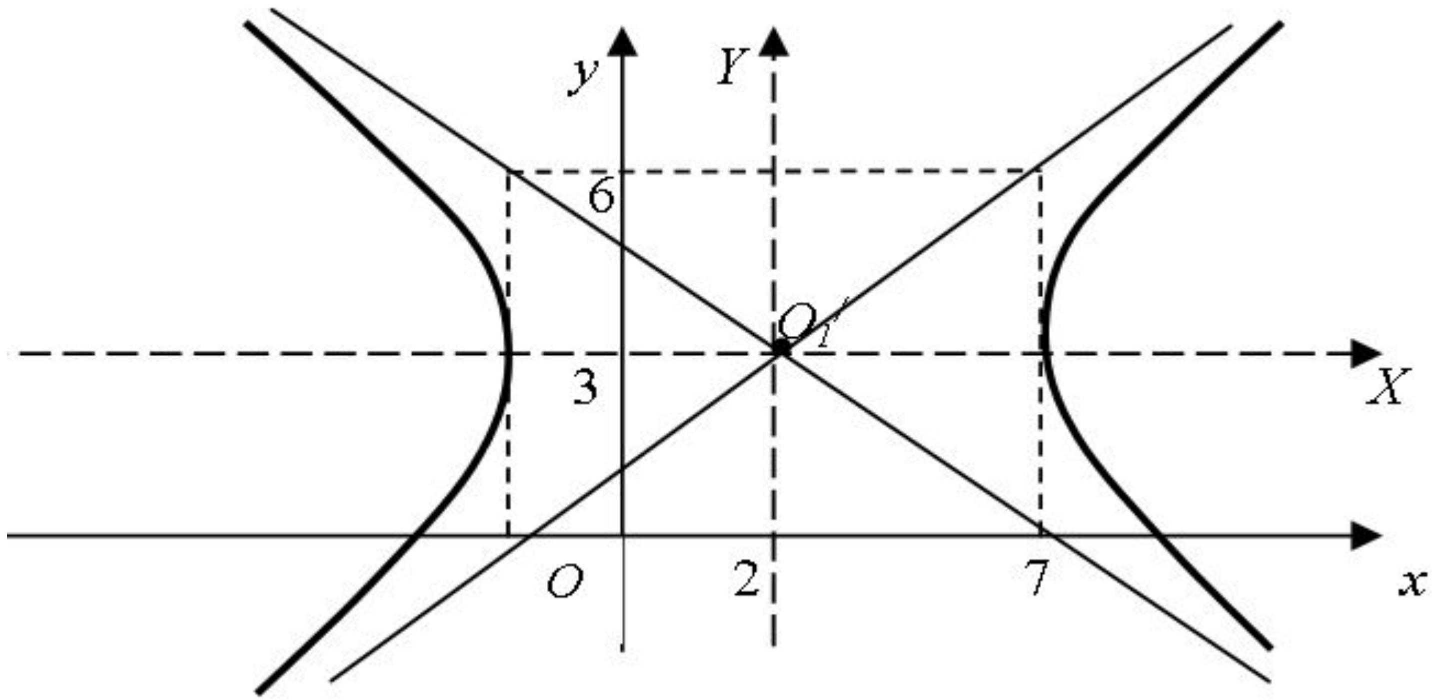
$$9[(x-2)^2-4]-25[(y-3)^2-9]-414=0,$$

$$9(x-2)^2-36-25(y-3)^2+225-414=0,$$

$$9(x-2)^2-25(y-3)^2=225,$$

$$\frac{(x-2)^2}{25}-\frac{(y-3)^2}{9}=1.$$

Получили гиперболу с центром в точке (2;3), большая полуось равна 5, малая полуось – 3.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

(практическое занятие)

ПРЕДЕЛЫ

Пример 1. Вычислить предел

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x+5}=\frac{3}{\infty}=0$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-6x^2+5x-1)=\infty$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3}=\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{3-\frac{5}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty}}=$$

$$=\frac{3-0+0}{1+0+0}=3$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^3-1})$

Решение.

$$\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^3-1}) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}) =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x^3-1} = \frac{2}{0} = \infty$$

Пример 3.

Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Перенесем иррациональность из числителя в знаменатель и перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(2-\sqrt{x+3}\right)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{\left(x^2-1\right)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{4-x-3}{\left(x^2-1\right)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(x-1)(x+1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(x+1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=-\frac{1}{8}.$$

Пример 4. Найти предел переменной $x_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{2n-1}$.

Решение. Выражение переменной x_n представляет собой неопределённость вида $\infty - \infty$. Если правую часть умножить и разделить на сумму $\sqrt{n^2+2} + \sqrt{2n-1}$, то мы придём к неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$, которая раскрывается приемом, изложенным в примерах 2 и 3:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{2n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{2n-1}\right)\left(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{2n-1}\right)}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{2n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4}} + \sqrt{\frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4}} + \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4}\right)} + \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}\right)}} = \infty.$$

Пример 5. Вычислить предел

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$$

Сначала попробуем подставить -1 в дробь:

$$\frac{2(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

В данном случае получена так называемая неопределенность 0/0

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенность вида 0/0, то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители**.

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=(*)$$

Очевидно, что можно сократить на (x+1)

$$(*)=\lim_{x\to -1}(2x-5)=(*)$$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$=2\cdot(-1)-5=-2-5=-7$$

Пример 6.

Найти предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$$

Сначала пробуем подставить 3 в выражение под знаком предела **это первое, что нужно выполнять для ЛЮБОГО предела.**

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{0}{0}=(*)$$

Получена неопределенность вида 0/0 , которую нужно устранять

Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности используют **метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение.**

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

$$(*) = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = (*)$$

$$(*) = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3} \frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3} \frac{-9}{5} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{5}\right) = -\frac{3}{10}$$

Примеры 7, 8

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}=(\frac{0}{0})==\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(2x)}{2x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}==2\cdot 1=2.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}=e^{\frac{4}{3}}$$

Пример 9. Вычислить предел

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+2}\right)\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=0$$

Пример 10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Решение. Преобразуем числитель и знаменатель дроби

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\qquad x^2=4\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}1=\frac{1}{2}$$

Производная функции

Пример 1. Вычислить первую и вторую производную, дифференциал функции

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

Решение

$$y' = \frac{1(x^2+1) - x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$dy = y'dx = \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}\right)'$$

$$= \frac{-2x(x^2+1)^2 - (-x^2+1)2(x^2+1)}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{-2x^3+4x^2-2x-4}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Пример 2

$$y = 3x\cos(1 - x^2)$$

Решение. Обозначим: f1(x)=3x; f2(x)= cos(1-x²)

Функция $f2(x) = \cos(1 - x^2)$ **- сложная функция. Тогда**

$$y' = (3x\cos(1 - x^2))' = 3 \cdot \cos(1 - x^2) + 3x(-\sin(1 - x^2)(-2x) =$$

$$= 3(\cos(1 - x^2) + 2x^2 \sin(1 - x^2))$$

$$dy = y'dx = 3 \cdot (\cos(1 - x^2) + 2x^2 \cdot \sin(1 - x^2))dx$$

$$y'' = 3 \cdot ((-\sin(1 - x^2)(-2x) + 4x(\sin(1 - x^2) + 2x^2(-\cos(1 - x^2)(-2x))$$

Пример 3.

$$y = e^{x} \ln \sin x$$

Решение. Обозначим $f1(x) = e^{x}; f2(x) = \ln \sin x$

Тогда

$$y' = (e^{x})' \ln \sin x + e^{x} (\ln \sin x)' = e^{x} \ln \sin x + e^{x} \frac{1}{\sin x} (-\cos(x))$$

$$dy = y'dx = e^{x} (\ln \sin x - \frac{1}{\sin x} \cos(x))dx =$$

$$y'' = (e^{x} (\ln \sin x - \frac{1}{\sin x} \cos(x)))' = e^{x} (\ln \sin x - ctgx) + e^{x} (\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin^{2} x})$$

Пример 4. Вычислить производную функции

$$y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$$

$$y' = \frac{x'(\sin x + \cos x) - x(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin x + \cos x - x\cos x + x\sin x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

Пример. Найти производную функции $y=\cos\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.8) дифференцирования сложной функции. Здесь цепочка из трех звеньев: $y=\cos u$; $u=\sqrt{v}$; $v=\dfrac{1}{1+x}$. В этом примере следует сначала продифференцировать косинус. Так как косинус вычисляется от квадратного корня, то вслед за этим надо продифференцировать корень. Но корень вычисляется от дроби, а поэтому надо продифференцировать дробь и все три полученные производные перемножить:

$$y' = \underbrace{-\sin\sqrt{\frac{1}{1+x}}}_{\text{производная косинуса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1+x}}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{\left[-\frac{1}{(1+x)^2}\right]}_{\text{производная дроби}}.$$

Окончательно $y' = \dfrac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}\cdot\sin\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$.

Пример 5. Исследовать функцию g(x) и построить ее график

$$g(x) = 5(x-2)e^{x-1}$$

1) Область определения - R.
2) Функция непериодическая.
3) Четность/нечетность - функция общего вида.
4) Точки пересечения с осью ОХ: $y = 0 \quad x = 2$
5) с осью OY: $x = 0$; y=-10\e ;

$$y > 0 \quad при \quad x \in (2; \infty)$$

$$y < 0 \quad при \quad x \in (-\infty; 2)$$

Экстремумы, возрастание, убывание

$$g'(x) = 5e^{x-1} + 5(x-2)e^{x-1} = 5e^{x-1}(x-1) = 0$$

$$x = 1$$

x	$(-\infty; 1]$	$[1; \infty)$
g'	-	+
g	убывание	возрастание

$$x_{\min} = 1$$

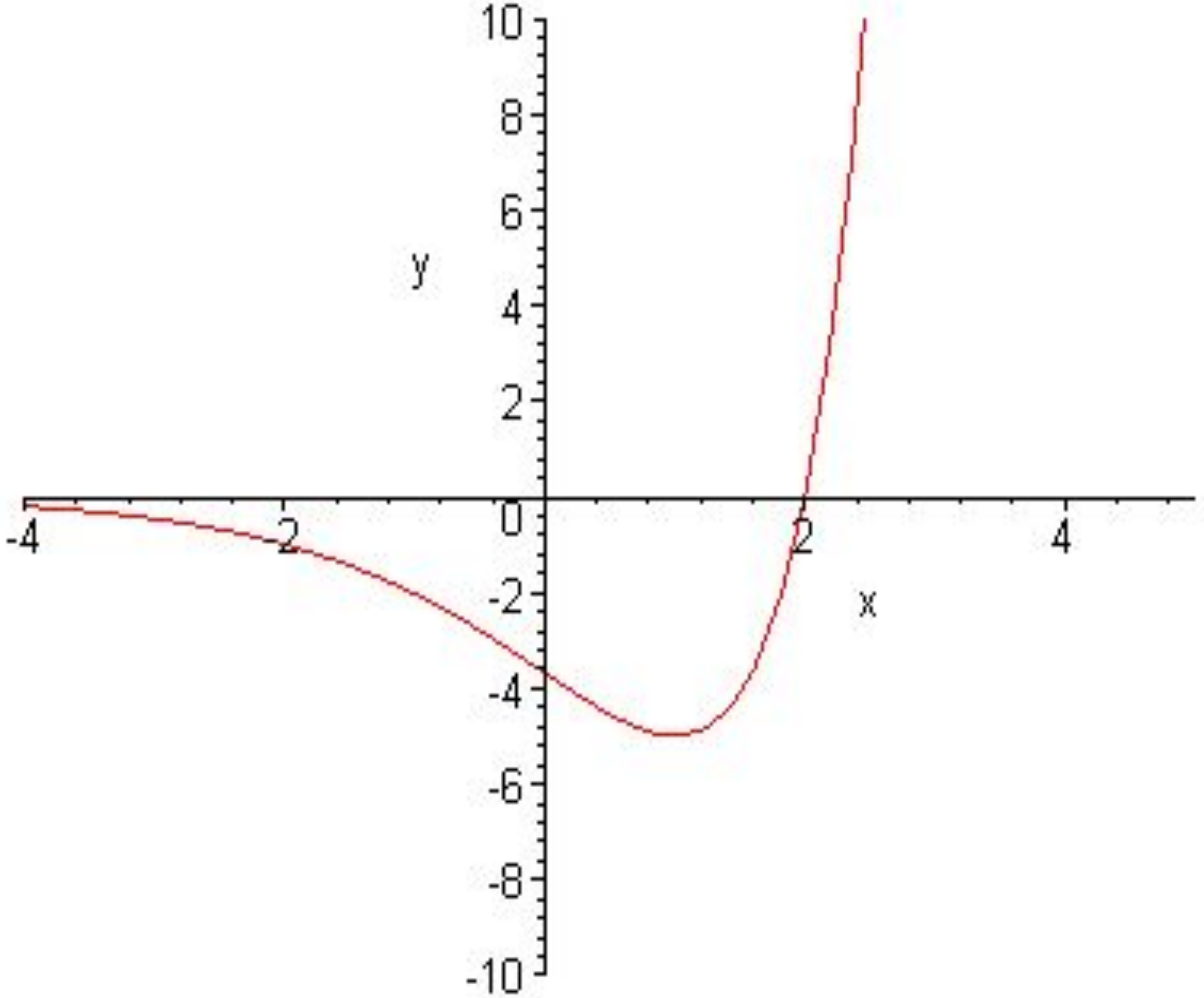
Выпуклость/вогнутость

$$g''(x) = 5e^{x-1} + 5(x-1)e^{x-1} = 5e^{x-1} \cdot x = 0$$

$$x = 0 - \textit{точка перегиба}$$

$$x \in (-\infty;\, 0) \to y'' < 0 - \textit{выпуклость}$$

$$x \in (\,0;\, \infty) \to y'' > 0 - \textit{вогнутость}$$



10
8
6
y
4
2
0
-4
-2
2
4
x
-2
-4
-6
-8
-10

Интегральное исчисление

Пример 1. Вычислить $\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx=\int x^2dx+3\int x^3dx+\int xdx+\int dx=.$$

$$=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C$$

Пример 2. Вычислить

$$\int x\ln x\,dx = \left| \begin{array}{l} u=\ln x,\ du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=x\,dx,\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+C\,.$$

Пример 3. Вычислить интеграл

Найти $$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x}dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{x}=t,\, x=t^2, \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{1+t}{1+t^2}2tdt =$$

$$= 2\int \frac{tdt}{1+t^2} + 2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + 2\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt =$$

$$= \ln(t^2+1) + 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \ln(t^2+1) + 2t - 2arctgt + C =$$

$$= \ln(x+1) + 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + C.$$

Пример 4.

Вычислить интеграл $$\int xe^{-3x^2+4}dx$$

Сделаем замену $t=-3x^2+4$, тогда $dt=-6xdx$,

следовательно $xdx=-\dfrac{dt}{6}$.

$$\int xe^{-3x^2+4}dx=\int e^t\cdot\left(-\frac{dt}{6}\right)=-\frac{1}{6}\int e^t dt=-\frac{1}{6}e^t+C=-\frac{1}{6}e^{-3x^2+4}+C$$

Пример 5.

$$\int x\sin x\,dx = \int \underbrace{x}_{u}\, d(\underbrace{-\cos x}_{v}) =$$

$$= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx =$$

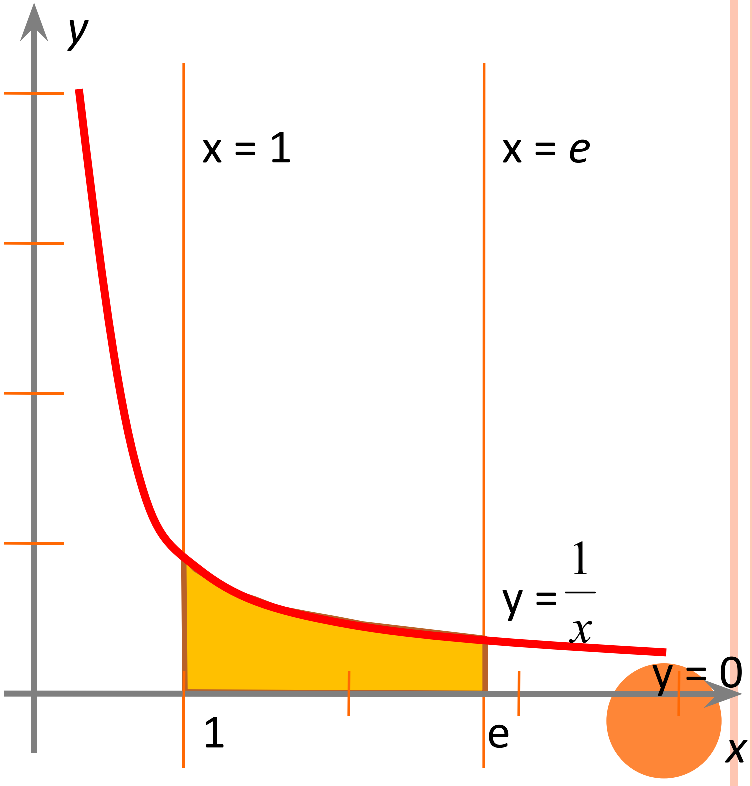
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

Пример 6.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 0,\ y = \frac{1}{x},\ x = 1,\ x = e.$

$$S = \int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

Ответ: $S = 1$



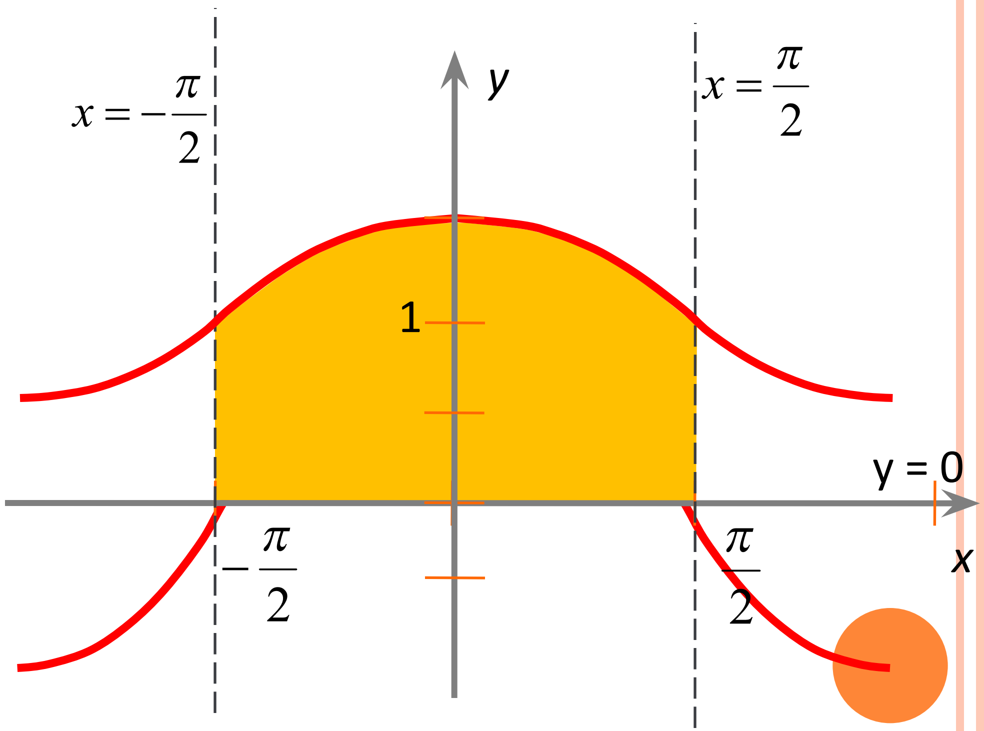
Пример 7.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 1 + \frac{1}{2}\cos x, y = 0, x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$$

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \frac{1}{2}\cos x)dx =$$

$$= (x + \frac{1}{2}\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi + 1$$



Ответ: *S = π+1*

Пример 8.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x-2$ и $y=x^2-4x+2$

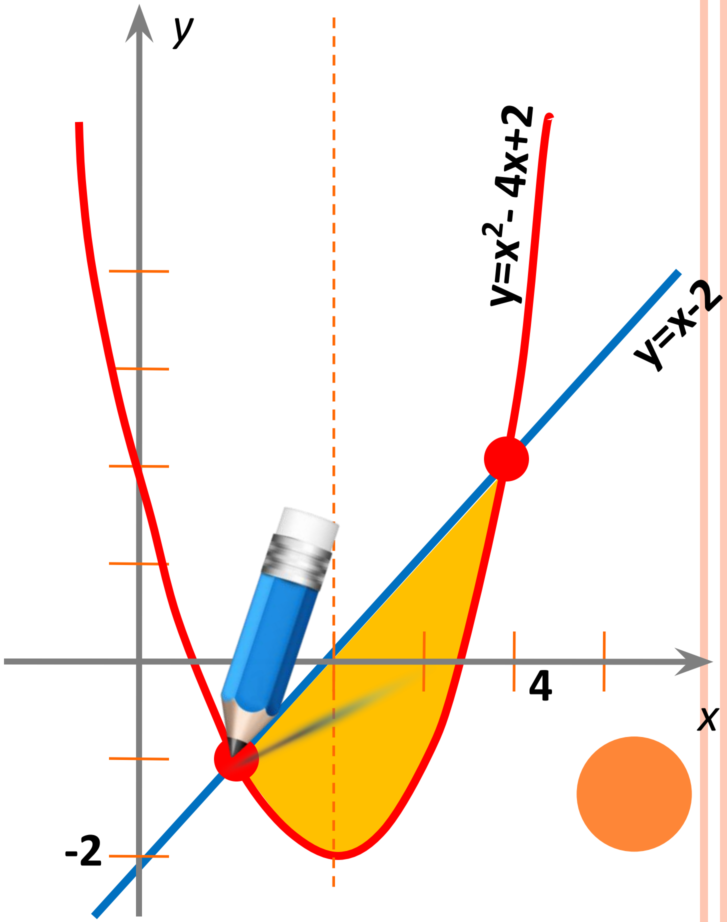
1. $y=x^2-4x+2$, $x_в=2$, $y_в=-2$
2. $y=x-2$: $x=0$, $y=-2$; $x=2$, $y=0$
3. Абсциссы точек пересечения:

$$x^2-4x+2=x-2$$

$$x_1=1,\ x_2=4$$

4. $S=\int_1^4((x-2)-(x^2-4x+2))dx=$

$$=\int_1^4(5x-x^2-4)dx=\left(\frac{5x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-4x\right)\Bigg|_1^4=4{,}5$$



Ответ: $S=4{,}5$

Пример 9.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями
и

$$y = -x^2 - 2x + 3$$

$$y = x^2 - 1$$