

Квадратичная функция

Квадратичной функцией называется функция, заданная формулой

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$$

1) $y = x^2$

Свойства функции:

1) *область определения:* $X = \mathbf{R}$

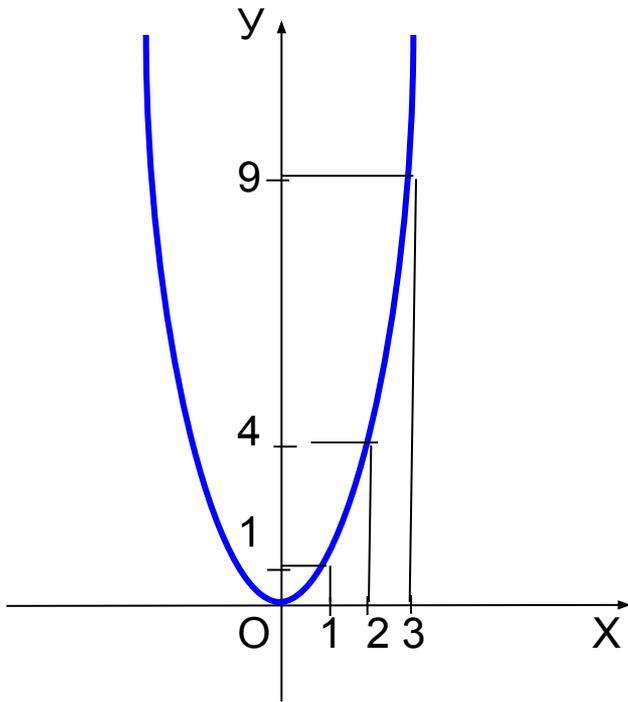
2) *множество значений:* $Y = [0; +\infty[$

3) $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \Rightarrow$
функция *четная*,

4) *график - парабола,*
ветви вверх,
вершина $O(0; 0)$

ось симметрии – Oy

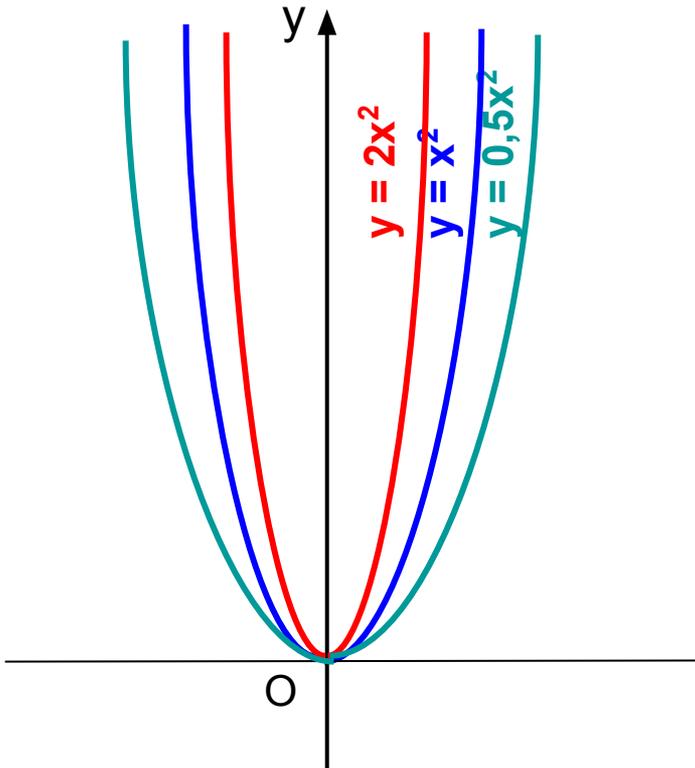
5) *возрастает* на $[0; +\infty[$,
убывает на $]-\infty; 0]$.



2) $y = ax^2$

Свойства функции:

$a > 0$



1) область определения: $X = \mathbf{R}$

2) множество значений: $Y = [0; +\infty[$

3) $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x) \Rightarrow$

функция *четная*,

4) график - *парабола*,

вершина $O(0; 0)$,

ветви *вверх*,

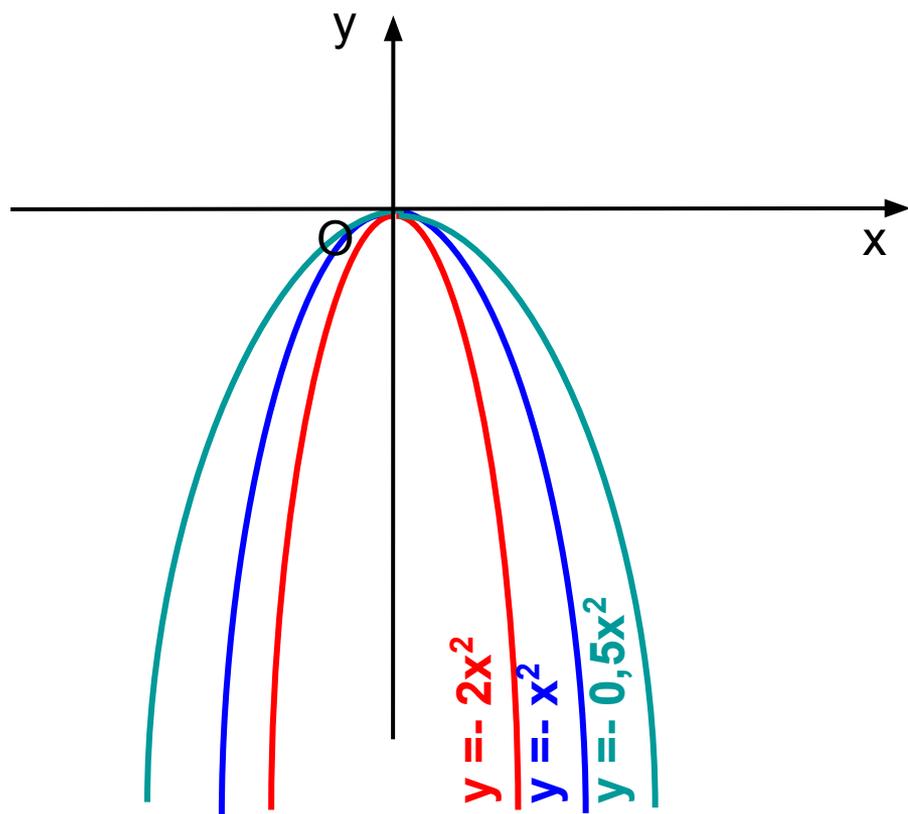
ось симметрии – Oy

5) *возрастает* на $[0; +\infty[$,

убывает на $]-\infty; 0]$.

$$a < 0$$

Свойства функции:



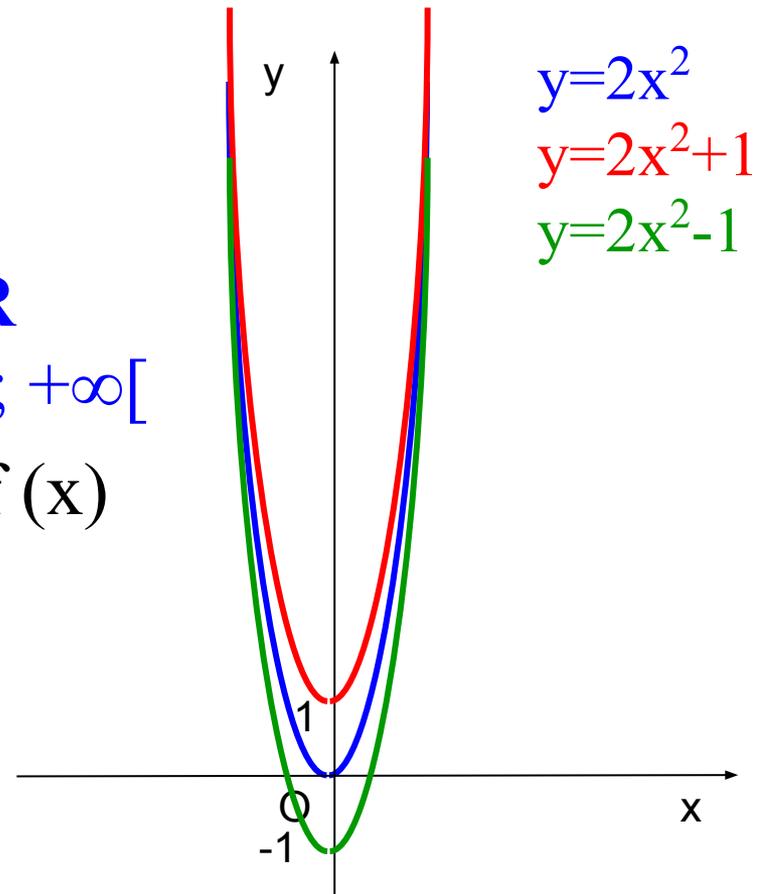
*Самостоятельно
аналогично.*

$$3) y = ax^2 + n$$

Свойства функции:

$$a > 0$$

- 1) *Область определения:* $X = \mathbb{R}$
- 2) *Множество значений:* $Y = [n; +\infty[$
- 3) $f(-x) = a(-x)^2 + n = ax^2 + n = f(x)$
 \Rightarrow функция *четная*,
- 4) *график - парабола*,
ветви вверх,
вершина $(0; n)$,
ось симметрии параболы - Oy
- 5) *возрастает* на $[0; +\infty[$,
убывает на $]-\infty; 0]$.



Свойства функции:

$$a < 0$$

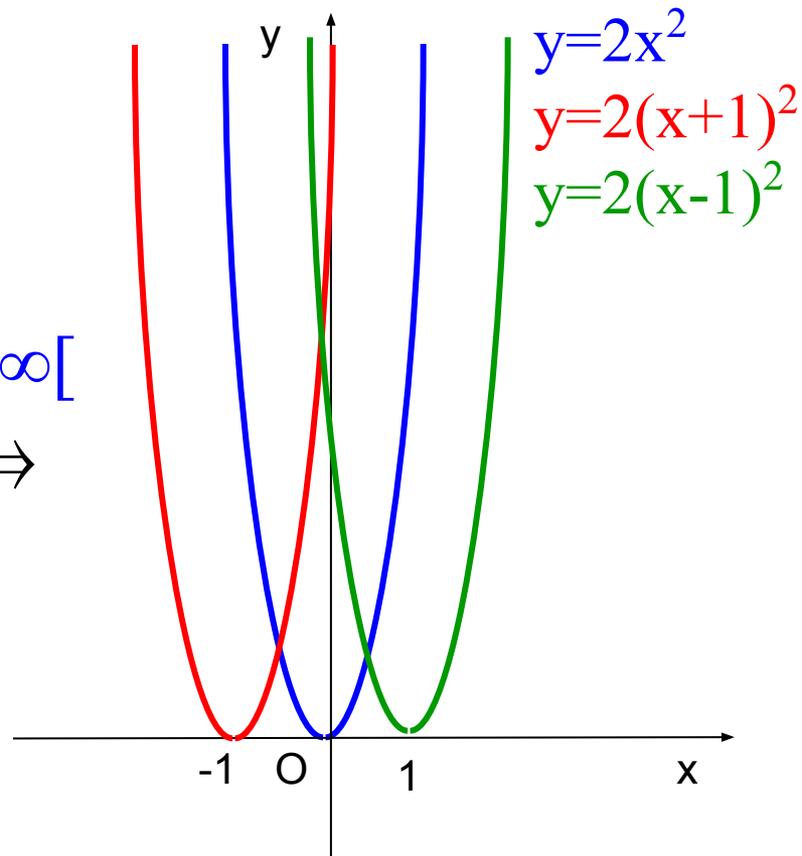
Самостоятельно аналогично

$$4) y = a(x - m)^2$$

Свойства функции:

$$a > 0$$

- 1) Область определения: $X = \mathbf{R}$
- 2) Множество значений: $Y = [0; +\infty[$
- 3) $f(-x) = a((-x-m)^2) \neq f(x) \neq -f(x) \Rightarrow$
функция *ни четная, ни нечетная*
- 4) графиком функции является *парабола*,
ветви вверх,
вершина $(m; 0)$,
ось симметрии – прямая $x = m$
- 5) *возрастает* на $[m; +\infty[$,
убывает на $]-\infty; m]$.

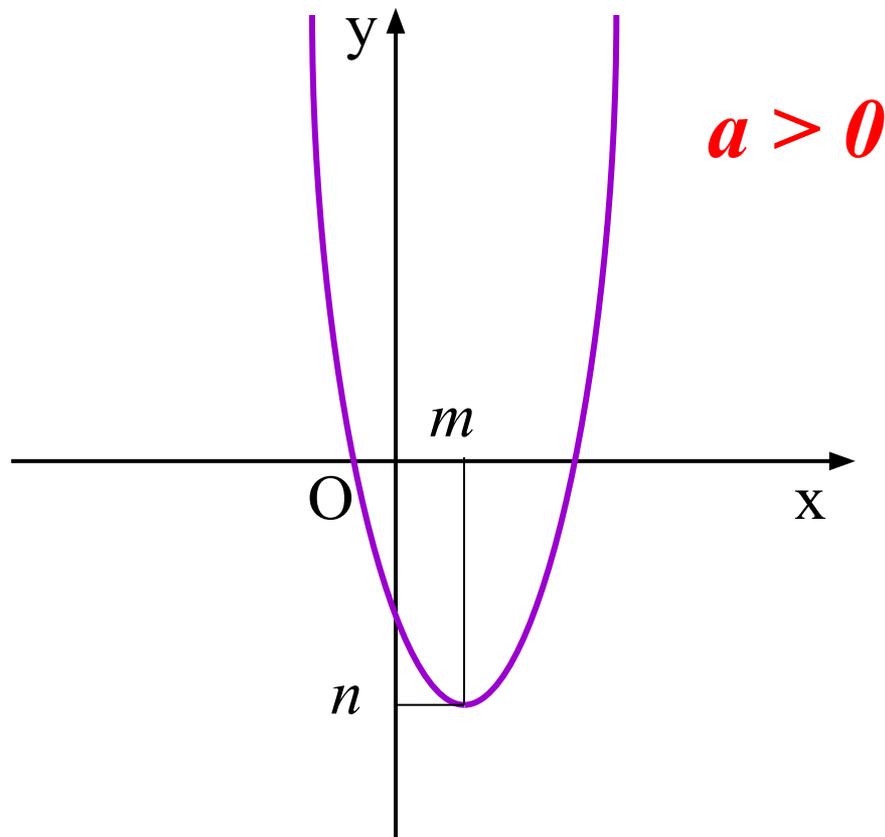


Свойства функции:

$$a < 0$$

Самостоятельно аналогично

$$5) y = a(x - m)^2 + n$$



Свойства функции:

при $a > 0$ и $a < 0$

Самостоятельно

Построение графика функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

1 способ

1) из квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ выделить полный квадрат: $y = a(x - m)^2 + n$:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Обозначим $-\frac{b}{2a} = m$, $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = n$.

Получим $y = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n$.

- 2) определить координаты вершины параболы – $(m; n)$
- 3) построить вспомогательный график функции $y = ax^2$
- 4) выполнить перемещения вспомогательного графика в направлениях параллельных координатным осям:
- а) параллельно оси Ox :
 - на m единиц *вправо*, если $m > 0$,
 - на $|m|$ единиц *влево*, если $m < 0$;
 - б) параллельно оси Oy :
 - на n единиц *вверх*, если $n > 0$,
 - на $|n|$ единиц *вниз*, если $n < 0$.

2 способ

1) Найти *координаты вершины параболы*:

абсцисса $x_0 = -\frac{b}{2a}$ *ордината* $y_0 = y(x_0)$

2) Найти (если возможно) *абсциссы точек пересечения параболы с осью Oх*:

это корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

3) Найти *ординату точки пересечения параболы с осью Oy*: это $y = y(0) = c$.

4) Найти *абсциссу точки, симметричной точке (0; c) относительно оси симметрии параболы*:

это корень уравнения $ax^2 + bx + c = c$.

5) Можно построить еще *несколько точек* искомого графика, выбрав несколько значений x и подсчитав соответствующие им значения y .

ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Дробно-линейной функцией называется функция

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

полученная при делении друг на друга двух линейных функций.

1) $c = 0, d \neq 0 \Rightarrow y = \frac{ax + b}{d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ *линейная функция*

2) $a = d = 0, c \neq 0 \Rightarrow y = \frac{b}{cx} = \frac{k}{x}$ (где $k = \frac{b}{c}$) –

обратная пропорциональность

$$3) c \neq 0, d \neq 0, ad = bc \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = p \Rightarrow a = cp, b = dp \Rightarrow$$

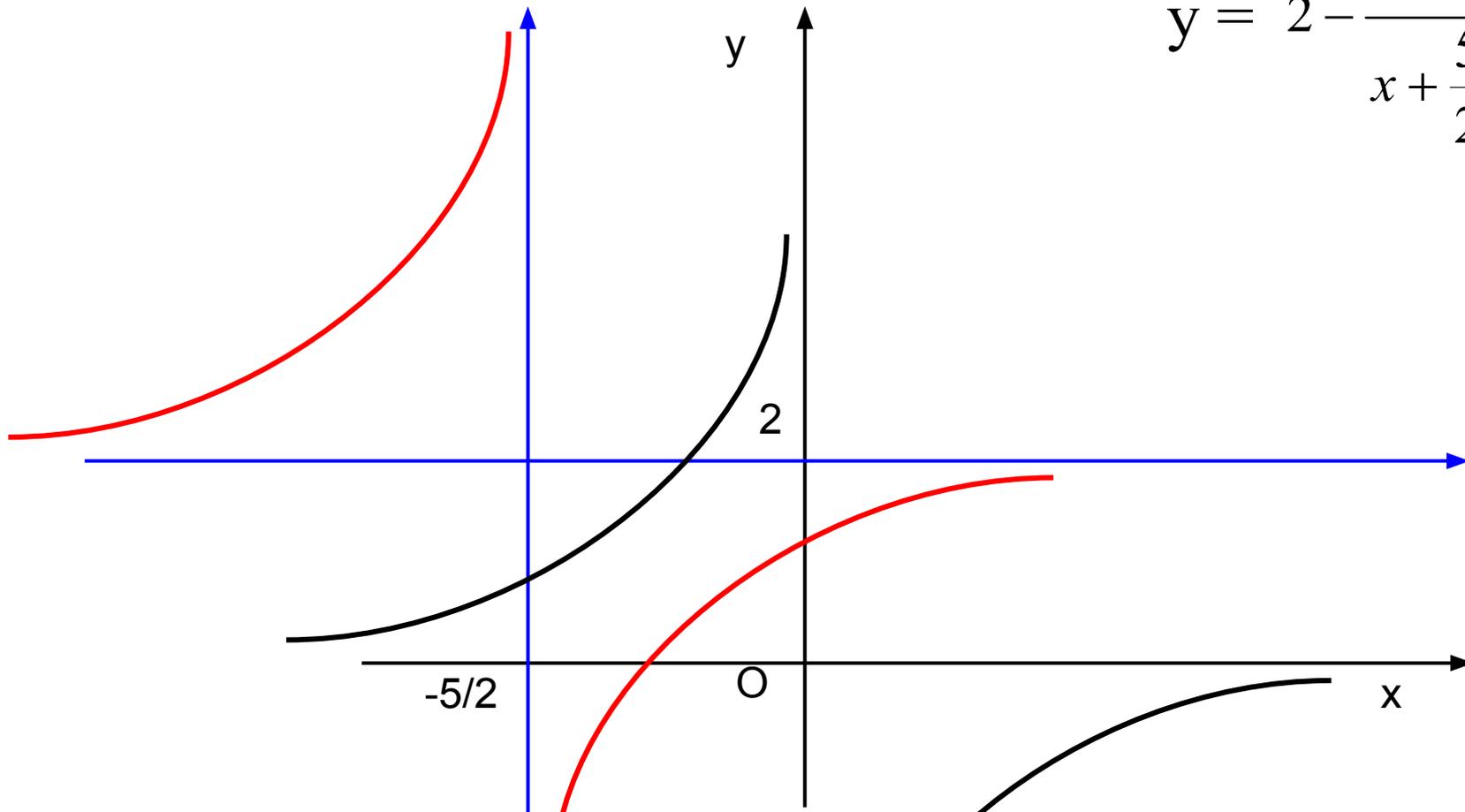
$$y = \frac{cp \ x + dp}{cx + d} = \frac{p(cx + d)}{cx + d} = p - \text{постоянная функция}$$

Пример. Построить график функции $y = \frac{4x + 6}{2x + 5}$

$$y = \frac{4\left(x + \frac{3}{2}\right)}{2\left(x + \frac{5}{2}\right)} = \frac{2\left(x + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right)}{\left(x + \frac{5}{2}\right)} = \frac{2\left[\left(x + \frac{5}{2}\right) - 1\right]}{x + \frac{5}{2}} = \frac{2\left(x + \frac{5}{2}\right) - 2}{x + \frac{5}{2}} = 2 - \frac{2}{x + \frac{5}{2}}$$

График функции $y = 2 - \frac{2}{x + \frac{5}{2}}$ получается сдвигом графика функции $y = -\frac{2}{x}$ на $5/2$ единицы влево и на 2 единицы вверх.

$$y = 2 - \frac{2}{x + \frac{5}{2}}$$



$-5/2$

O

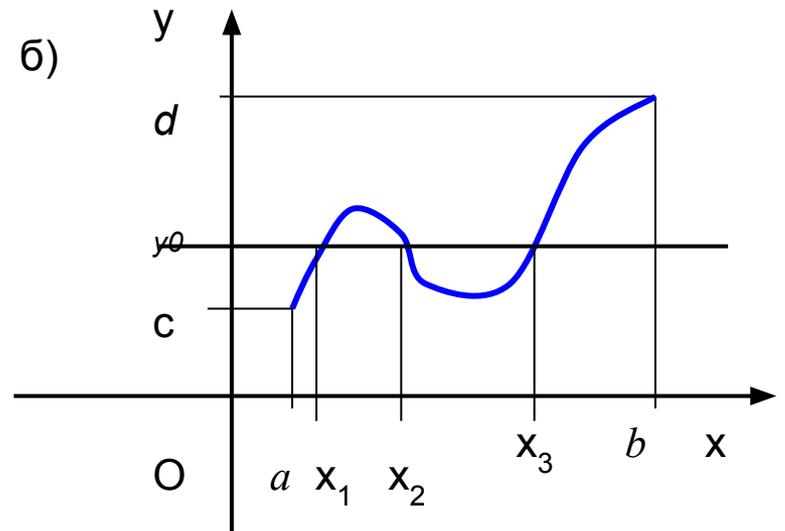
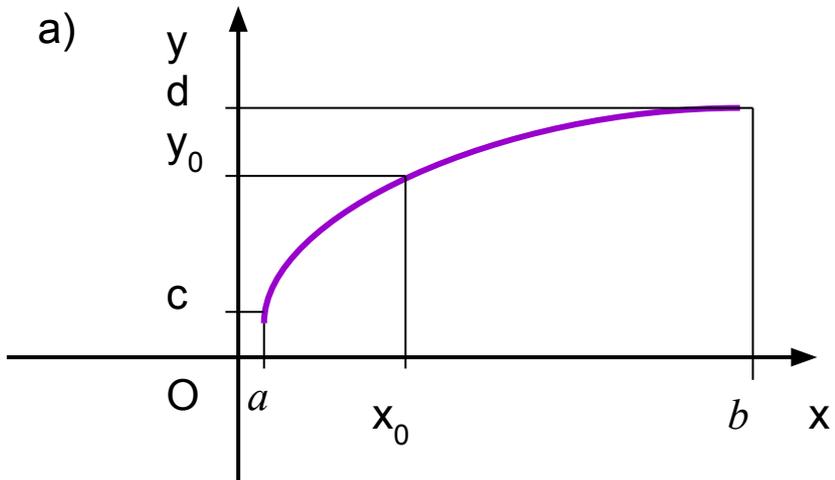
x

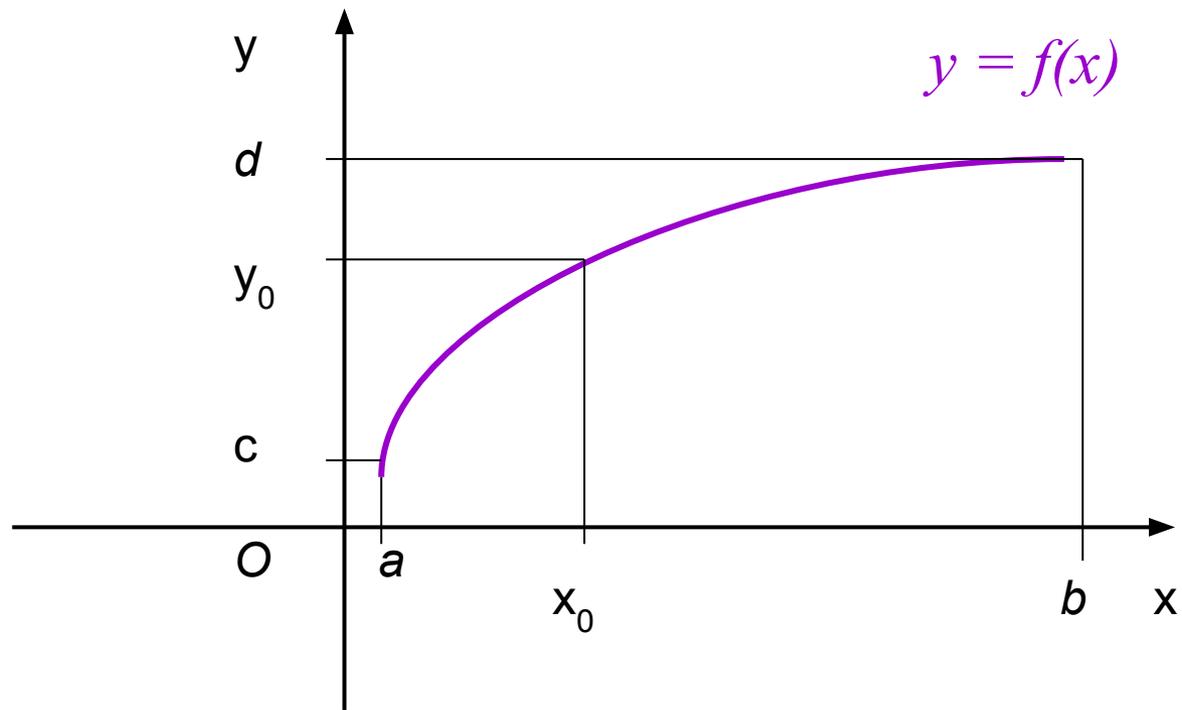
y

2

$$y = -\frac{2}{x}$$

ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ



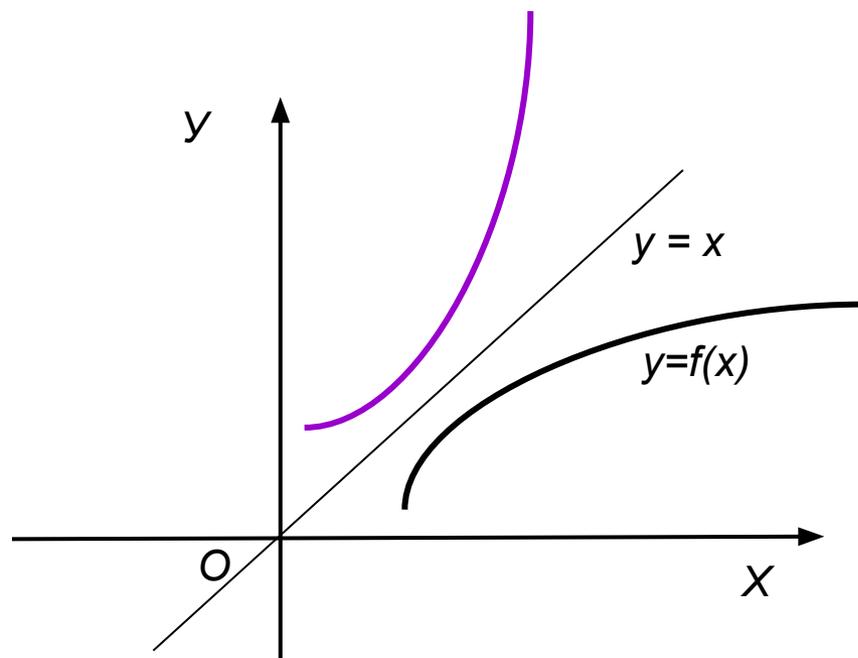


Если функция $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ такова, что для любого значения $y_0 \in Y$ существует единственное значение $x_0 \in X$, такое, что $y_0 = f(x_0)$, то функция $f(x)$ **обратима**, функция $x = g(y)$, $y \in Y$ **обратная функция** для функции $y = f(x)$, $x \in X$.

Чтобы найти выражение для обратной функции, надо решить уравнение $y = f(x)$ относительно x , беря лишь те решения, которые принадлежат множеству X , и поменять местами x и y .

Если функция $y = f(x)$ определена и возрастает (убывает) на промежутке X , и областью ее значений является промежуток Y , то у нее существует обратная функция, которая определена и возрастает (убывает) на Y .

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$ (биссектрисы 1-й и 3-й координатных четвертей)



Примеры:

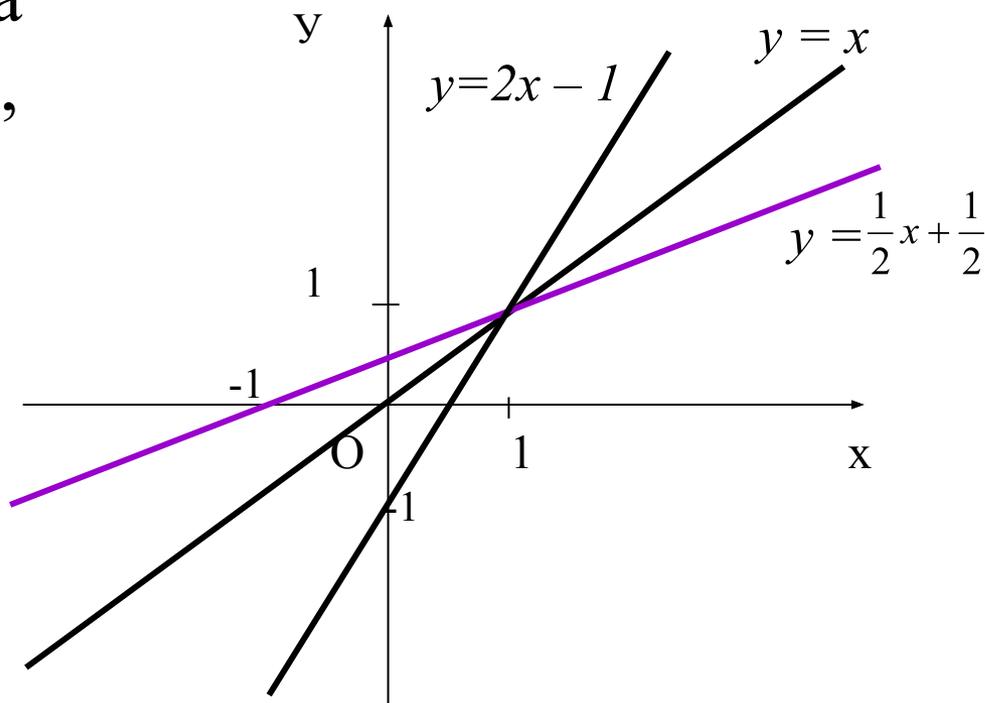
1) Для функции $y = 2x - 1$ найти обратную функцию.
Построить графики обеих функций.

Функция возрастает на
всей числовой прямой,
значит, у нее есть
обратная функция

$$x = \frac{y+1}{2}$$

$$y = \frac{x+1}{2}$$

$$\text{или } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



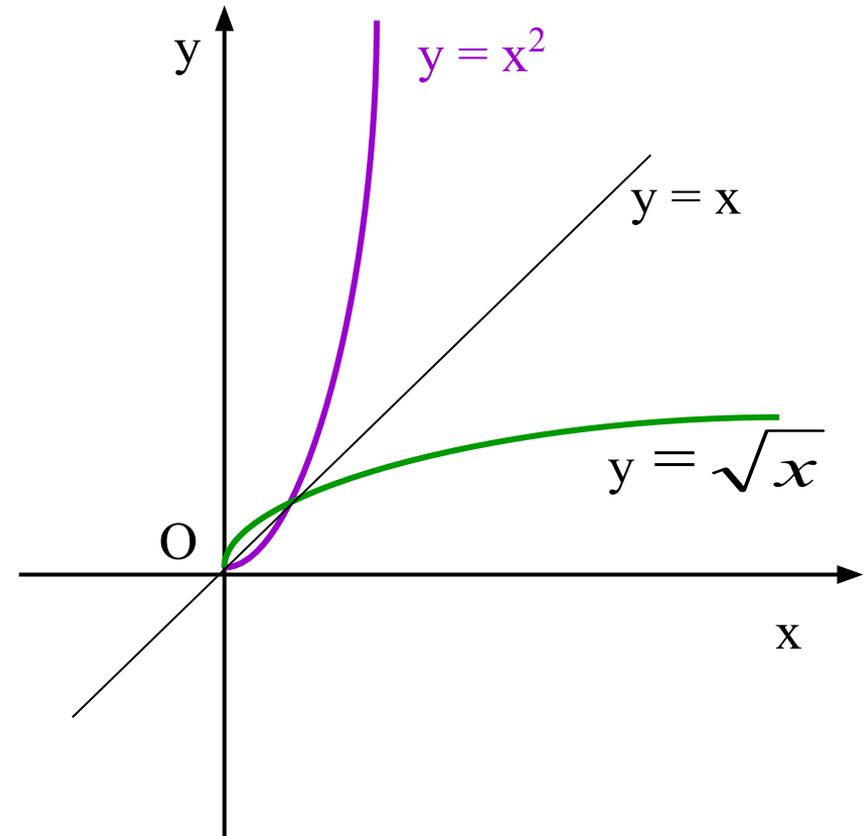
$$2) y = x^2, x \in \mathbf{R}$$

Эта функция не имеет обратной функции, так как, одно и то же значение y может соответствовать разным значениям x : $3^2 = (-3)^2 = 9$.

$$3) y = x^2, x \in \mathbf{R}_+$$

Функция возрастает на всей области определения, значит, у нее есть обратная функция

$$x = \sqrt{y} \quad y = \sqrt{x}$$



КОМПОЗИЦИЯ ФУНКЦИЙ

$$y = f(x), x \in X \text{ и } x = g(t), t \in T, x \in X$$

$$t \rightarrow x = g(t) \rightarrow y = f(x),$$


$$f(g(t))$$

Сложная функция $y = f(g(t))$ называется **композицией функций** $y = f(x)$, $x \in X$ и

$$x = g(t), t \in T.$$

От лат. *compositio* – *составление*

Примеры: 1) $y = x^2 + 1$ и $x = 3t - 4$,

$$y(x(t)) = (3t - 4)^2 + 1.$$

$$2) f(x) = x^2 - 2x, g(x) = 4x + 3$$

$$f(g(x)) = (4x + 3)^2 - 2(4x + 3), g(f(x)) = 4(x^2 - 2x) + 3$$

$$3) f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0 \quad \text{композиция функций } y = f[g(t)]$$
$$g(t) = -t^2 - 1 \quad g < 0 \quad \text{не определена}$$

$$y = g[f(x)] = -x - 1$$

Спасибо за внимание!