

Разложение многочленов на множители

1. Что такое разложение
многочленов на множители
и зачем оно нужно



При решении многих алгебраических задач бывает необходимо данный многочлен представить в виде:

- произведения двух или более многочленов:

$$(x+1) \cdot (x-2), \quad (m+4) \cdot (m+2) \cdot (m-8)$$

- произведения многочлена на одночлен, содержащий не менее одной переменной:

$$2y \cdot (y-1)$$

- **можно** представить в виде произведения числа на многочлен,

например,

$$(2x^2+6y^2) \cdot 0,5 \quad \text{или} \quad (x^2+3y^2) \cdot 1$$

Но это искусственное преобразование, поэтому без большей необходимости не используется.

Однако не каждый многочлен допускает разложение на множители.

Например, многочлены $x+3$, x^2+3y^2 разложить на множители нельзя.

- ✓ Такие многочлены называются **простыми** (неприводимыми).
- ✓ Разложение на множители считается законченным, если все полученные множители простые. (неприводимы).



Разложение многочлена на множители применяется:



- для решения уравнений;
- для преобразования числовых выражений;
- для решения задач на делимость;
- для преобразования алгебраических выражений;
- для решения задач с использованием метода математической индукции;
- для сокращения алгебраических дробей;
- для доказательства тождеств.

Решение уравнений методом разложения на множители
заключается в следующем:

если $p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \dots \cdot p_n(x)$,
то всякое решение уравнения $p(x) = 0$
является решением совокупности уравнений
 $p_1(x) = 0; p_2(x) = 0; \dots; p_n(x) = 0$.

$$2 \cdot x^2 + x - 6 = 0$$

$$(2 \cdot x - 3) \cdot (x + 2) = 0$$

$$2x^2 + \underline{4x} - \underline{3x} - 6 = 0$$

$$2 \cdot x^2 + x - 6 = 0$$

Значит,

либо $2 \cdot x - 3 = 0$, либо $x + 2 = 0$.

$$2 \cdot x = 3$$

$$x = -2$$

$$x = 1,5$$

Ответ: 1,5 и -2



Найти значение числового выражения

Вычислите наиболее рациональным способом:

$$\frac{53^2 - 27^2}{79^2 - 51^2} = \frac{(53 - 27)(53 + 27)}{(79 - 51)(79 + 51)} = \frac{26 \cdot 80}{28 \cdot 130} = \frac{2 \cdot 2}{7} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{13,2 \cdot 9,8 + 13,2 \cdot 2,2}{24} = \frac{13,2 \cdot (9,8 + 2,2)}{24} = \frac{13,2 \cdot 12}{24} = \frac{13,2}{2} = 6,6$$

Задачи на делимость

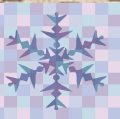
Докажите, что значение выражения кратно заданному числу

$$9^7 + 3^{12} \text{ кратно } 90$$

$$(3^2)^7 + 3^{12} = 3^{14} + 3^{12} = 3^{12} \cdot (3^2 + 1) = 3^{12} \cdot 10$$

$$90 = 9 \cdot 10 = 3^2 \cdot 10$$

$$\frac{3^{12} \cdot 10}{3^2 \cdot 10} = 3^{10} = 59049$$



Представить многочлен в виде произведения
многочлена и одночлена, если:

$$p(x, y) = 2x^2y + 4x$$

Для этого в составе каждого члена многочлена

$$p(x, y) = 2x^2y + 4x$$

необходимо выделить одинаковую часть

(одинаковый множитель) **2x**

$$2x^2y + 4x = xy \cdot 2x + 2 \cdot 2x = (xy + 2) \cdot 2x$$

Пример:

$$6c^2 + 4c = 2c \cdot 3c + 2c \cdot 2 = 2c \cdot (3c + 2)$$

или

$$6c^2 + 4c = -2c \cdot (-3c) + (-2c) \cdot (-2) = -2c \cdot (-3c - 2)$$

Разложение многочленов на множители

2. Способы разложения многочлена на множители

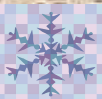
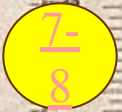
*Три пути ведут к знанию:
путь размышления – это путь самый благородный,
путь подражания – это путь самый легкий
и путь опыта – это путь самый горький.*

Конфуций



Основные понятия

1. Что такое разложение многочленов на множители?
2. Каждый ли многочлен допускает разложение на множители?
3. Выберите многочлены, которые разложить на множители нельзя $x+3$, y^2+3y , m^2+3n^2 .
4. Как называются многочлены, которые нельзя разложить на множители?
5. Когда разложение на множители считается законченным?
6. При решении каких алгебраических задач бывает необходимо данный многочлен разложить на множители?
7. Уравнения какого вида решаются методом разложения на множители?
8. В чем заключается решение уравнений методом разложения на множители?



Распределите данные алгебраические выражения
на группы и объясните, по какому признаку проведено
распределение

III

I

1. $195c^6 p^5 - 91c^5 p^6 k + 221c^3 p^{10} k^2$

2. $3a^2 b \cdot (1 - 2a)$;

3. $2mx - 3m - 4x + 6$

4. $(9c - ab) \cdot (9c + ab)$;

5. $xy^2 - by^2 - ax + ab + y^2 - a$

6. $4p^2 + 12pn + 9n^2$

IV

7. $1 + 64a^3$

II

8. $8c^3 - 125$

9. $(5a + 1)^2$;

10. $49b^2 - 25a^2$

11. $25x^2 - 40x + 16$

12. $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$;

Способы разложения многочленов на множители

- вынесение общего множителя за скобки;
- группировка;
- использование формул сокращённого умножения;
- **комбинированный** (комбинация различных способов);
- **выделение полного квадрата.**

№1

меню

тест

зачет



Группы алгебраических выражений

III

3. $2mx - 3m - 4x + 6$

5. $xy^2 - by^2 - ax + ab + y^2 - a$

II

1. $195c^6 p^5 - 91c^5 p^6 k + 221c^3 p^{10} k^2$

I

2. $3a^2 b \cdot (1 - 2a)$;

4. $(9c - ab) \cdot (9c + ab)$;

9. $(5a + 1)^2$;

12. $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$;

IV

6. $(2p)^2 + 2 \cdot 6pn + (3n)^2$

11. $(5x)^2 - 2 \cdot 20x + 4^2$

10. $(7b)^2 - (5a)^2$

7. $1 + (4a)^3$

8. $(2c)^3 - 5^3$



Соотнеси многочлены с их разложением на множители

1. $3x+3y$

2. $3x+6y$

3. $8x-12y$

4. $12/49x - 3/28y$

5. $2,4x+7,2y$

6. x^3-x^2

7. $-x^2y^2-xy$

8. $15x^3y^2+20x^2y^3$

9. $-8x^3y^3-2x^3y^4+4x^3y^3z$

a) $5x^2y^2 \cdot (3x+4y)$

b) $x^2 \cdot (x - 1)$

c) $-2x^3y^3 \cdot (4+y-2z)$

d) $3 \cdot (x+2y)$

e) $-xy \cdot (xy+1)$

f) $2,4 \cdot (x+3y)$

g) $3 \cdot (x+y)$

h) $4 \cdot (2x-3y)$

i) $3/7 \cdot (4/7x-1/4y)$

Соотношение многочленов с их разложением на множители:

1. g (жэ)
2. d (дэ)
3. h (аш)
4. i (и)
5. f (эф)
6. b (бэ)
7. e (е)
8. a (а)
9. c (цэ)

Что выносится за скобку в качестве общего множителя?

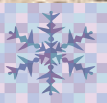
- $3x+3y$ $= 3x^2y^2 \cdot (3x+4y)$
- $3x+6y$ $= x^2 \cdot (x - 1)$
- $8x-12y$ $= -2x^3y^3 \cdot (4+y-2z)$
- $12/49x - 3/28y$ $= 3 \cdot (x+2y)$
- $2,4x+7,2y$ $= -xy \cdot (xy+1)$
- x^3-x^2 $= 2,4 \cdot (x+3y)$
- $-x^2y^2-xy$ $= 3 \cdot (x+y)$
- $15x^3y^2+20x^2y^3$ $= 4 \cdot (2x-3y)$
- $-8x^3y^3-2x^3y^4+4x^3y^3z$ $= 3/7 \cdot (4/7x-1/4y)$

Чтобы представить многочлен в виде произведения многочлена и одночлена, необходимо в составе каждого члена многочлена выделить одинаковую часть (одинаковый множитель)

$$15x^3y^2 + 20x^2y^3$$

1. $xy \cdot (15x^2y + 20xy^2)$
2. $x^2 \cdot (15xy^2 + 20y^3)$
3. $5x^2y^2 \cdot (3x + 4y)$
4. $y^2 \cdot (15x^3 + 20x^2y)$

Из предложенных вариантов разложения многочлена на множители выбери то, которое считается законченным.



Алгоритм отыскания общего множителя нескольких одночленов

1. Найти НОД коэффициентов всех одночленов, входящих в многочлен, который и будет общим числовым множителем.
2. Найти переменные, которые входят в каждый член многочлена, и выбрать для каждой из них наименьший (из имеющихся) показатель степени.
3. Произведение коэффициента, найденного на первом шаге, и степеней, найденных на втором шаге, является общим множителем, который целесообразно вынести за скобки



$$195c^6p^5 - 91c^5p^6k + 221c^3p^{10}k^2 =$$

$$\begin{array}{r|l} 195 & 5 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$195 = 5 \cdot 3 \cdot 13$$

$$\begin{array}{r|l} 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$91 = 7 \cdot 13$$

$$\begin{array}{r|l} 221 & 13 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

$$221 = 13 \cdot 17$$

$$15c^3 \cdot c^3p^5 - 7c^2pk \cdot c^3p^5 + 17p^5k^2 \cdot c^3p^5 =$$

c^6, c^5, c^3

c^3

p^5, p^6, p^{10}

p^5

$---$, k, k^2



$$195c^6 p^5 - 91c^5 p^6 k + 221c^3 p^{10} k^2 =$$

$$= \underline{15c^3} \cdot \underline{13c^3 p^5} - \underline{7c^2 p k} \cdot \underline{13c^3 p^5} + \underline{17p^5 k^2} \cdot \underline{13c^3 p^5} =$$

$$= 13c^3 p^5 \cdot (15c^3 - 7c^2 p k + 17p^5 k^2)$$

***)** Иногда алгебраическое выражение задается в таком виде, что в качестве общего множителя может выступать не одночлен, а сумма нескольких одночленов:

$$\begin{aligned} & 4c \cdot (4c - 1) - 3 \cdot (4c - 1)^2 = \\ & = 4c \cdot \underline{(4c - 1)} - 3 \cdot \underline{(4c - 1)} \cdot (4c - 1) = \\ & = \underline{(4c - 1)} \cdot (4c - 3 \cdot (4c - 1)) = \\ & = \underline{(4c - 1)} \cdot (4c - 12c + 3) = \\ & = \underline{(4c - 1)} \cdot (-8c + 3) = \underline{(4c - 1)} \cdot (3 - 8c) \end{aligned}$$

Способ группировки применяется, когда члены многочлена не имеют общего множителя.

Иногда удаётся такая группировка, что в каждой группе после вынесения общих множителей, в скобках остаётся один и тот же многочлен, который, в свою очередь, может быть вынесен за скобки как общий множитель.

Тогда говорят, что разложение многочлена на множители осуществлено способом группировки.



Члены многочлена не имеют общего множителя:

$$2mx - 3m - 4x + 6 = ?$$

Составим две группы: в первую включим 1 и 2 член,
во вторую – 3 и 4:

$$2mx - 3m - 4x + 6 = (2mx - 3m) + (-4x + 6) =$$

$$= (2x \cdot m - 3 \cdot m) + (-2x \cdot 2 + 3 \cdot 2) =$$

$$= m \cdot (2x - 3) - 2 \cdot (2x - 3) = (2x - 3) \cdot (m - 2)$$



*) Разложите на множители,
представив один из членов многочлена
в виде суммы подобных слагаемых:

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + 15 &= \\&= x^2 - 3x - 5x + 15 = \\&= (x^2 - 3x) + (-5x + 15) = \\&= x \cdot (x - 3) - 5 \cdot (x - 3) = \\&= (x - 3) \cdot (x - 5).\end{aligned}$$



Формулы разложения на множители

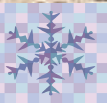
$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$



Использование формул сокращённого умножения

II

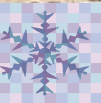
1. $(2p)^2 + 2 \cdot 6pn + (3n)^2$

2. $(5x)^2 - 2 \cdot 20x + 4^2$

3. $(7b)^2 - (5a)^2$

4. $1 + (4a)^3$

5. $(2c)^3 - 5^3$



Зачет №5 Разложение на множители

1. Вынесите общий множитель сначала с положительным, а потом с отрицательным коэффициентом:

а) $6c^2 + 4c$; б) $6c^2 - 4c$; в) $-6c^2 + 4c$; г) $-6c^2 - 4c$.

2. Примените формулу разности квадратов:

а) $9c^2 - 4$; б) $4 - 9c^2$; в) $a^3 - ab^2$.

3. Примените формулы квадрата разности и квадрата суммы:

а) $9c^2 - 12c + 4$; б) $-9c^2 + 12c - 4$; в) $-18c^2 - 24c - 8$.

4*. Разложите на множители:

а) $3x + xy^2 - x^2y - 3y$; б) $a^3 - ab - a^2b + a^2$;

в) $ab^2 - b^2y - ax + xy + b^2 - x$.

5*. Примените при группировке формулу разности квадратов:

а) $2a^2 - 2b^2 - a + b$; б) $ac^4 - c^4 - ac^2 + c^2$;

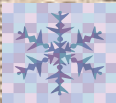
в) $x^3y^2 - xy - x^3 + x$.

6*. Примените при группировке формулы квадрата суммы (разности):

а) $1 - x^2 + 2xy - y^2$; б) $2x^2 - 20xy + 50y^2 - 2$;

в) $ax^2 - 2ax - bx^2 + 2bx - b + a$.

- Произведение разности двух выражений на их сумму
- Произведение суммы двух выражений на себя
- Произведение разности двух выражений на себя
- Полный квадрат суммы
- Полный квадрат разности
- Произведение разности двух выражений на неполный квадрат суммы
- Произведение суммы двух выражений на неполный квадрат разности
- Сумма кубов
- Разность кубов



Домашнее задание 2

544-548(г) и 594,606

Решите уравнение

544(Г)

$$(4t - 1) \cdot (8t - 3) \cdot (12t - 17) = 0$$

$$\begin{array}{lll} 4t - 1 = 0 & \text{или} & 8t - 3 = 0 & \text{или} & 12t - 17 = 0 \\ 4t = 1 & & 8t = 3 & & 12t = 17 \\ t = 1/4 & & t = 3/8 & & t = 17/12 \end{array}$$

Ответ: 1/4; 3/8; 17/12.

545(Г)

$$\begin{array}{l} x^2 = 4x \\ x^2 - 4x = 0 \\ x \cdot (x - 4) = 0 \\ x = 0 \text{ или } x = 4 \end{array}$$

Ответ: 0; 4.

546 (Г)

$$\begin{array}{l} t^2 - 100 = 0 \\ (t - 10) \cdot (t + 10) = 0 \\ t - 10 = 0 \text{ или } t + 10 = 0 \\ t = 10 \text{ или } t = -10 \end{array}$$

Ответ: -10; 10.

548 (Г)

$$\begin{array}{l} 0,25y^2 - 25 = 0 \\ (0,5y - 5) \cdot (0,5y + 5) = 0 \\ 0,5y - 5 = 0 \text{ или } 0,5y + 5 = 0 \\ 0,5y = 5 \text{ или } 0,5y = -5 \\ y = 10 \text{ или } y = -10 \end{array}$$

Ответ: -10; 10.

Домашнее задание

544-545(в) и 548-549(в)

Решите уравнение

• 544(в) $(23z - 46) \cdot (45z + 90) \cdot (3z + 24) = 0$

$$23z - 46 = 0 \quad \text{или} \quad 45z + 90 = 0 \quad \text{или} \quad 3z + 24 = 0$$

$$23z = 46 \qquad 45z = -90 \qquad 3z = -24$$

$$z = 2 \qquad z = -2 \qquad z = -8$$

Ответ: -8; -2; 2.

• 545(в) $3x^2 - 7x = 0$

$$x \cdot (3x - 7) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad 3x - 7 = 0$$

$$3x = 7$$

$$x = 7/3$$

Ответ: 0; 7/3.

$$546 \text{ (в)} \quad z^2 - 36 = 0$$

$$(z-6) \cdot (z+6) = 0$$

$$z-6=0 \text{ или } z+6=0$$

$$z = 6 \quad z = -6$$

Ответ: -6; 6.

$$548 \text{ (в)} \quad 4x^2 - 144 = 0$$

$$(2x - 12) \cdot (2x + 12) = 0$$

$$2x - 12 = 0 \text{ или } 2x + 12 = 0$$

$$2x = 12 \quad 2x = -12$$

$$x = 6 \quad x = -6$$

Ответ: -6; 6.

Домашнее задание:

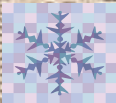
№ 563(а,г),

№ 567(а,в),

№ 580(б,г),

№ 615(а,в),

№ 600 (в,г).



Разложение на множители

1. Определите общий множитель $8x^4y^2 - 12x^2y^2$.

а) x^2y^2 ; б) $2x^2y^2$; в) $4xy$; г) $4x^2y^2$; д) $2x^2 - 3$.

2. Вынесите общий множитель за скобки в выражении $3a^3c^2 + 6a^2c^3 - 9a^3c^3$.

а) $3ac \cdot (a^2c + 2ac^2 - 3a^2c^2)$;

б) $3a^2c \cdot (ac + 2c^2 - 3ac^2)$;

в) $3a^2c^2 \cdot (a + 2c - 3c)$;

г) $3ac^2 \cdot (a^2 + 2ac - 3a^2c)$;

д) $3a^2c^2 \cdot (a - 2c + 3ac)$.

3. Разложите на множители $3c + 3c^2 - a - ac$.

а) $(3c + a) \cdot (1 - c)$;

б) $(a - 3c) \cdot (1 + c)$;

в) $(3c - a) \cdot (1 + c)$;

г) $(3c + a) \cdot (c - 1)$;

д) $(3c - a) \cdot (1 - c)$.

4. Выберите верное равенство:

а) $4 + 2y + y^3 = (2 + y)^2$;

б) $x^2 - 24x + 24 = (x - 12)^2$;

в) $a^2 + 4a + 4 = (a - 2)^2$

г) $16x^2 + 8xy + y^2 = (4x + y)^2$.

5. Выберите неверное равенство:

а) $4b^2 - a^2 = (2b + a) \cdot (2b - a)$

б) $(y + 2) \cdot (2 - y) = y^2 - 4$;

в) $25x^2 - 1 = (5x + 1) \cdot (5x - 1)$.

