Графы

Теория графов

Лектор: *Гладких Борис Афанасьевич,*

профессор кафедры прикладной информатики

Gladkikh_ba@yahoo.com

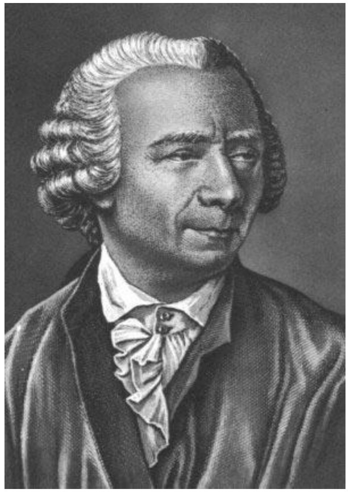
Введение

Теория графов – раздел дискретной математики, изучающий свойства конечных или счетных множеств с точки зрения отношений между их элементами.

Особенностью теории графов является геометрический (т. е. графический) подход к построению моделей изучаемых множеств.

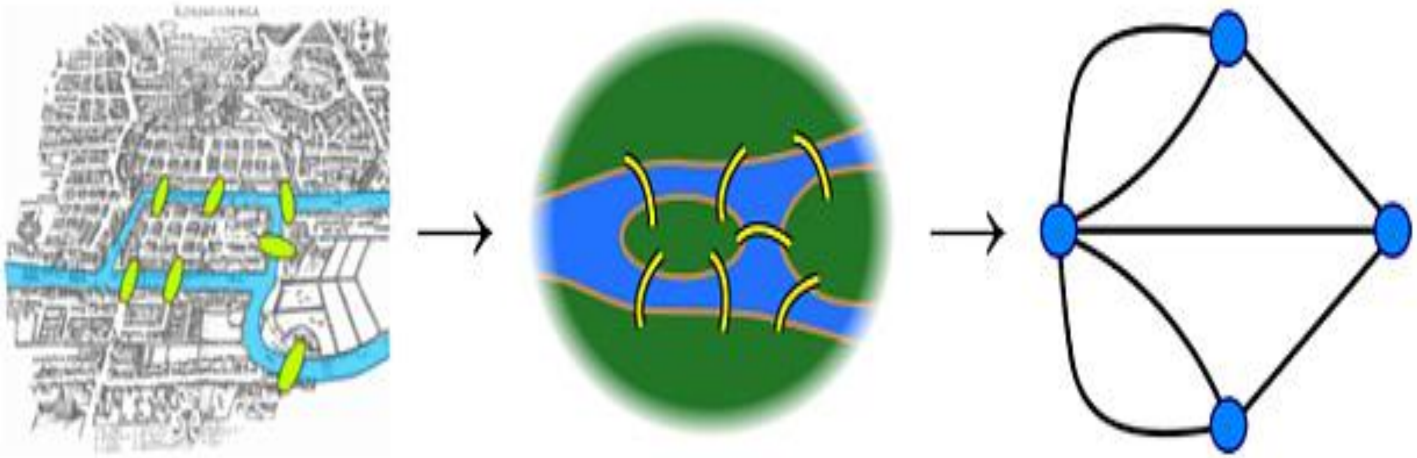
Первая работа по теории графов была написана еще в 1736 году Леонардом Эйлером, в которой он решил «задачу о Кёнигсбергских мостах»: как пройти по семи мостам через реку Преголя, не проходя ни по одному из них дважды.

1. Задача о кенигсбергских мостах (1736)



Леонард Эйлер (1707-1783)

Современный Калининград

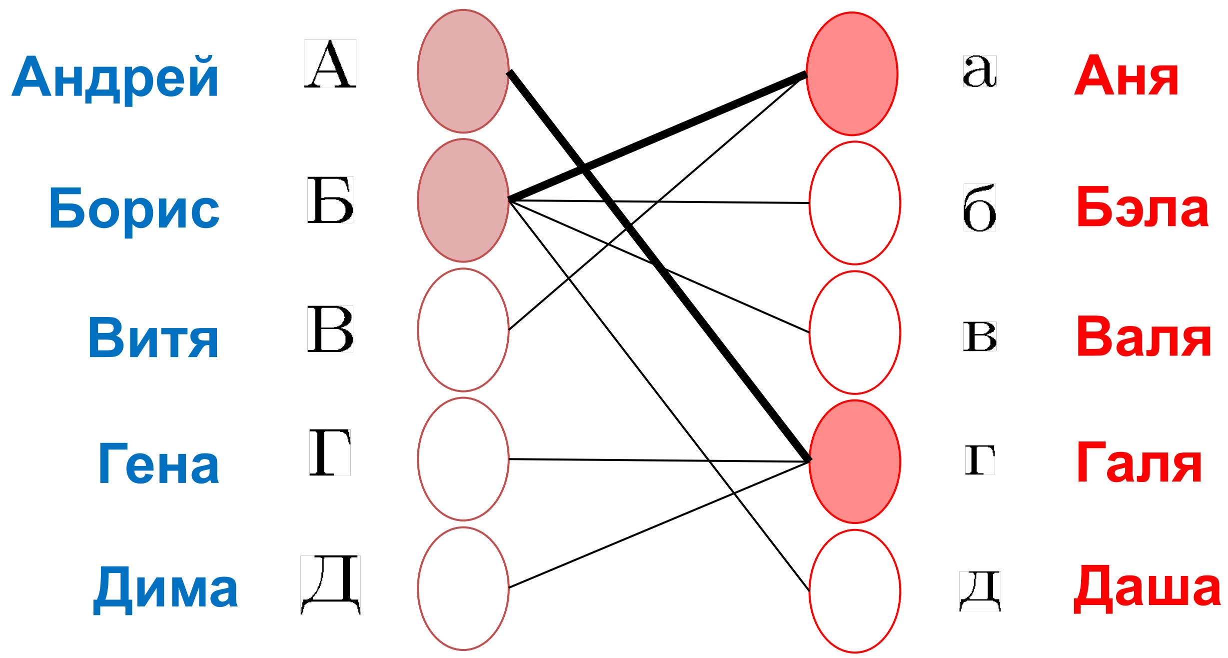


Заслуга Эйлера в том, что он сумел построить математическую модель задачи, абстрагировавшись от несущественных деталей (формы и размеров улиц и мостов и др.). Рассматривается множество участков суши и отношение «есть мост».

Впервые понятие «граф» ввел в 1936 году венгерский математик Денеш Кёниг. Он же написал первую книгу по теории графов: «Теория конечных и бесконечных графов»

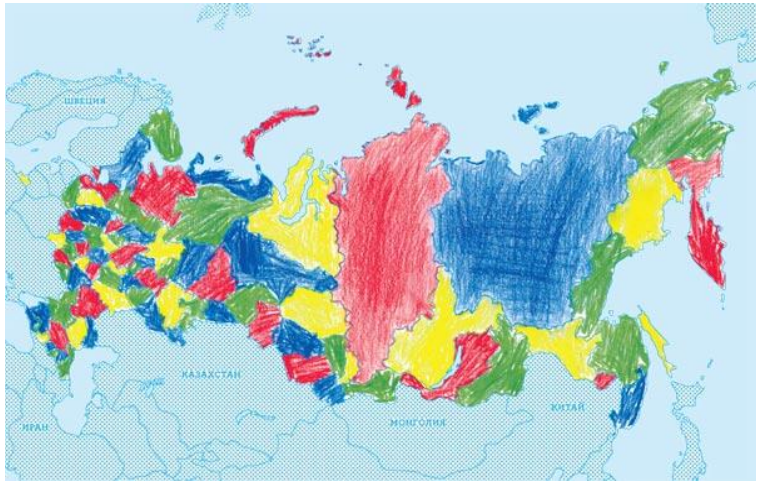
Денеш Кениг (1884-1944)

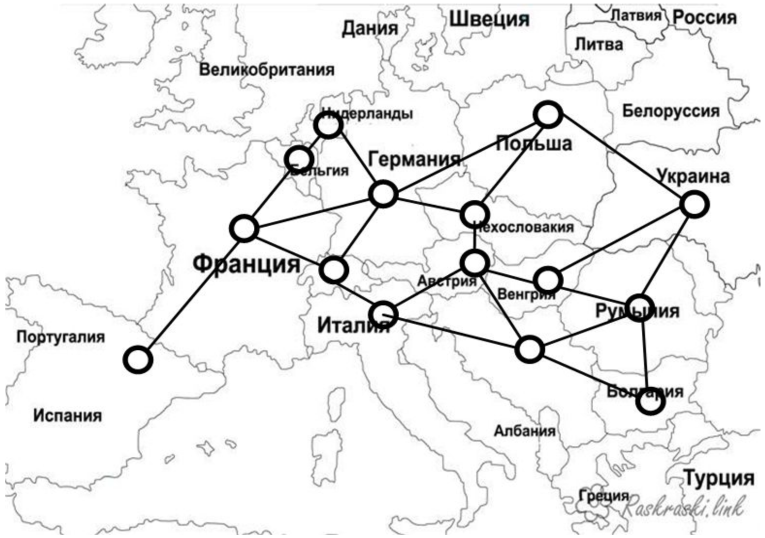
2. Задача Кенига о деревенских свадьбах (задача о назначении, о наибольшем паросочетании)



3. Задача о раскраске плоского графа (проблема четырех красок)

Задача поставлена в 1852(?) г. шотландским физиком Фредериком Гутри как головоломка. Теорема о пяти красках, утверждающая, что достаточно пяти цветов, имела короткое несложное доказательство и была доказана в конце XIX века, но доказательство теоремы для случая четырёх цветов столкнулось со значительными трудностями. Более 100 лет проблема 4 красок интриговала ученых.





В 1976 г. ведущие математики всего мира получили письма с почтовым штемпелем «Четырех красок достаточно». В письмах была статья математиков *Кеннета Аппеля* и *Вольфганга Хакена* из Иллинойского университета, содержащая доказательство теоремы.

Это была первая крупная математическая теорема, доказанная с помощью компьютера. Первым шагом доказательства была демонстрация того, что существует определенный набор из 1936 карт, ни одна из которых не может содержать карту меньшего размера, которая опровергала бы теорему. Аппель и Хакен использовали специальную компьютерную программу, чтобы доказать это свойство для каждой из 1936 карт. Доказательство этого факта заняло сотни страниц.

Во 2-й половине 20 века теория графов превратилась в разветвленную математическую дисциплину, имеющую множество приложений: в экономике, информатике, химии, медицине и т. д.

Граф представляет собой исключительно удобную и наглядную абстрактную модель для представления самых различных систем и процессов.

Глава 1.
Основные понятия

1.1. Типы графов. Основная терминология

Терминология теории графов очень разнообразна и не окончательно устоялась. Почти каждый автор начинает учебник с объяснения используемой им терминологии.

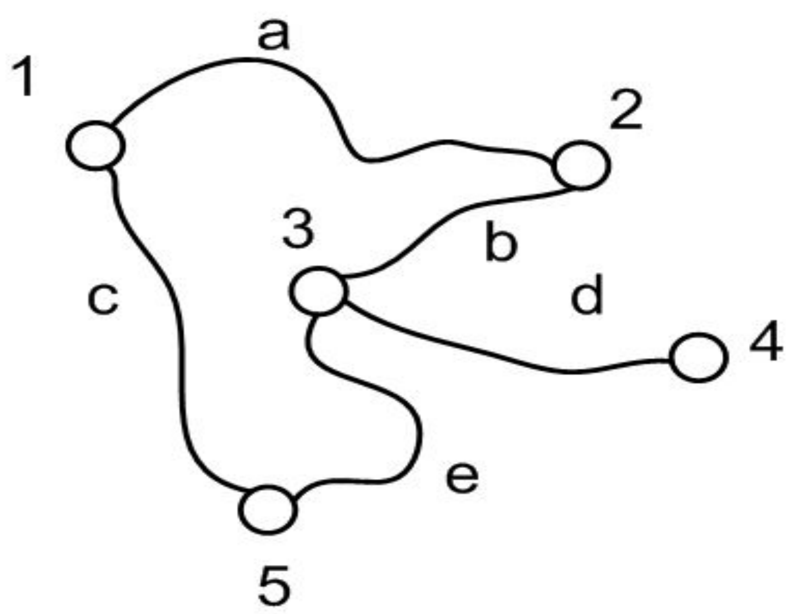
Составлен «Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании» под ред. В.А. Евстигнеева и В.Н. Касьянова. - Новосибирск: Наука, 1999. – 291 с.

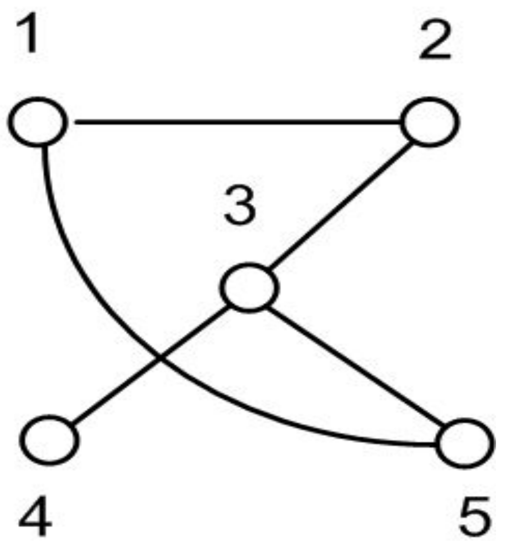
Краткий словарь по теории графов можно найти на сайте Lmatrix
http://lmatrix.ru/news/theory/glossarijj-teorii-grafov_507.html

На интуитивном уровне граф (graph) представляет собой абстрактную схему, состоящую из точек и соединяющих их линий.

Точки называются вершинами (vertex - vertices) или узлами (node - nodes), а соединяющие их линии – ребрами (edge -

Типы графов

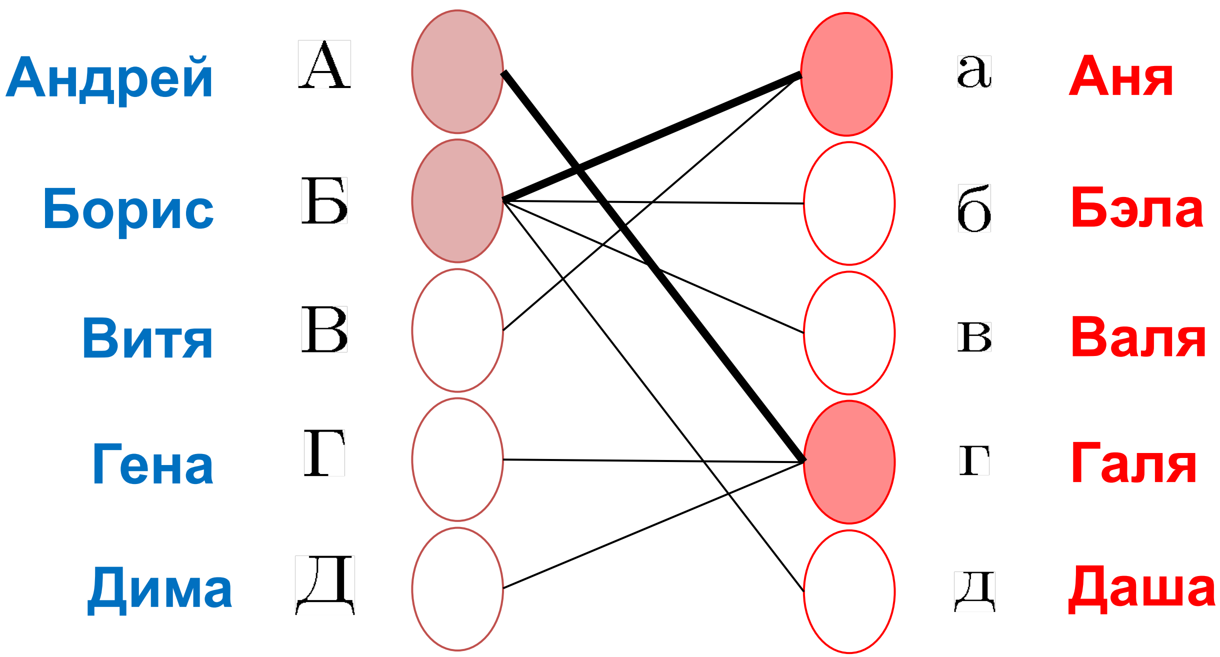




Приведенный на примере граф относится к числу самых простых, он называется обыкновенным или простым (simple). В обыкновенном графе ребра не имеют ориентации, вершины соединены не более чем одним ребром (униграф), а у вершин нет петель.

Двудольный граф

Обыкновенный граф, вершины которого можно разбить на два противоположных множества так, что ребра соединяют только вершины противоположных множеств, называется двудольным графом (bipartite graph) или графом Кенига или бихроматическим графом (bichromatic graph).

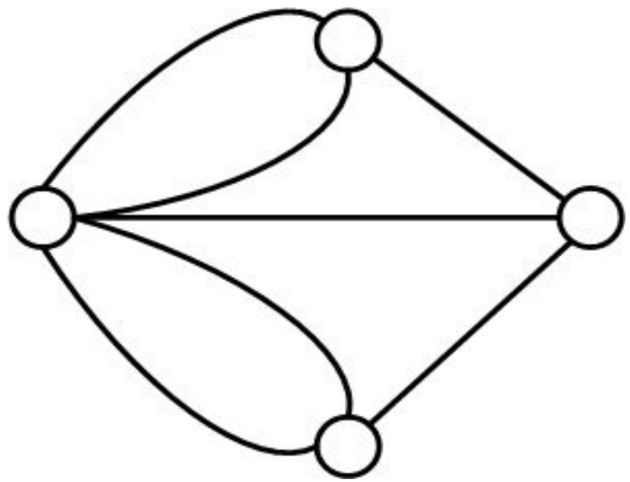


Мультиграф и орграф

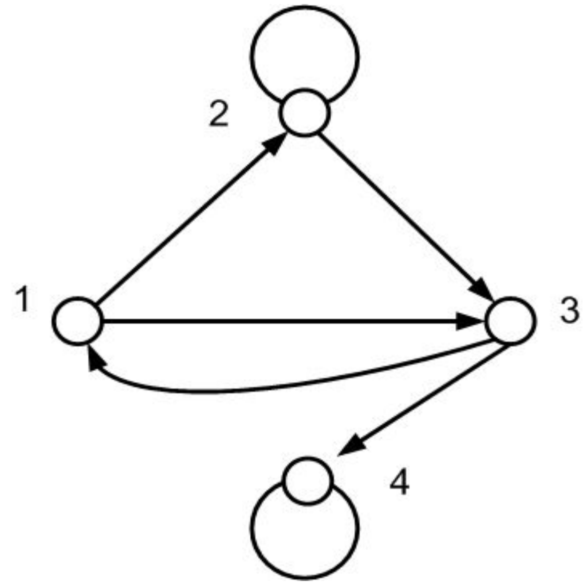
В более сложных случаях вершины могут соединяться более чем одним ребром , т.е. кратными ребрами. Это мультиграф (multigraph).

При вершинах могут быть петли (loops) .

Ребра могут иметь ориентацию, такой граф называется ориентированным или орграфом (oriented graph). Ориентированные ребра называются дугами (arc - arcs).

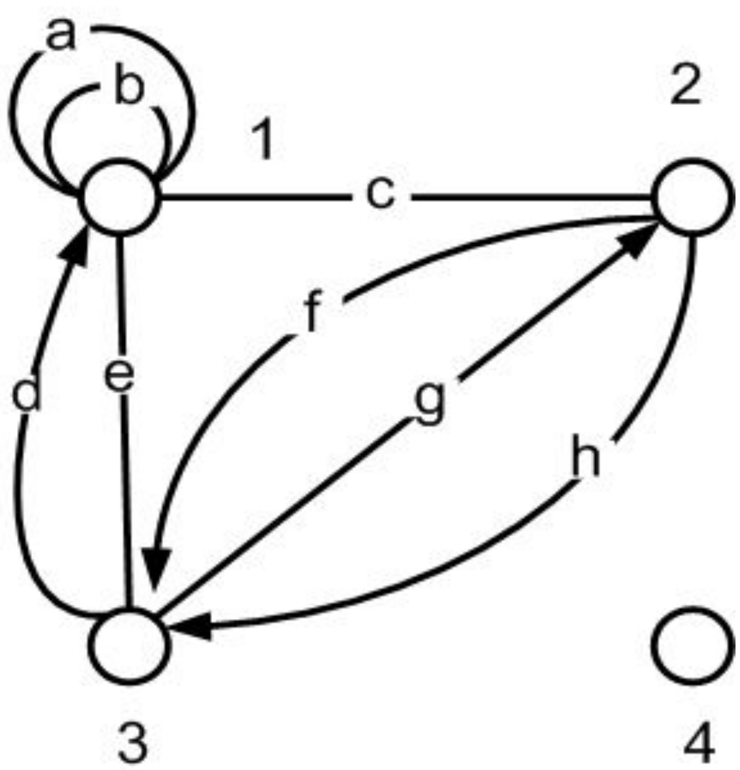


Неориентированный мультиграф (2-граф)



Ориентированный граф с петлями

Граф общего вида



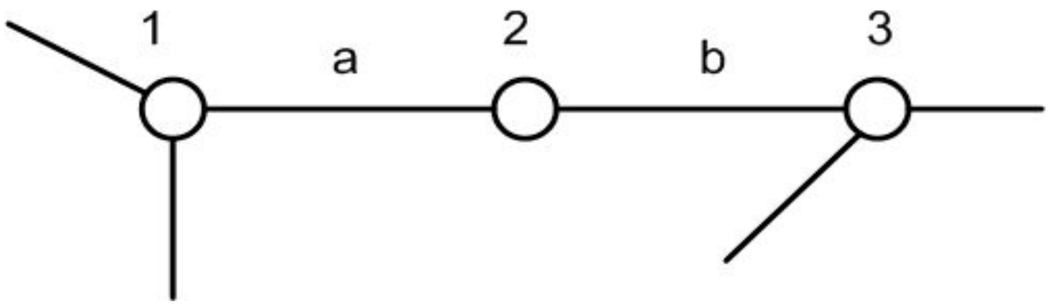
В общем случае все варианты ребер могут присутствовать одновременно. На рисунке пример частично ориентированного 3-графа с петлями, имеющего 4 вершины. Вершина 4 изолированная.

Взвешенный граф

В некоторых графовых моделях ребрам приписываются некоторые числа (веса), которые означают длины ребер, пропускные способности каналов связи и т. д. Такие графы называются взвешенными (weighted graph).

Пример – задачи о кратчайшем пути на местности, о наибольшем потоке данных в сети связи и т. д.

Инцидентность (incidency) и смежность (ajacency).

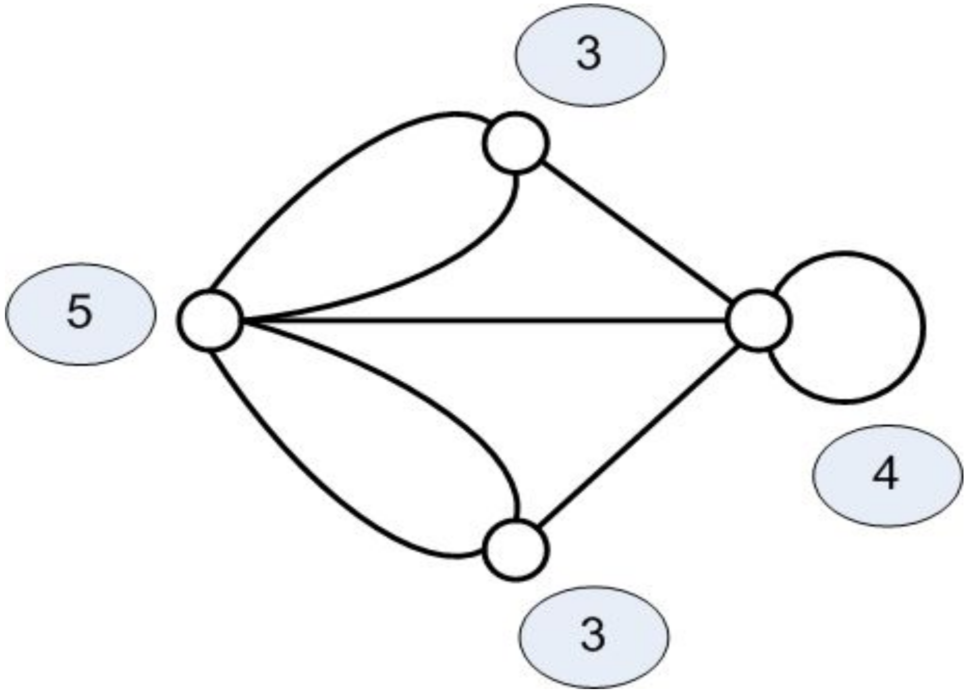


В данном графе вершина 2 инцидентна ребрам *a* и *b*.

Вершины 1 и 2 смежны, так как они имеют общее ребро a

Ребра a и b смежны, так как они имеют общую вершину 2

Степень и валентность вершин

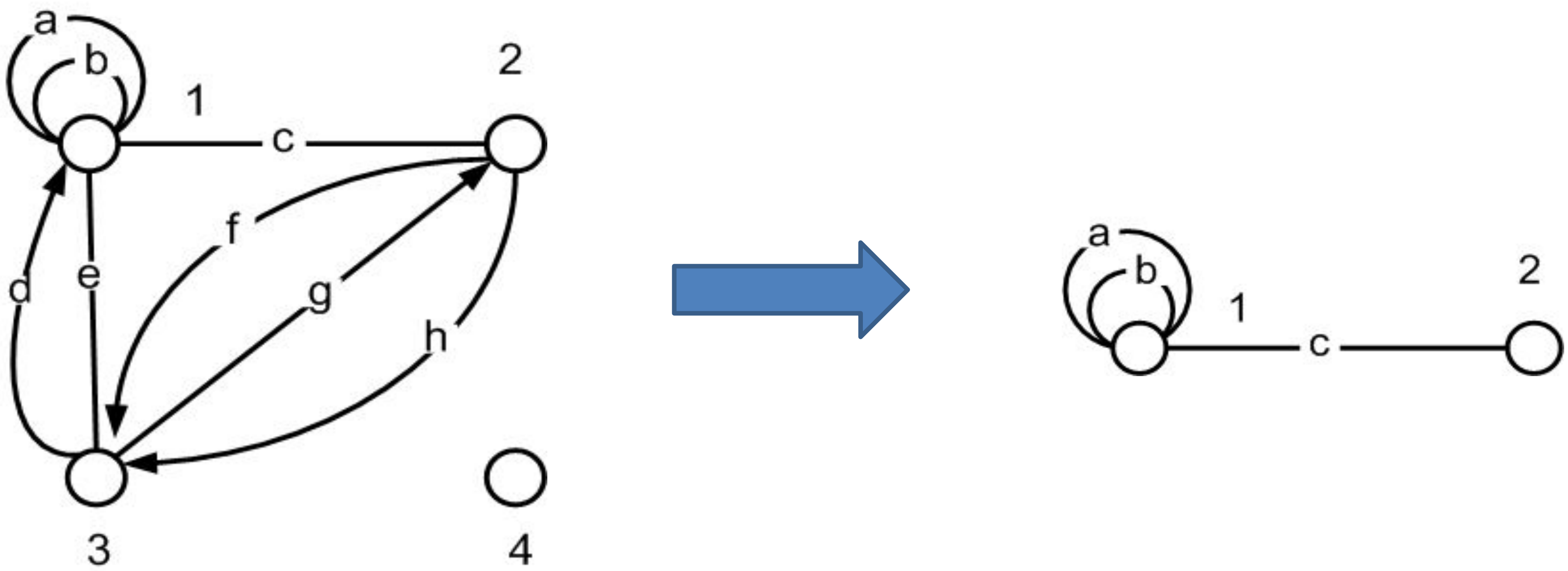


Количество ребер, инцидентных вершине, называется степенью вершины (degree of a vertex). При подсчете валентности (valency) петля считается дважды.

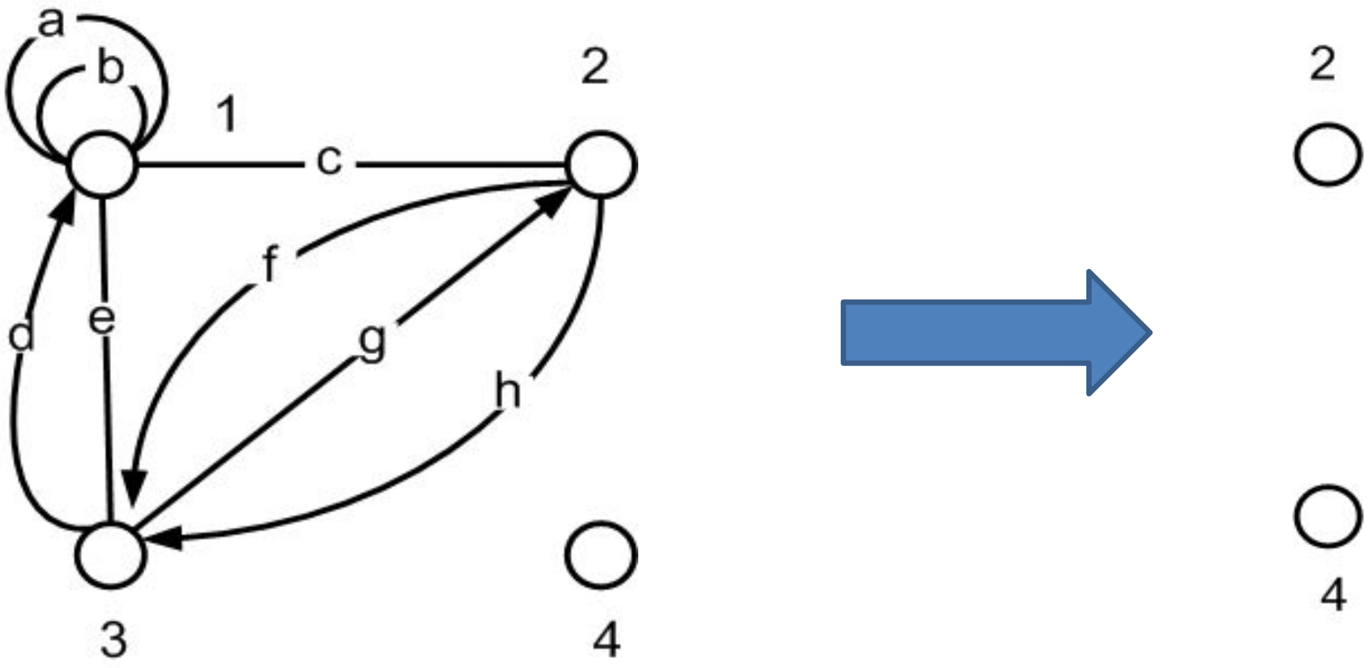
1.2. Части графа

Подграф

Подграф (subgraph) – часть графа, в которой сохраняется подмножество вершин и ВСЕ ИНЦИДЕНТНЫЕ ИМ РЕБРА

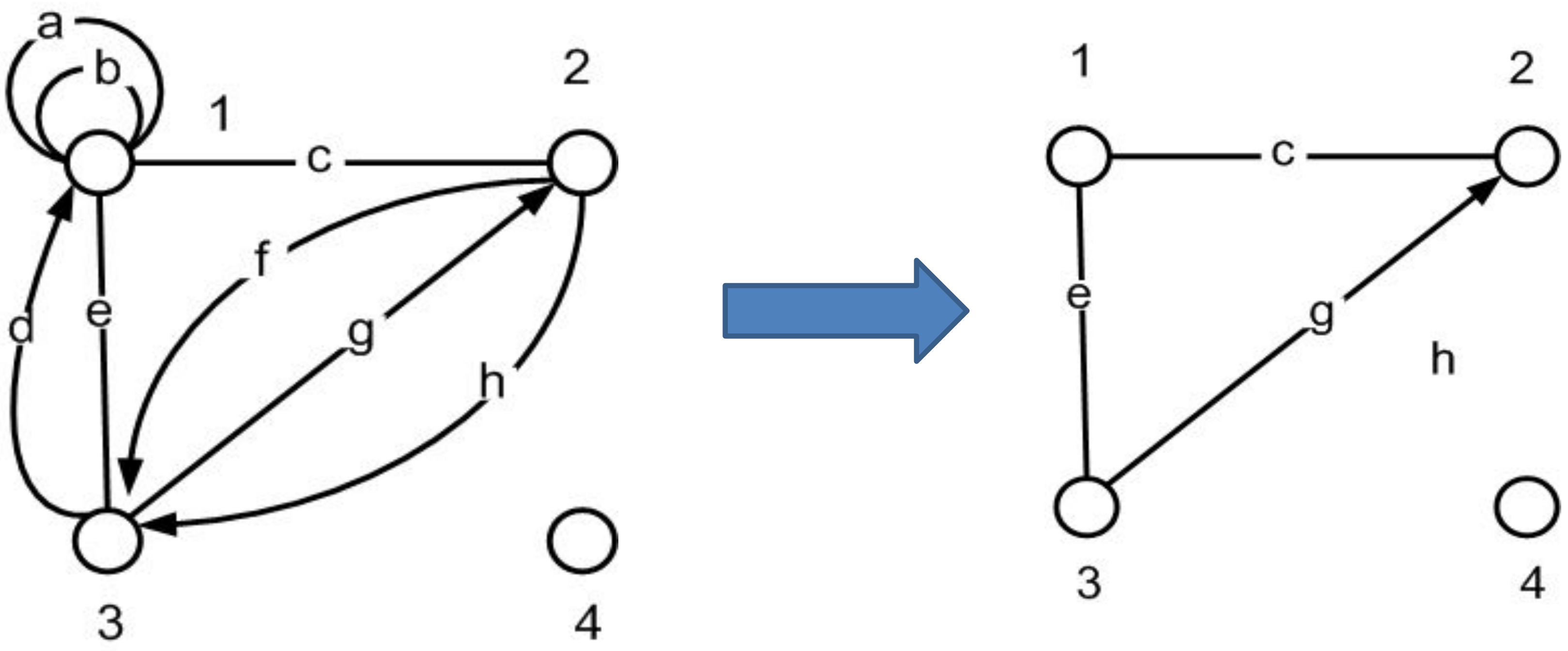


Пустой подграф



Суграф

Суграф – часть графа, в которой сохраняются все вершины и часть ребер. В англоязычной литературе также называется subgraph.



1.3. Математическое определение графа

Для понятия «граф» существуют несколько строгих математических определений, каждое из которых удобно для определенного класса графов:

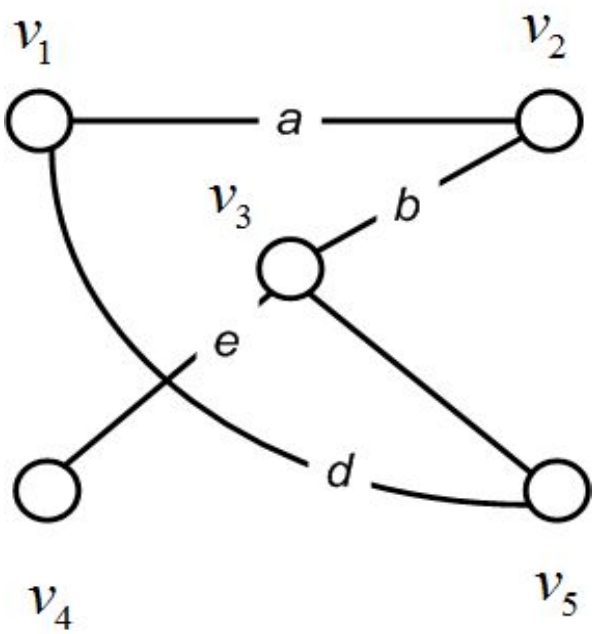
- для обыкновенных графов;

- для ориентированных графов (Оре, Берж);

- для графов общего вида (Зыков).

Обыкновенный граф

(Обыкновенный) Граф G есть пара (V, E) , где V – непустое множество объектов некоторой природы, называемых вершинами графа, а E - подмножество двухэлементных подмножеств множества V, называемых ребрами графа.



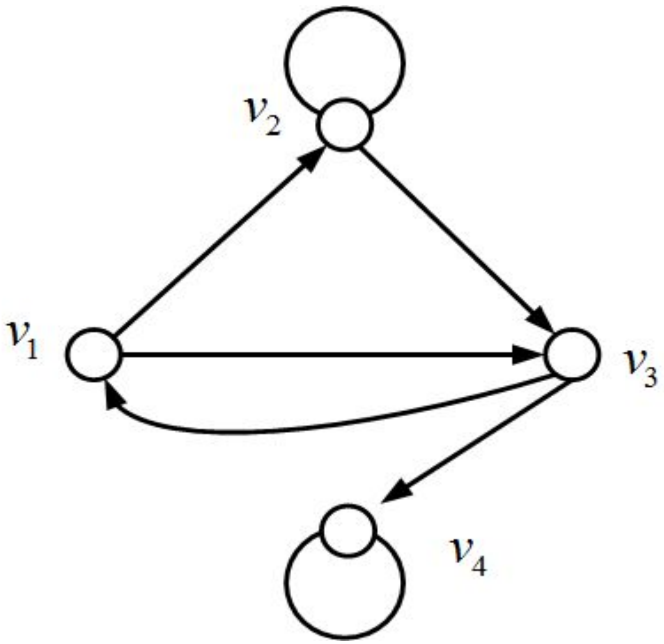
Пример

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_5\}\{v_3, v_4\}\{v_3, v_5\}\}$$

Граф как бинарное отношение (Оре)

(Ориентированный) Граф G есть пара (V, E) , где V – непустое множество объектов некоторой природы, называемых вершинами графа, а E - подмножество элементов декартова произведения $E \subseteq V \times V$, называемых ребрами графа.



Пример

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\};$$

$$E = \{\langle v_1, v_2\rangle, \langle v_1, v_3\rangle, \langle v_2, v_2\rangle, \langle v_2, v_3\rangle, \langle v_3, v_1\rangle, \langle v_3, v_4\rangle, \langle v_4, v_4\rangle\}$$

Скобки $\langle\rangle$ обозначают упорядоченность.

Элементы множества [illegible]

$\langle x, y\rangle$ или xy называются *дугами*.

Говорят, что дуга $\langle x, y\rangle$ *исходит* из вершины x и *заходит* в вершину y, или дуга *соединяет* вершины x и y.

Дуга $\langle x, x\rangle$ называется *петлей*.

На рисунке дуга изображается линией со стрелкой (петля без стрелки).

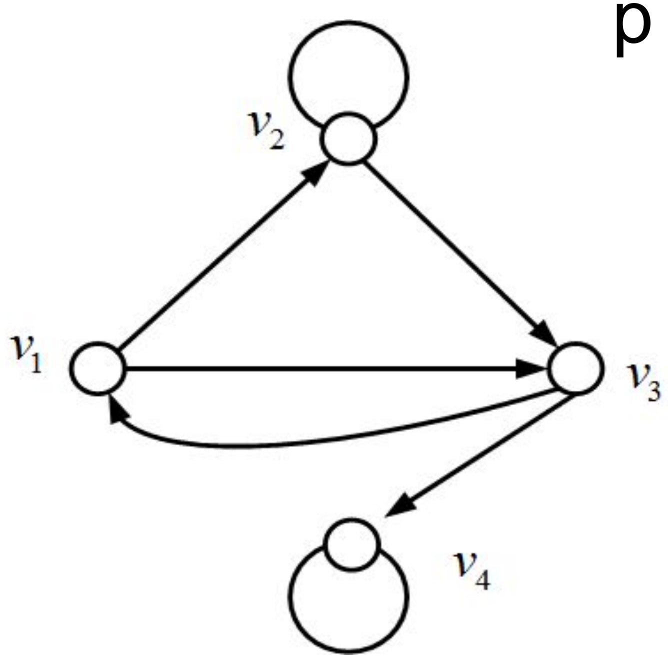
Ойстин Оре
(1899—1968)

Определение графа -- бинарного отношения использует норвежский математик
О. Оре в монографии «Теория графов ». – М: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.– 336 с. (второе издание)

Граф как многозначное отображение (Берж)

(Ориентированный) Граф G есть пара (V, Γ) , где V – непустое множество объектов некоторой природы, называемых **вершинами** графа, а Γ - многозначное отображение множества V в себя: $\Gamma: V \to V$.

Пример



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$\Gamma(v_1)=\{v_2, v_3\}$
$\Gamma(v_2)=\{v_2, v_3\}$
$\Gamma(v_3)=\{v_1, v_4\}$
$\Gamma(v_4)=\{v_4\}$

Дуги $\langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_1, v_3 \rangle,\ \langle v_2, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle,\ \langle v_3, v_1 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle,$ $\langle v_4, v_4 \rangle$ Петли $\langle v_2, v_2 \rangle, \langle v_4, v_4 \rangle$

Множество пар $\langle x, y \rangle$, для которых $x \in V, y \in \Gamma x$ -- это множество дуг; пары $\langle x, x \rangle$, где $x \in V, x \in \Gamma x$ -- петли.

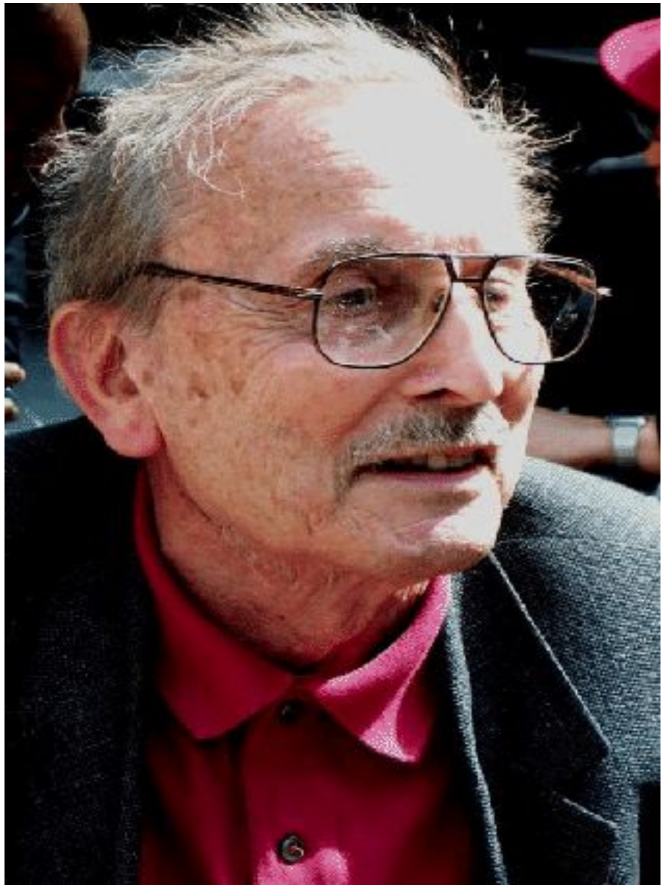
Множество Γx -- это *окружение* вершины x -- множество тех вершин, в которые из x заходят дуги.

Замечание. При необходимости можно использовать степени отображения: $\Gamma^2 x = \Gamma(\Gamma x)$, $\Gamma^3 x = \Gamma(\Gamma(\Gamma x))$ и т.д.

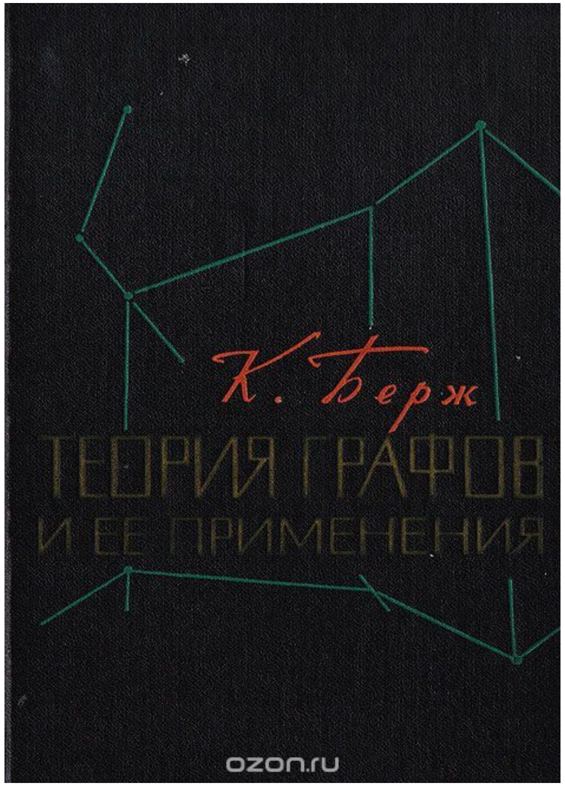
Для нашего примера $\Gamma^2 v_1 = \Gamma\{v_2, v_3\} = \Gamma v_2 \cup \Gamma v_3 = \{v_2, v_3\} \cup \{v_1, v_4\}$ $=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$-множество вершин, достижимых из v_1 за 2 шага.

В общем случае $\Gamma^k x$ -- множество вершин, достижимых из x за k шагов.

[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]



Claude Jacques Berge (5 June 1926 – 30 June 2002) was a French mathematician, recognized as one of the modern founders of combinatorics and graph theory.



Граф общего вида как трехместный предикат (Зыков)

Граф G есть тройка $(V, E; P)$, где V множество вершин, E - множество ребер, $P(x, u, y)$ — трехместный предикат (инцидентор). Высказывание $P(x, u, y)$ истинно, когда ребро u соединяет вершину x с вершиной y (в указанном порядке).

Предикат P обладает следующими свойствами:

1) он определен на всех упорядоченных тройках $x, y \in V, u \in \mathrm{E}$;
2) $\forall u \exists x, y\{P(x,u,y) \wedge \forall x', y'[P(x',u,y') \Rightarrow$

$$(x = x') \wedge (y = y') \vee (x = y') \wedge (y = x')]\}$$

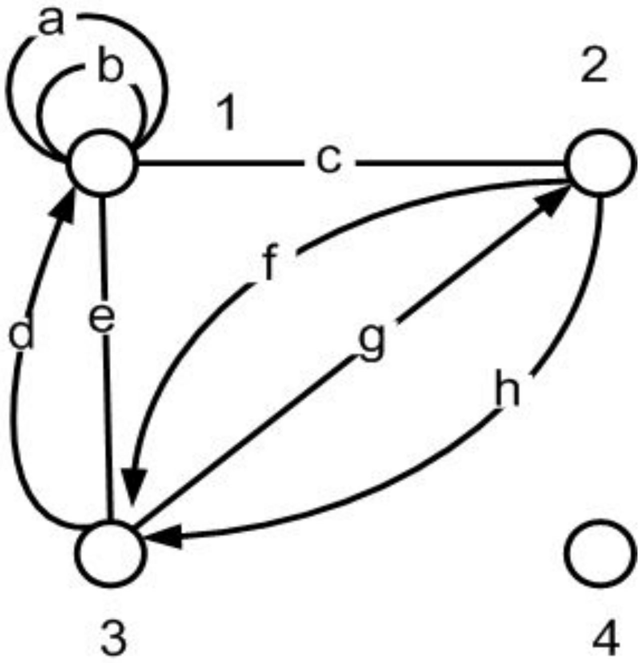
Т. е. каждое ребро графа соединяет какую-либо упорядоченную пару вершин и, кроме того может (необязательно) соединять ту же пару в обратном порядке.

Следовательно, для любого ребра u истинно одно и только одно из трех высказываний:

1. $\exists x, y \in V[x \neq y \wedge P(x, u, y) \wedge \neg P(y, u, x)]$
   Это значит, что u является ориентированным ребром (дугой), идущей из вершины x в y.

2. $\exists x, y \in V[x \neq y \wedge P(x, u, y) \wedge P(y, u, x)]$
   Это значит, что u является неориентированным ребром (ребро ориентировано в обе стороны), соединяющем x и y (Зыков предлагает назвать его звеном)

3. $\exists x \in V \; P(x, u, x)$
   В этом случае u есть петля при вершине x



Пример

Для приведенного графа истинны следующие высказывания:

$$P(1,a,1), P(1,b,1), P(1,c,2),$$
$$P(2,c,1), P(3,d,1), P(1,e,3),$$
$$P(3,e,1), P(2,f,3), P(3,g,2),$$
$$P(2,h,3)$$

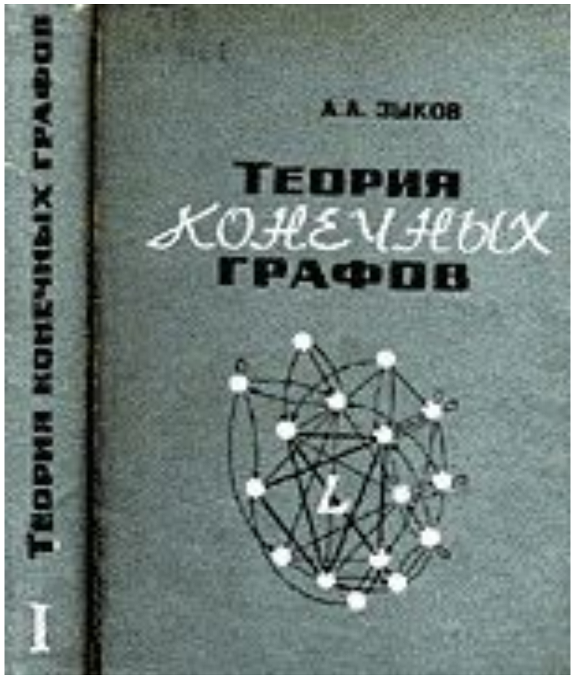
В другой терминологии предикат

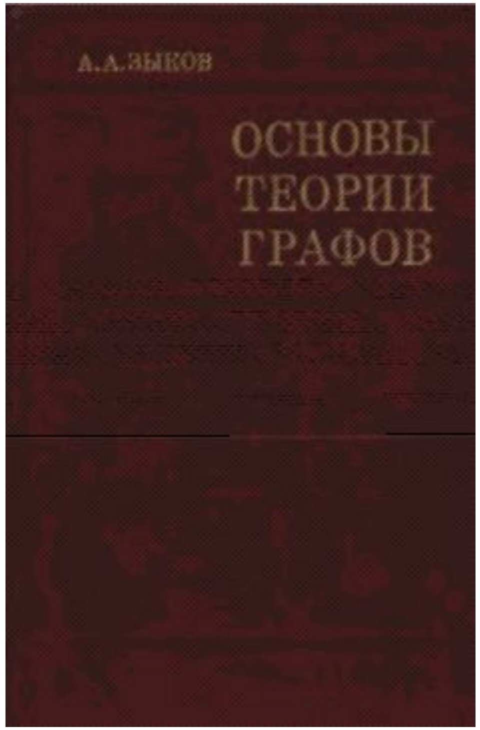
троек вида $\langle x,u,y\rangle$

$P \subseteq V \times E \times V$

Это определение охватывает все виды графов – ориентированные и неориентированные, униграфы и мультиграфы.

Зыков, Александр Александрович (1922—2013)





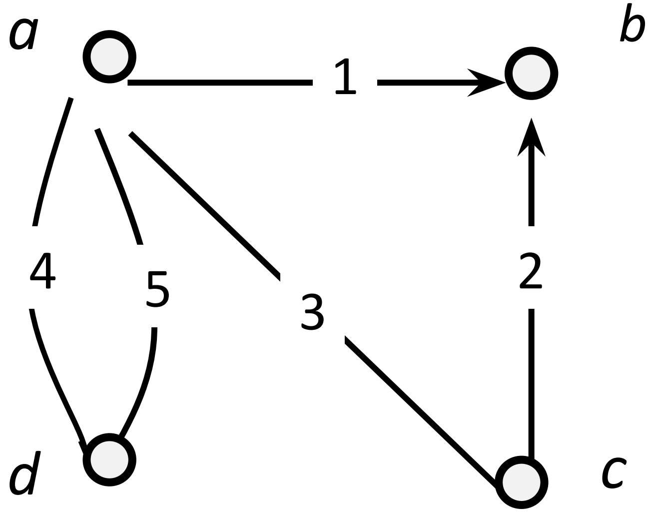
Изоморфизм графов

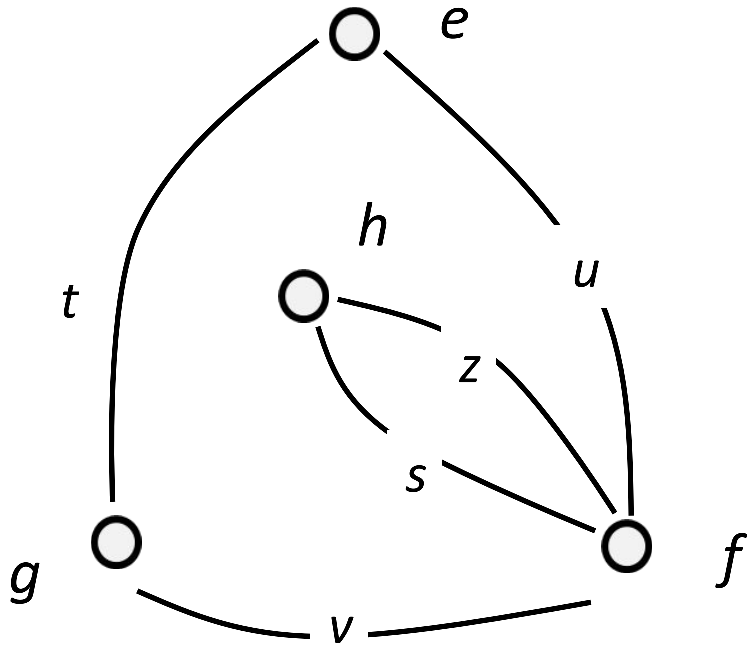
Два графа $G = (V, E; P)$ и $G' = (V', E'; P')$ называются **изоморфными,** если между их вершинами, а также между их ребрами можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее инцидентор P, то есть

$$\forall x, y \in V, \forall u \in E, \forall x', y' \in V', \forall u' \in E'$$
$$\{(x \leftrightarrow x') \wedge (y \leftrightarrow y') \wedge (u \leftrightarrow u') \Rightarrow$$
$$[P(x, u, y) \Leftrightarrow P'(x', u', y')]\}.$$

Здесь $\leftrightarrow$ означает взаимно однозначное соответствие, $\Rightarrow$ - логическое следствие, $\Leftrightarrow$ - логическую эквивалентность .

Приме
р





$$G=(V,E,P);\ V=\{a,b,c,d\};$$
$$E=\{1,2,3,4,5\};$$
$$P=\{P(a,1,b),P(a,3,c),P(c,3,a),$$
$$P(a,4,d),P(c,2,b),P(d,5,a)\};$$

$$G'=(V',E',P');\quad V'=\{e,f,g,h\};$$
$$E'=\{s,t,u,v,z\};$$
$$P'=\{P'(e,t.g),P'(e,u,f),P'(f,u,e),$$
$$P'(f,v,g),P'(f,s,h),P'(h,z,f)\}$$

Взаимно однозначное соответствие устанавливается следующим

образом:

$$a\leftrightarrow f,b\leftrightarrow g,c\leftrightarrow e,d\leftrightarrow h,\qquad 1\leftrightarrow v,2\leftrightarrow t,3\leftrightarrow u,4\leftrightarrow s,5\leftrightarrow z;$$
$$P(a,1,b)\Leftrightarrow P'(f,v,g),P(a,3,c)\Leftrightarrow P'(f,u,e),P(c,3,a)\Leftrightarrow P'(e,u,f),$$

$$P(a,4,d)\Leftrightarrow P'(f,s,h),P(c,2,b)\Leftrightarrow P'(e,t,g),P(d,5,a)\Leftrightarrow P'(h,z,f).$$

Отношение изоморфизма рефлексивно, симметрично и транзитивно, то есть является отношением эквивалентности.

В теории рассматриваются такие свойства графов, которые сохраняются при замене графа изоморфным ему.

Тем самым оказываются несущественными как природа элементов, составляющих множества V и E, так и конкретный смысл предиката P.

Вершины и ребра графа помечаются индексами из каких-либо индексных множеств (буквами, цифрами). Графы, отличающиеся индексацией элементов – изоморфны, но не тождественны.

Способы задания графов

1. Перечисление элементов графа: список или массив пар вершин, соответствующих его ребрам (если граф можно представить в виде бинарного отношения или отображения); список или массив троек для графов общего вида.
2. Списки смежности: каждый список содержит саму вершину x и подсписок, представляющий ее окружение Γx (граф определен как отображение).
3. Задание графа матрицами.

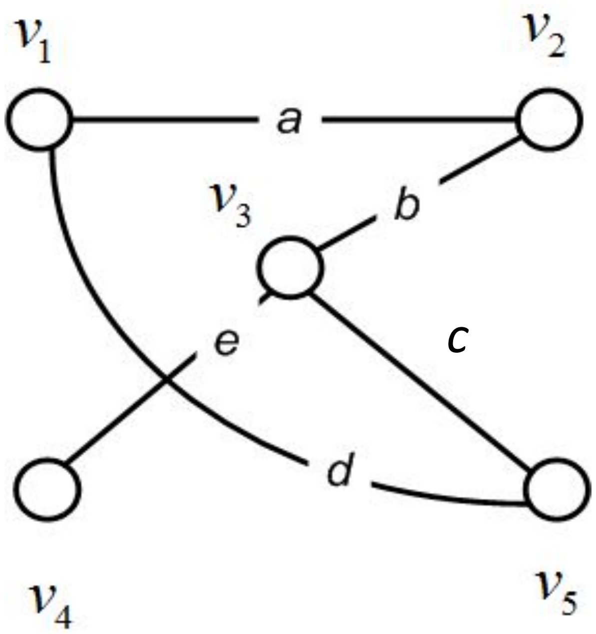
1.4. Задание графа матрицами

Матрица инциденций

Строки матрицы инциденций соответствуют вершинам, а столбцы ребрам – т. е. матрица имеет размер $n \times m$, где $n = |V|$ $m = |E|$. .

Каждый элемент представляет собой некоторый символ, показывающий отношение данного ребра к данной вершине. Необходимое количество символов зависит от вида представляемого графа.

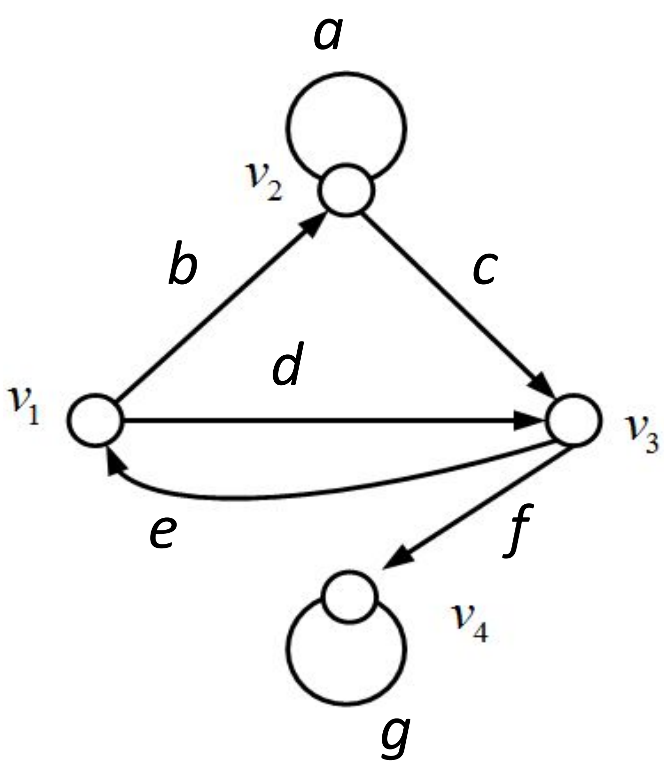
Для обыкновенного графа достаточно двух символов, скажем, 0 и 1. Единица ставится, когда соответствующее ребро инцидентно вершине.



c

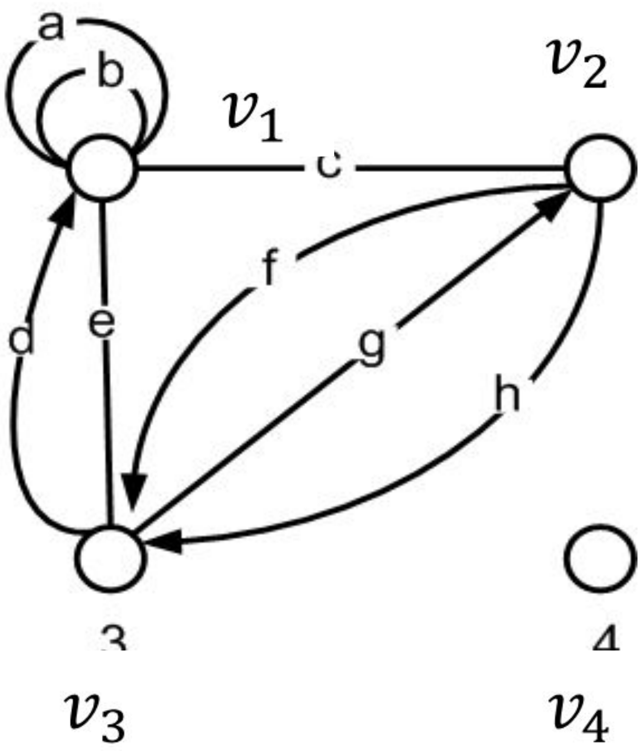
	a		*c*		
	1	0	0	0	0
	1	1	0	0	0
	0	1	1	0	1
	0	0	0	0	1
	0	0	1	1	0

Для ориентированного графа понадобятся три символа, например, 0, -1, 1, при этом 1 соответствует вершине исхода, а -1 – вершине захода.



	a	b	c	d	e	f	g
v_1	0	1	0	1	-1	0	0
v_2	1	-1	1	0	0	0	0
v_3	0	0	-1	-1	1	1	0
v_4	0	0	0	0	0	-1	1

Для графа общего вида понадобятся три символа, например, 0, -1, 1, при этом 1 соответствует вершине исхода, а -1 –вершине захода.



	a	b	c	d	e	f	g
v_1	1	1	1	-1	1	0	0
v_2	0	0	1	0	0	1	-1
v_3	0	0	0	1	1	-1	1
v_4	0	0	0	0	0	0	0

Матрица смежности

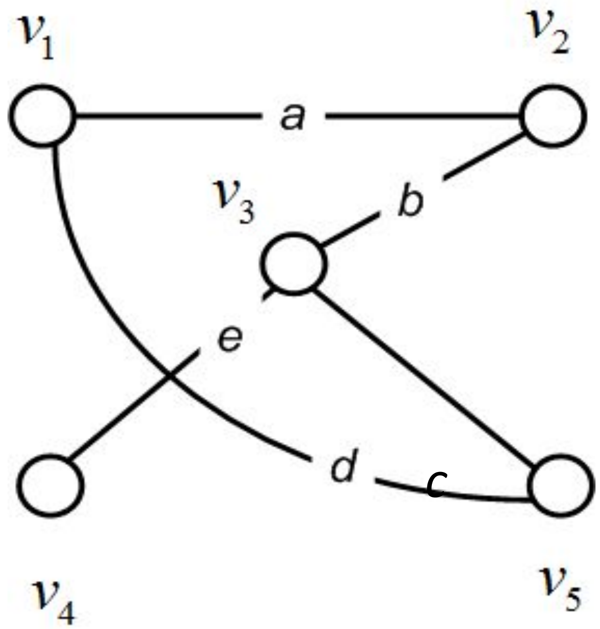
Удобным способом задания обыкновенных и ориентированных графов является представления в виде матрицы смежности $R(G)$ размера $n \times n$, где $n = |V| -$ число вершин графа.

Две вершины x и y называются смежными, если существует по крайней мере одно соединяющее их ребро, т. е. если истинно высказывание

$$J(x,y) \leftrightarrow \exists u[P(x,u,y) \vee P(y,u,x)]$$

В частности, вершина смежна сама с собой тогда и только тогда, когда при ней имеется хотя бы одна петля.

Матрица смежности обыкновенного графа симмет-ричны, $r_{ij} = 1$, если в графе есть ребро $\{x_i, x_j\}$,
В противном случае $r_{ij} = 0$. Диагональные элементы $r_{ii} = 0$.

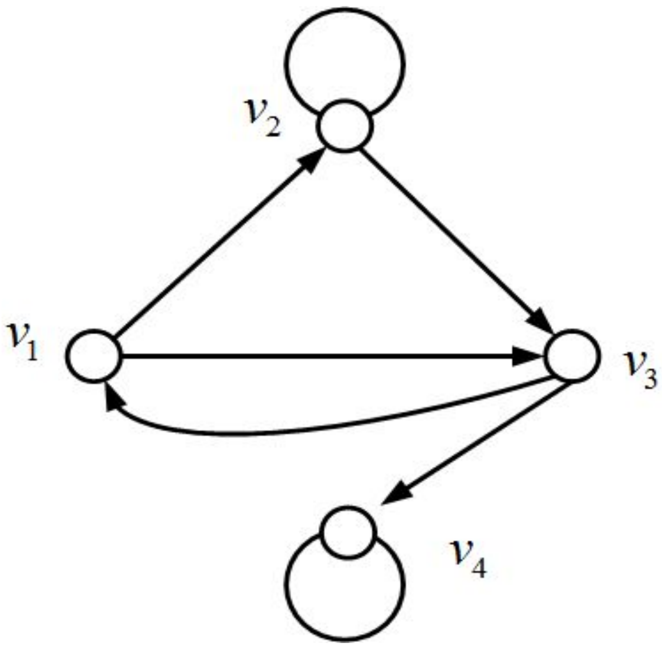


	0	1	0	0	1
	1	0	1	0	0
	0	1	0	1	1
	0	0	1	0	0
	1	0	1	0	0

Матрица смежности ориентированного графа в общем случае асимметрична.

$r_{ij} = 1$, если в графе есть ребро $\langle x_i, x_j \rangle$, или, в нотации Бержа, $v_j \in \Gamma(v_i)$.

Диагональные элементы $r_{ii} = 1$, если при вершине v_i имеется петля, в противном случае $r_{ii} = 0$.



	0	1	1	0
	0	1	1	0
	1	0	0	1
	0	0	0	1

Для взвешенных графов матрица смежности превращается в матрицу весов. Их можно понимать как расстояния между соответствующими парами вершин.