# Задачи оптимизации

Среди прикладных задач, решаемых с помощью математики, выделяются так называемые задачи оптимизации. Среди них:

– транспортная задача о составлении оптимального способа перевозок грузов;

– задача о диете, т.е. о составлении наиболее экономного рациона питания, удовлетворяющего определенным медицинским требованиям;

– задача составления оптимального плана производства;

– задача рационального использования посевных площадей и т.д.

Несмотря на различные содержательные ситуации в этих задачах, математические модели, их описывающие, имеют много общего, и все они решаются одним и тем же методом, разработанным отечественным математиком Л.В. Канторовичем (1912-1986).

# Транспортная задача

Пусть на три завода $З_1$, $З_2$, $З_3$, требуется завезти сырье одинакового вида, которое хранится на двух складах $С_1$, $С_2$. Потребность в сырье каждого вида для данных заводов указана в таблице 1, а расстояние от склада до завода - в таблице 2. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т.е. такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее.

Таблица 1

| Наличие сырья (в т) на складе | | Потребность в сырье (в т) на заводе | | |
|---|---|---|---|---|
| $С_1$ | $С_2$ | $З_1$ | $З_2$ | $З_3$ |
| 20 | 25 | 10 | 15 | 20 |

Таблица 2

| Склад | Расстояние (в км) от склада до завода | | |
|---|---|---|---|
| | $З_1$ | $З_2$ | $З_3$ |
| $С_1$ | 5 | 7 | 10 |
| $С_2$ | 3 | 4 | 6 |

# Решение транспортной задачи 1

Для решения этой задачи в первую очередь проанализируем ее условие и переведем его на язык математики, т.е. составим математическую модель. Для этого количество сырья, которое нужно перевезти со склада $С_1$ на заводы $З_1$, $З_2$, обозначим через $x$ и $y$ соответственно. Запишем данные в виде таблицы 3.

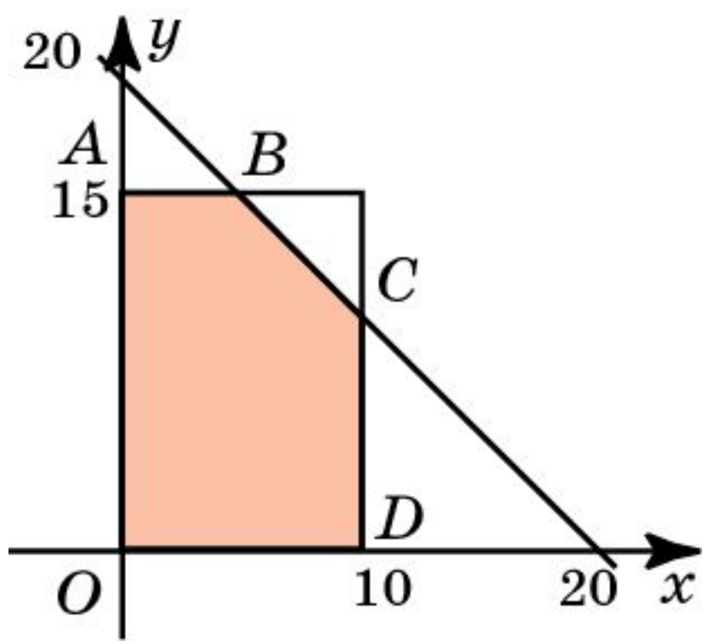
| Склады | Количество сырья (в т), перевезенное на заводы | | |
|---|---|---|---|
| | $З_1$ | $З_2$ | $З_3$ |
| $С_1$ | $x$ | $y$ | $20\text{-}x\text{-}y$ |
| $С_2$ | $10\text{-}x$ | $15\text{-}y$ | $x+y$ |

# Решение транспортной задачи 1

Поскольку все величины, входящие в эту таблицу, должны быть неотрицательными, получим следующую систему неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 10 - x \geq 0, \\ 15 - y \geq 0, \\ 20 - x - y \geq 0, \\ x + y \geq 0. \end{cases}$$

Последнее неравенство является следствием двух первых и его можно отбросить. Оставшиеся неравенства определяют многоугольник $OABCD$, изображенный на рисунке. Назовем его многоугольником ограничений.



# Решение транспортной задачи 1

Общее число тонно-километров $F$ выражается формулой: $F =$

$=5x + 7y + 10(20 - x - y) + 3(10 - x) +4(15 - y) + 6(x + y) = 290 - 2x - y.$

Воспользуемся тем, что для нахождения наименьшего значения линейной функции на многоугольнике достаточно вычислить значения функции в вершинах многоугольника и выбрать из них наименьшее.

Вершины многоугольника имеют координаты:

$O(0, 0)$, $A(0, 15)$, $B(5, 15)$, $C(10, 10)$, $D(10, 0)$.

Значения функции в этих вершинах соответственно равны:

$F(O) = 290$, $f(A) = 275$, $f(B) = 265$, $f(C) = 260$, $f(D) = 270$.

Наименьшее значение функции $F$ достигается в точке $C(10,10)$ и оно равно $260$.

# Решение транспортной задачи 1

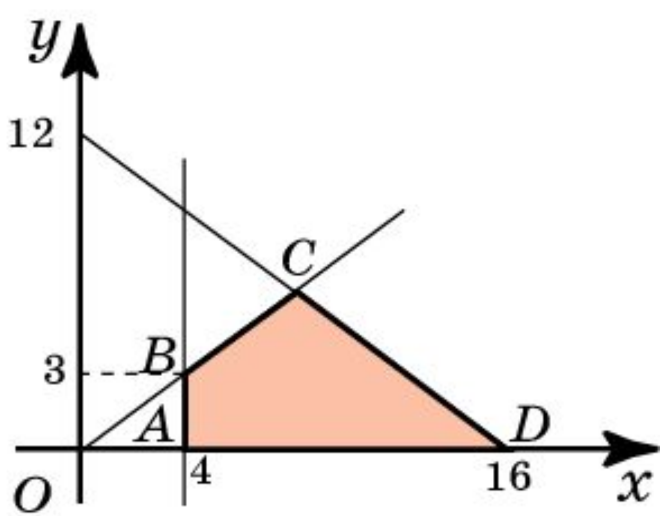
В соответствии с этим наиболее выгодный вариант перевозок задается таблицей.

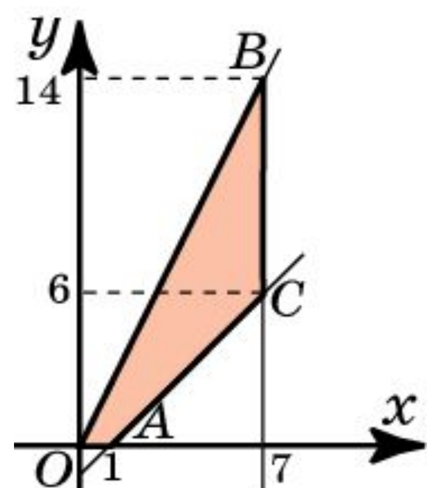
| Склад | Количество сырья (в т), перевезенное на заводы | | |
|---|---|---|---|
| | $З_1$ | $З_2$ | $З_3$ |
| $С_1$ | 10 | 10 | 0 |
| $С_2$ | 0 | 5 | 20 |

# Упражнение 1

Нарисуйте фигуру, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств:

а) $\begin{cases} 3x + 4y - 48 \le 0, \\ 3x - 4y \ge 0, \\ x \ge 4,\ y \ge 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y \ge 0, \\ x - y \le 1, \\ x \le 7,\ y \ge 0. \end{cases}$

Ответ: а) 

, б) 

# Упражнение 2

Найдите наибольшее значение функции $F = x + y$ при условии

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ 5x + 3y \leq 15, \\ 2x + 6y \leq 12, \\ x \leq 3, y \leq 2. \end{cases}$$

Ответ: 3,5.

# Упражнение 3

Пусть математическая модель некоторой задачи представляется следующей системой ограничений

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ -2 - 2x - y \geq 0, \\ 2 - x + y \geq 0, \\ 5 - x - y \geq 0. \end{cases}$$

На множестве решений этой системы найдите наименьшее значение функции $F = y - x$.

Ответ: -2.

# Задача 2

Мастерская выпускает трансформаторы двух видов. На один трансформатор первого вида расходуется 5 кг трансформаторного железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида - 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации одного трансформатора первого вида мастерская получает 150 руб. прибыли, а от реализации одного трансформатора второго вида - 100 руб. Сколько трансформаторов каждого вида нужно выпустить, чтобы получить наибольшую сумму прибыли, если мастерская располагает 480 кг железа и 300 кг проволоки?

# Решение задачи 2

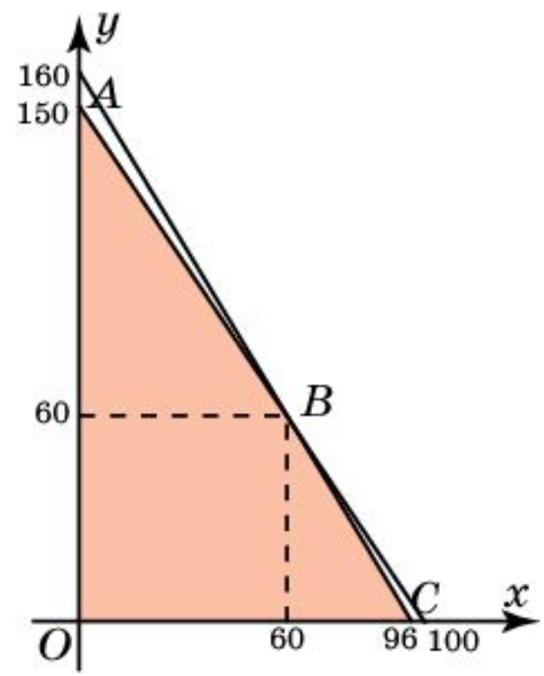
Пусть $x$ – число трансформаторов первого вида, $y$ – число трансформаторов второго вида. Тогда общая прибыль от продажи трансформаторов выражается функцией

$$F(x, y) = 150x + 100y.$$

Аргументы $x$ и $y$ имеют ограничения, выражаемые системой неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 5x + 3y \leq 480, \\ 3x + 2y \leq 300. \end{cases}$$

Эти неравенства задают многоугольник $OABC$, изображенный на рисунке.



# Решение задачи 2

Вершины многоугольника имеют координаты:

$O(0, 0)$, $A(0, 150)$, $B(60, 60)$, $C(96, 0)$.

Значения функции $F(x, y)$ в этих вершинах соответственно равны:

$F(O) = 0$, $f(A) = 15000$, $f(B) = 15000$, $f(C) = 14400$.

Наибольшее значение функции $F$ равно 15000 и достигается в вершинах $A(0, 150)$ и $B(60, 60)$.

Следовательно, это значение принимается и во всех точках отрезка $AB$.

Ответ: Трансформаторов первого вида можно выпускать $2k$ штук, трансформаторов второго вида $150 – 3k$ штук, $k = 0, \ldots, 30$. При этом прибыль будет одинаковой, равной 15000 руб.