Смешанное произведение

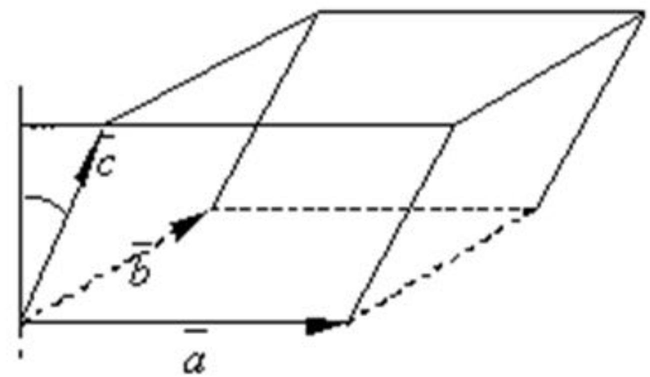
8. Смешанное произведение 3 векторов.

Смешанным произведением векторов (**A**,[**B**,**C**]) наз. число (скаляр), равное скалярному произведению вектора **A** на вектор [**B**,**C**].

Свойства:

а) (**A**,[**B**,**C**]) = ([**A**, **B**],**C**)

б) циклическая перестановка: (**A**,[**B**,**C**]) = (**B**,[**C**,**A**]) = (**C**,[**A,B**])



в) смеш. произ-ние равно нулю, если среди сомножителей есть нулевой вектор, или среди них есть параллельные, или все три лежат в одной плоскости;

г) геометрический смысл – объем параллелепипеда, построенного на сомножителях.

Значение смешанного произведения может быть выражено через проекции сомножителей:

$$(\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]) = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_x & \mathbf{A}_y & \mathbf{A}_z \\ \mathbf{B}_x & \mathbf{B}_y & \mathbf{B}_z \\ \mathbf{C}_x & \mathbf{C}_y & \mathbf{C}_z \end{vmatrix}$$

Умножение вектора на матрицу

Матрица: $\widehat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Векторы: $\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ и $\vec{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

$$\vec{C} = \widehat{A}\,\vec{B}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_1 + a_{12} \cdot b_2 + a_{13} \cdot b_3 \\ a_{21} \cdot b_1 + a_{22} \cdot b_2 + a_{23} \cdot b_3 \\ a_{31} \cdot b_1 + a_{32} \cdot b_2 + a_{33} \cdot b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Операции с векторами.

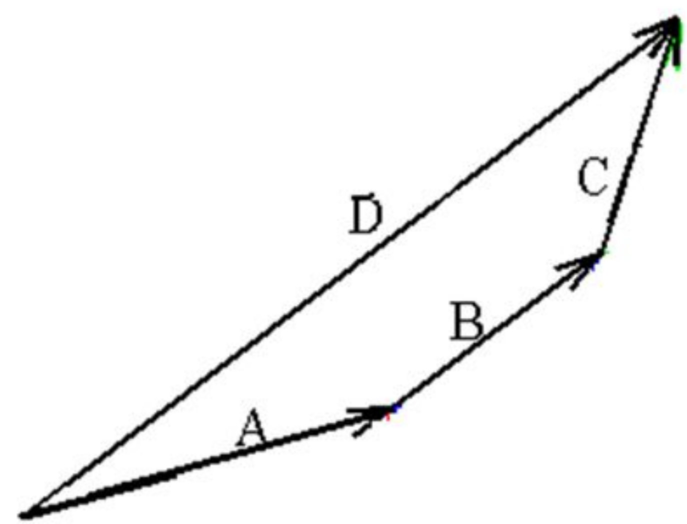
10. Не определены операции деления на вектор – ни обратная скалярному умножению, ни векторному.
$\exists$ умножение на обратную матрицу:

$$\vec{B} = \widehat{A^{-1}}\vec{C}$$

$\widehat{A^{-1}}$ – матрица, обратная матрице $\hat{A}$

11. Любой вектор можно разложить на произвольное число векторов, так чтобы сумма:

$$\mathbf{A} = \Sigma\, \mathbf{B}_k$$



Произведения векторов

Скалярное произведение:

$c = (\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A\ B\cos\alpha = AB_a = BA_b = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

$(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ – типографские способы записи

$(\vec{A},\vec{\mathrm{B}})$ - при письме от руки

Векторное произведение:

$\mathbf{C} = [\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ – типографские способы записи

$\vec{C} = [\vec{A},\vec{B}]$ - при письме от руки

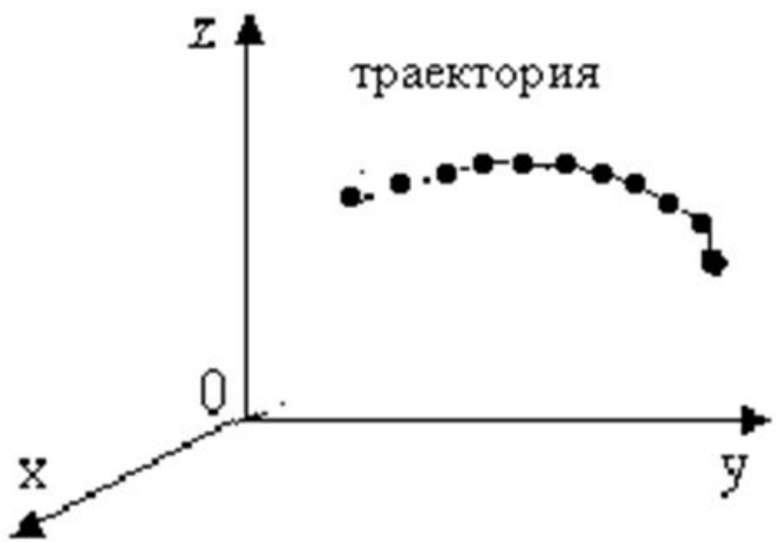
Смешанное произведение 3 векторов.

$(\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}])$ – типографский способ записи

$(\vec{\mathrm{A}},[\vec{\mathrm{B}},\vec{\mathrm{C}}])$ - при письме от руки

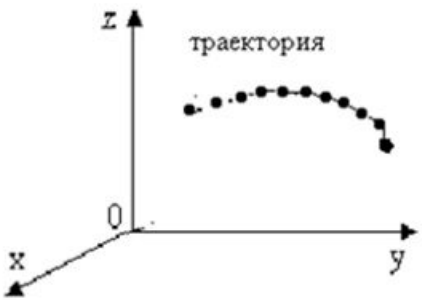
Траектория. Материальная точка.

Каждая малая часть тела ⇨ геометрическая точка ⇨ радиус-вектор этой точки.



Движение тела ⇨ изображающая точка ↑↓ свое положение отн. тела отсчета (системы координат) ⇨ ее различные положения образуют линию, кот. наз. *траекторией*. Если размеры тела << характерных размеров для данного движения (напр., радиуса кривизны траектории) ⇨ размерами тела пренебрегают ⇨ тело представляют в виде модели - *материальной точки*.

Время. Единица измерения времени.



Движение тела приближенно - движение одной точки.
Движение с-мы тел ≈ смена картинок, изображающих их положения друг отн. друга. Смена картинок изображает течение *времени*.
«Частота смены картинок» - выбор *единицы времени* ⇨ найти к.-либо периодический, т.е. регулярно повторяющийся процесс ⇨ было выбрано вращение Земли вокруг оси. В системе СИ за единицу времени принята *секунда* – 1/86400 доля от *средних солнечных суток*. (Солнечные сутки – промежуток времени между двумя полуднями.) Способы хранения эталона секунды: механические → кварцевые хронометры → мазер на ^{133}Cs: 1 с ≈ $9.192 \cdot 10^9$ периодов колебания этого мазера.

Уравнение траектории

Уравнение траектории:

$$y = y(x)$$
$$z = z(x)$$

В параметрическом виде (u – параметр):

$$x = x(u)$$
$$y = y(u)$$
$$z = z(u)$$

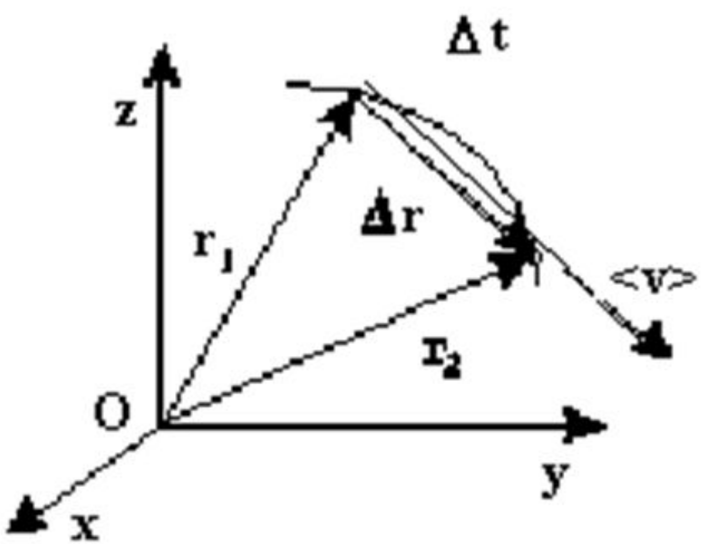
Если параметр - время, то получится *кинематическое уравнение движения*:

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

в векторной форме

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Вектор скорости



Выбрать малый промежуток времени Δt ⇨ приращение радиус-вектора точки $\overrightarrow{\Delta r}$ – *вектор перемещения*.

Деление вектора $\overrightarrow{\Delta r}$ на скаляр Δt: *вектор средней скорости*:

$$<\vec{v}> = \overrightarrow{\Delta r}/\Delta t$$

Направление вектора $<\vec{v}>$ такое же, как у $\overrightarrow{\Delta r}$.

Его проекции типа: $<v_x> = \Delta x/\Delta t$

$\Delta t \to 0$ ⇨ проекции *вектора мгновенной скорости* $\vec{v}$:

$$v_x = \lim \Delta x/\Delta t$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = d\vec{r}/dt$$

Ед. измерения скорости в системе СИ является м/с.
Вектор $\vec{v}$ направлен по касательной к траектории.

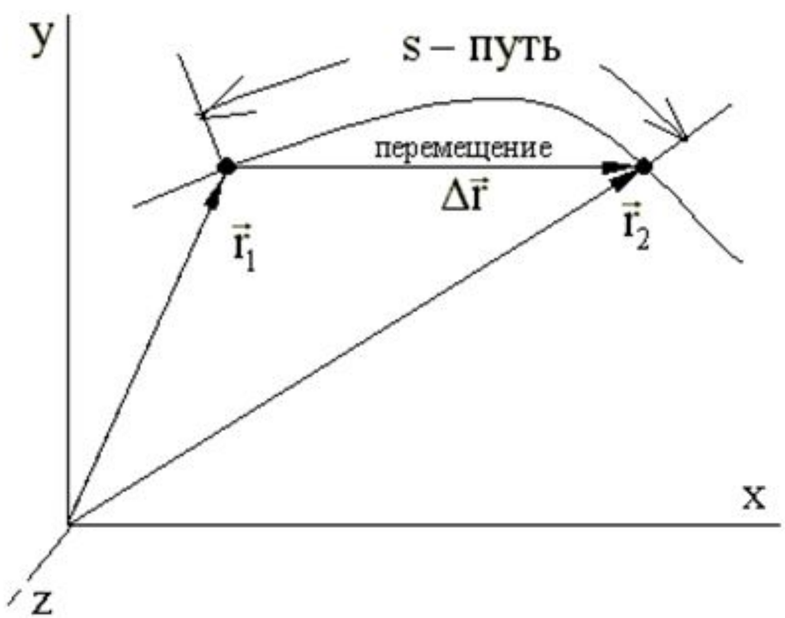
Скорость, путь

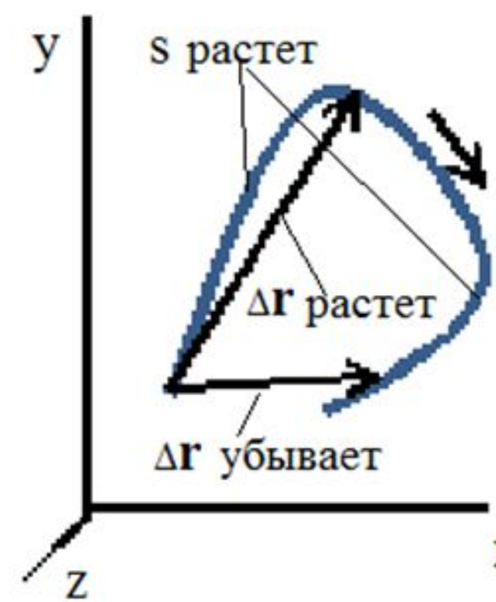
Абс. вел-на скорости ⇔ *длины пути* s: $s = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$

Длина пути отличается от вектора перемещения и даже от его модуля.

1) из рисунка путь длина дуги траектории, а модуль вектора перемещения – ее хорда.

2) v ≥ 0 ⇨ s ↑ со временем, а $|\overrightarrow{\Delta r}|$ может ↓





Ускорение: вектор, тангенциальное, нормальное

Промежуток Δt ⇨ приращение вектора скорости $\overrightarrow{\Delta v}$.

Вектор $\langle\vec{w}\rangle = \overrightarrow{\Delta v}/\Delta t$ наз. *средним ускорением* точки за промежуток Δt.

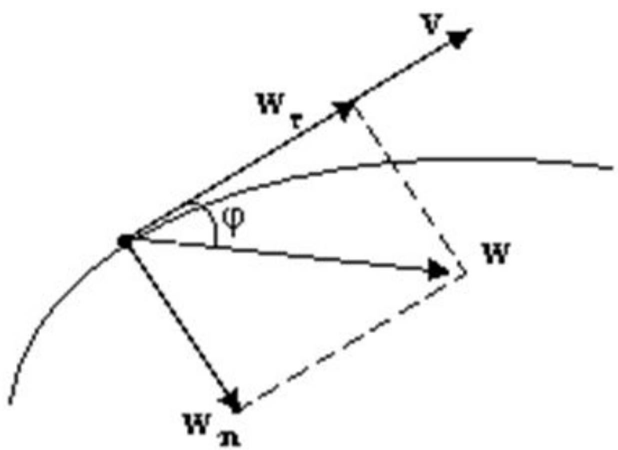
Его проекции $\langle w_x\rangle = \Delta v_x/\Delta t$ и т.п.

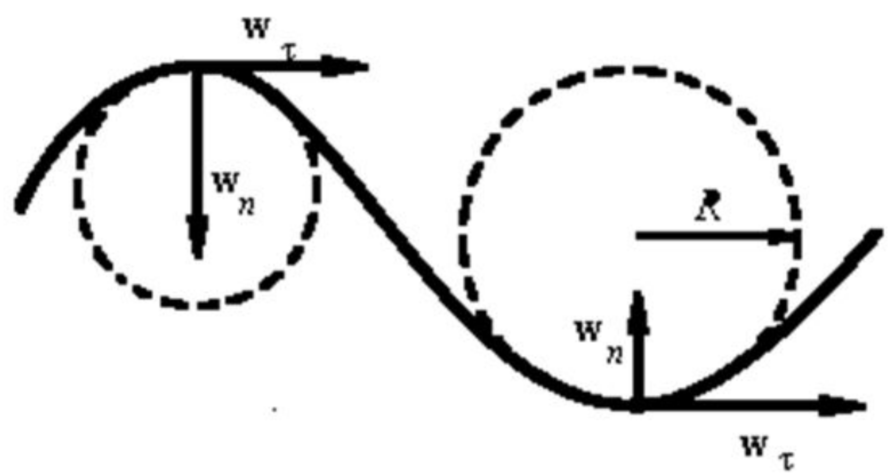
При $\Delta t \to 0$ ⇨ проекции *вектора мгновенного ускорения* $\vec{w}$:

$$w_x = \lim \Delta v_x/\Delta t$$

$$\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k} = d\vec{v}/dt$$

Естественная с-ма координат: оси по касательной и по нормали к траектории ⇨ $\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n$ - сумма *тангенциальной* $\vec{w}_\tau$ *и нормальной* компонент $\vec{w}_n$





Тангенциальное и нормальное ускорение

Модуль $\vec{w}_\tau$ $w_\tau = |dv/dt|$, направление совпадает с $\vec{v}$, если $dv/dt > 0$ и противоположно ему, если $dv/dt < 0$.

Модуль $\vec{w}_n$ $w_n = v^2/R$, где R – радиус кривизны траектории.

$\vec{w}_n$ направлен к центру кривизны траектории ⇨

$$\vec{w}_\tau \perp \vec{w}_n$$

Модуль вектора ускорения удобно выражать либо через его проекции на координатные оси, либо через тангенциальную и нормальную компоненты:

$$w = \sqrt{{w_x}^2 + {w_y}^2 + {w_z}^2} = \sqrt{{w_\tau}^2 + {w_n}^2}$$

Ед. измерения ускорения в системе СИ является м/с^2.

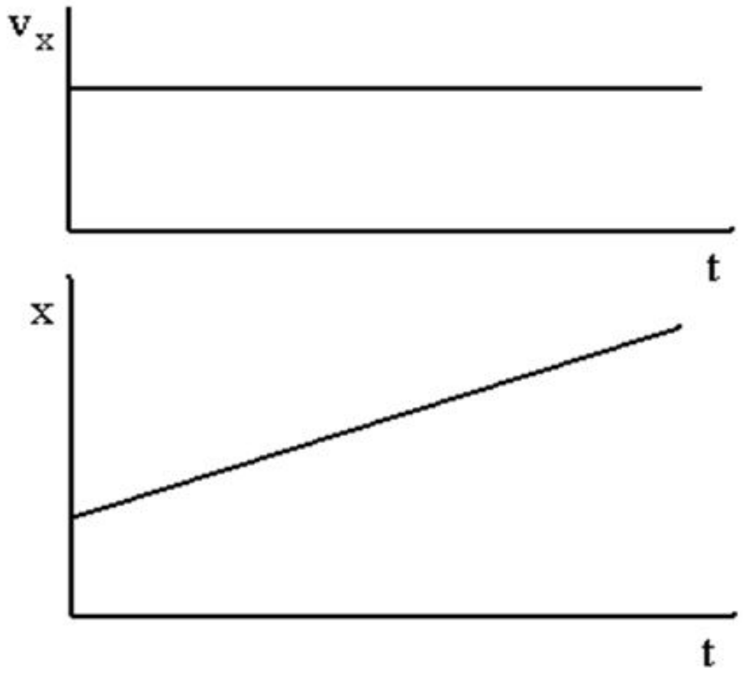
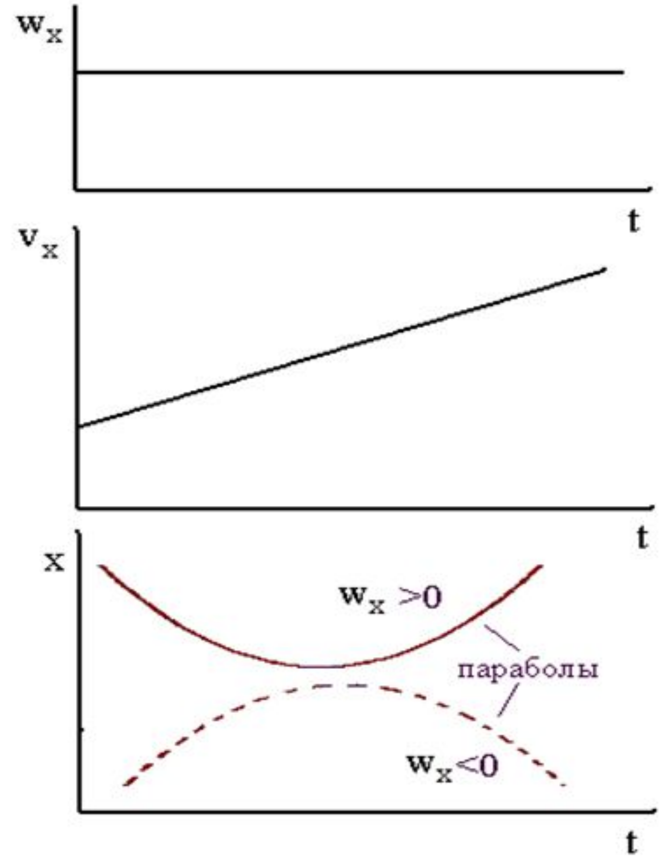
Частные случаи кинематики МТ (1)

Частные случаи: прямолинейное движение (траектория – прямая, вдоль нее ось 0x) и криволинейное, а также равномерное (с постоянной скоростью) и неравномерное (с меняющейся).

В последнем случае можно выделить равнопеременное движение, когда постоянно ускорение, или его модуль, или одна из компонент.

	Равномерное	Неравномерное
Прямолинейное	$\mathbf{v}$ = const; $\mathbf{w} = 0$; $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v}\, t$; $s = v\, t$	$\mathbf{w} \neq 0$; $w = w_\tau \neq 0$; При $\mathbf{w}$ = const $\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{w}\, t$; $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v_0}\, t + ½\, \mathbf{w}\, t^2$
Криволинейное	v = const; $\mathbf{v} \neq$ const; $\mathbf{w_\tau} = 0$; $\mathbf{w} = \mathbf{w_n}$	$\mathbf{w_\tau} \neq 0$; $\mathbf{w_n} \neq 0$; $\mathbf{w} = \mathbf{w_\tau} + \mathbf{w_n}$; $\mathbf{v} \neq$ const

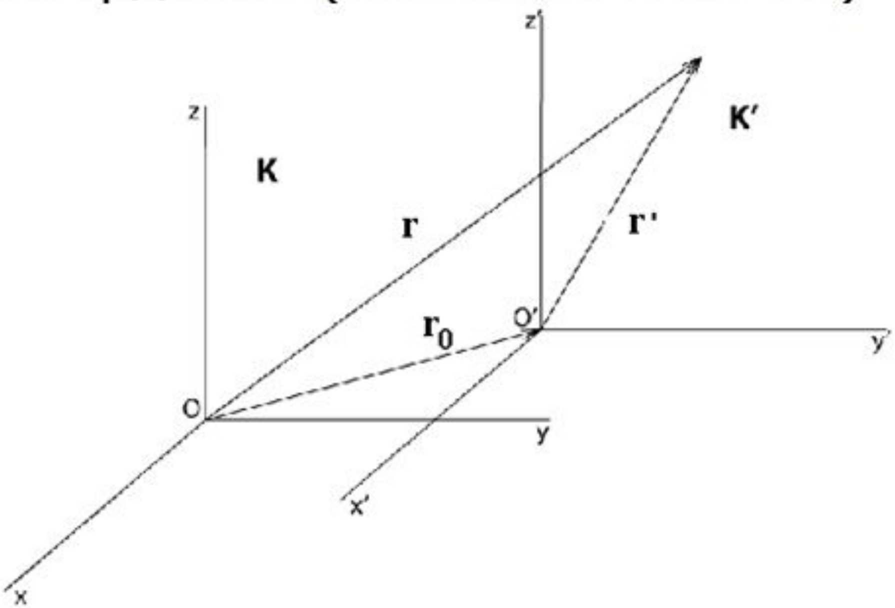
Частные случаи кинематики МТ (2)

Графики равномерного прямолинейного движения	Графики неравномерного прямолинейного движения
	

Преобразования Галилея, координаты

Выбор системы координат – произвольный (направления осей, тело отсчета).

Соотношения координат и скоростей МТ в разных системах координат (системах отсчета) - преобразование Галилея.



Две СО К и К′ с параллельными осями.

Отн. К начало координат К′ движется со скоростью **u**, а некая частица со скоростью **v**. Тогда координаты частицы в К′ выражаются через координаты в системе К:

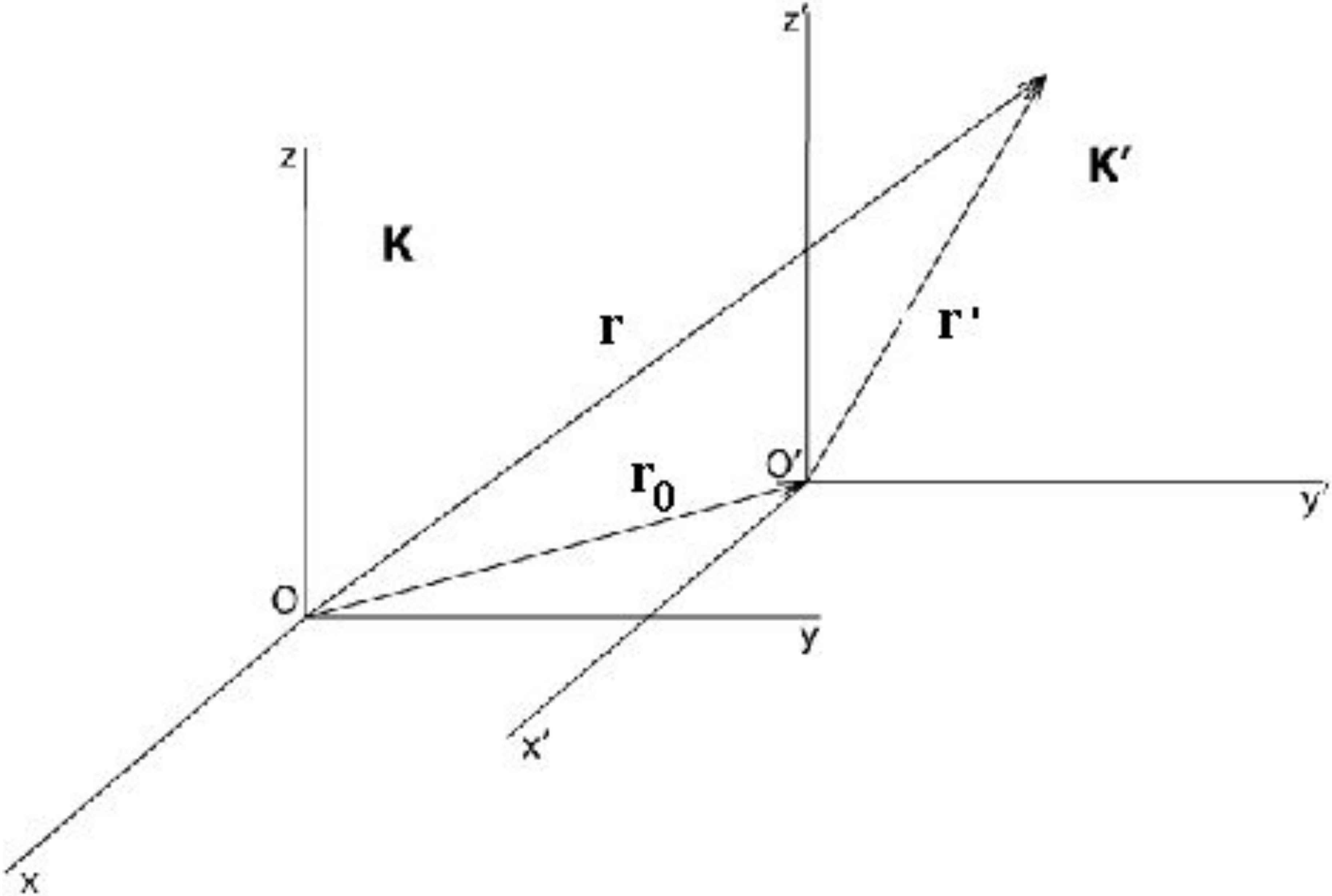
$$x' = x - x_0 - u_x t$$

$$y' = y - y_0 - u_y t$$

$$z' = z - z_0 - u_z t$$

В векторной форме: $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{u}\,t$.

$\mathbf{r}_0$ **–** радиус-вектор начала координат К′ при $t = 0$.



z′
K′
z
K
r
r'
O′
r0
y′
O
y
x′
x

Преобразования Галилея, скорости

Проекции скорости преобразуются по правилу:

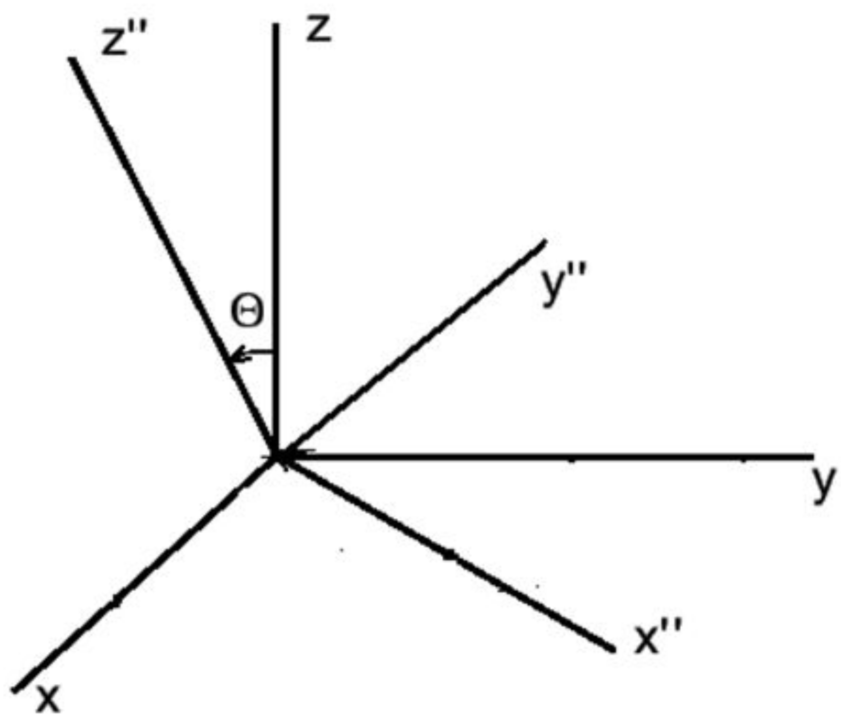
$$v_x' = v_x - u_x$$

$$v_y' = v_y - u_y$$

$$v_z' = v_z - u_z$$

В векторной форме: $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$

Преобразования вращения (поворота)



Если оси ∦, то нужно сначала (или после) провести преобразование поворота координатных осей.
В повернутой К″ «дважды штрихованной», СО координаты задаются по правилу:

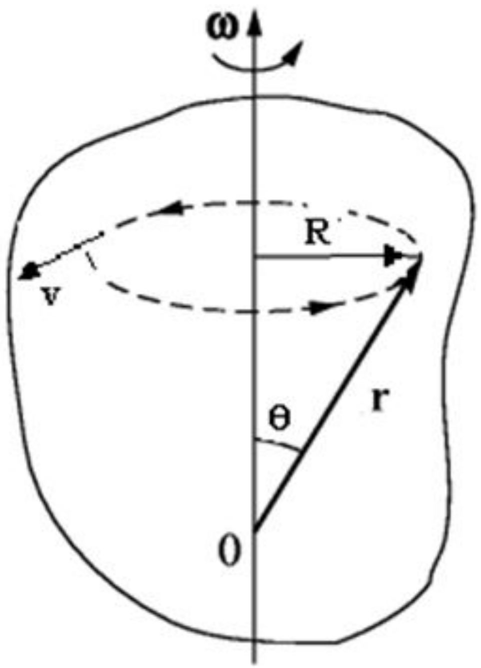
$$\overrightarrow{r''} = \hat{T}\vec{r}$$

$\hat{T}$ – тензор вращения (или матрица направляющих косинусов)

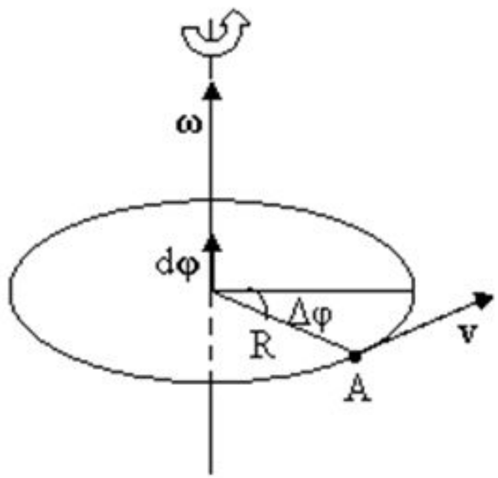
$$x'' = x\cos(x, x'') + y\cos(y, x'') + z\cos(z, x'')$$
$$y'' = x\cos(x, y'') + y\cos(y, y'') + z\cos(z, y'')$$
$$z'' = x\cos(x, z'') + y\cos(y, z'') + z\cos(z, z'')$$

Аргументы косинусов - углы между парами (их 9 штук) осей. На рисунке показан угол (z, z″).

Угловая скорость вращения



При вращении тела вокруг фиксированной оси: модель *абсолютно твердого тела*, т.е. тела, в кот. при движении расстояния между ∀ парами точек не меняются. Фиксированная ось вращения - все точки оси неподвижны в выбранной СО. Расстояния от ∀ точки до оси неизменны ⇨ ∀ точка тела движется по окружности.



Если за Δt точка проходит по дуге Δφ, то ∀ другая точка проходит по такой же дуге ⇨ все тело поворачивается на угол Δφ.

Средняя угловая скорость вращения $\langle\omega\rangle = \Delta\varphi/\Delta t$, кот. при $\Delta t \to 0$ переходит в *мгновенную угловую скорость вращения*:

$$\omega = d\varphi/dt$$

Векторы угловой скорости и углового ускорения

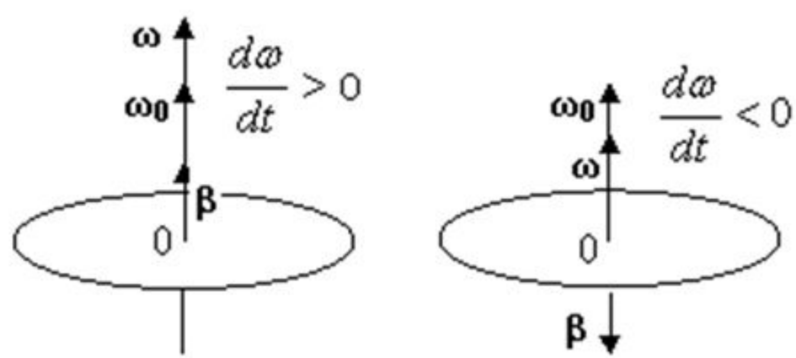
Линейная скорость точки: v = dl/dt = R dφ/dt = R ω.

v и **r** – векторные величины, причем **v** ⊥ **r** ⇨ величине ω сопоставляется вектор **ω**, такой что |**ω**| = ω, а направление определяется по правилу буравчика, кот. вращается вместе с телом:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$$

Это соотношение годится не только для вектора **R**, проведенного из центра окружности, по кот. движется точка, но из ∀ точки на оси, т.к. R = r sinθ.

Если ω ↓↑ со временем, то определяют *вектор углового ускорения* **β**: |**β**| = |dω/dt|, а направление совпадает с **ω**, если dω/dt > 0, и противоположно, если dω/dt < 0.



Динамика

Кинематика - траектории, скорости, ускорения, но не причины.

Динамика - раздел механики, изучающий причины движения. Динамика рассматривает движение тел с пом. модели, основные положения кот. можно сформулировать следующим образом:

- 1. если тело достаточно мало, то его движение подчиняется законам движения материальной точки (МТ);
- 2. основные законы движения МТ - 3 закона Ньютона (ЗН);
- 3. если тело большое, то его <u>мысленно</u> разбивают на части, каждую из которых можно считать МТ;
- 4. взаимодействие между частями крупного тела - с помощью тех же законов Ньютона.

Опыт ⇒ движение МТ полностью описывается 3 ЗН (конец 17 века. «Математические начала натуральной

3 закона Ньютона

I. Всякое тело продолжает оставаться в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения пока и поскольку не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

II Изменение количества движения тела происходит пропорционально действующей силе и по направлению той прямой, по которой приложена эта сила.

III Действию всегда есть равное и противоположно направленное противодействие, иначе - воздействия 2 тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.

1 закон Ньютона

Аристотель: естественное состояние ∀ тела - состояние покоя. Чтобы привести тело в движение и поддерживать его, нужна внешняя причина (наз. силой). Сила исчезает ⇒ тело возвращается в состояние покоя.

Галилей (нач. 16 в.): нет принципиальной разницы между состояниями покоя и равномерного прямолинейного движения (РПД). Если корабль движется равномерно и прямолинейно относительно берега, то тело покоится на его палубе, но движется равномерно и прямолинейно относительно берега.

Все физические процессы в СО протекают одинаково, независимо от того, неподвижна система или находится в состоянии РПД.

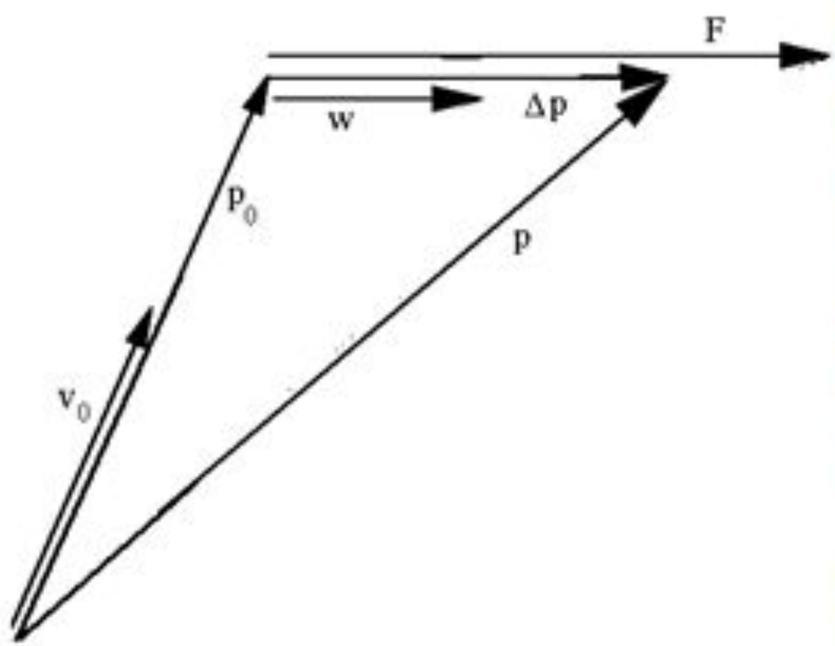
Это (*принцип относительности Галилея),* уравнивает состояния покоя и равномерного прямолинейного движения и является частью 1 ЗН.

Второй смысл этого закона - при рассмотрении 2 ЗН.

2 закон Ньютона

1 ЗН ⇒ состояние покоя или РПД «естественное» (без внешних причин)
2 ЗН - изменение этого состояния при взаимодействии с другими телами.
В нем новая ФВ – *количество движения, или импульс тела* **p**:

$$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$$



Импульс содержит скорость **v** (известна из кинематики), а *массу* m Ньютон определял, как мера количества вещества в теле.

Эта мера м. б. разной – по объему, по числу молекул, по теплотворной способности и т.д.

Изменение импульса пропорционально *силе* **F**:

$$d\mathbf{p}/dt \sim \mathbf{F}$$

Все величины векторные (в законе речь идет о направлениях).

Это соотношение удобно воспользоваться более привычной формой:

$$d\mathbf{v}/dt \sim \mathbf{F}/m \text{ или } \mathbf{w} \sim \mathbf{F}/m$$

В ЛЧ – известное из кинематики ускорение, а в ПЧ – 2 неопределенных, масса и сила.

Понятия силы и массы

С*ила*? Ньютон: тело испытывает ускорение ⇒ на него воздействуют другие тела, а мерой этого воздействия является ФВ – сила. Происхождение м. б. разным.

Как сравнивать разные силы?

Масса? Ньютон: мера количества вещества в теле, чем больше в теле вещества, тем меньшее ускорение оно получит.

Эйлер (около 1740): масса - ***мера инертности тела***, т.е. способности сохранять свою скорость под воздействием силы.

Масса

2 тела получают одинаковое ускорение под действием одной и той же силы ⇒ у них одинаковая масса.

Масса - особая ФВ ⇒ нужна единица измерения, т.е. нужно указать тело, масса которого считается единичной.

В СИ: единица массы *килограмм* (кг) - масса 1 дм^3 чистой воды при 4^{o}С и нормальном давлении. [m] = кг

Эталон из сплава платины и иридия.

Диапазон: от 10^{-30} кг для электрона до 10^{48} кг для Галактики (человек – 10^2 кг, Земля – 10^{25} кг, Солнце - 10^{30} кг).