

ДИНАМИКА ОБЩЕСТВЕННЫХ ЯВЛЕНИЙ

Ряды динамики

Ряд динамики

- это последовательность упорядоченных во времени числовых показателей, характеризующих уровень развития изучаемого явления;
- статистические данные, отображающие развитие изучаемого явления во времени.

С помощью рядов динамики изучаются закономерности развития социально — экономических явлений в следующих направлениях:

- характеристика уровней развития изучаемых явлений во времени;
- измерение динамики изучаемых явлений посредством системы стат.показателей;
- выявление и колич.оценка основных тенденций развития (тренда).
- изучение периодических колебаний;
- экстраполяция и прогнозирование.

2 основных элемента:

- показатель времени- t (определенные даты, либо отдельные периоды-годы, квартал, месяц, сутки..);
- соответствующие им уровни развития изучаемого явления – u , которые отображают количественную оценку развития явления во времени

Ряды
динамики

По времени

По форме
представления
уровней

По расстоянию
между датами
или
интервалам
времени

Моментны
е

Интервальн
ые

Абсолютны
х
величин

Средних
величин

Относительн
ых
величин

Полные

Неполные

Моментные р.д. отображают состояние изучаемых явлений на определенные даты (моменты времени).

Интервальные р.д. отображают итоги развития (функционирования) изучаемых явлений за отдельные периоды (интервалы) времени.

Полные р. д. имеют место, когда даты регистрации или окончания периодов следуют друг за другом с равными интервалами. Это равноотстоящие ряды динамики.

Неполные р.д.- когда принцип равных интервалов не соблюдается

Примеры рядов динамики

Число дошкольных учреждений в России (на конец года), тыс.

Дата	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Количество	68,6	64,2	60,3	56,6	53,9	51,3

- **Моментный**
- **Абсолютных величин**
- **Полный**

Примеры рядов динамики

Уровень экономической активности населения России (на начало года), %

1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
92	95	96	85	83	86	88	89	88

- **Моментный**
- **Относительных величин**
- **Полный**

Примеры рядов динамики

Среднегодовая численность занятых в экономике (тыс. чел.)

<i>1995</i>	<i>1996</i>	<i>1998</i>	<i>1999</i>	<i>2001</i>	<i>2003</i>
<i>1904</i>	<i>1860</i>	<i>1752</i>	<i>1812</i>	<i>1880</i>	<i>1882</i>

- *Интервальный*
- *Относительных величин*
- *Неполный*

Основным условием для получения правильных выводов при анализе р.д. является сопоставимость его элементов

- Сопоставимость по территории
- Сопоставимость по кругу охватываемых объектов
- Сопоставимость по единицам измерения
- Упорядоченность во времени

При анализе рядов динамики иногда возникает необходимость их **смыкания**, т.е. **приведения к сопоставимому виду.**

Смыкание рядов динамики

ПРИМЕР.

В 2006 г. произошло укрупнение региона, что послужило причиной изменения товарооборота обслуживаемой торг.организации. Результаты объемов реализации в табл.

	2005	2006	2007
В прежних границах	432	450	-
В новых границах	-	630	622.5

	2005	2006	2007
В прежних границах	432	450	444,6
В новых границах	604.8	630	622.5

Другой способ смыкания рядов динамики заключается в том, что уровни года, в котором произошли изменения, как до изменений, так и после изменений принимаются за 100%, а остальные пересчитываются в процентах по отношению к этим уровням соответственно

объем производства промышленной продукции	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
В старых границах	19,1	19,7	20,0	21,2			
В новых границах				22,8	23,6	24,5	26,2
<i>Сопоставимый ряд</i>	21.0	21.7	22.0	22.8	23.6	24.5	26.2
<i>Ряд в % к 2000 г. (сопоставимый ряд относительных</i>	100.1	103.0	104.3	100.0	103.5	107.5	114.0

Показатели анализа рядов динамики

Показатель	Базисный	Цепной
Абсолютный прирост ($\Delta_{i_{баз}}$; $\Delta_{i_{цеп}}$) $\Delta_{i_{баз}} = \sum \Delta_{i_{баз}}$	$Y_i - Y_0$	$Y_i - Y_{i-1}$
Коэффициент роста (Кр)	$Y_i : Y_0$	$Y_i : Y_{i-1}$
Темп роста (Тр)	$(Y_i : Y_0) \cdot 100$	$(Y_i : Y_{i-1}) \cdot 100$
Коэффициент прироста (Кпр) $K_{р}^{баз} = \prod_{i=1} K_{р}^{цеп}$	$K_{р} - 1; \frac{Y_i - Y_0}{Y_0};$ $\Delta_{баз} / Y_0$	$K_{р} - 1; \frac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}};$ $\Delta_{цеп} / Y_{i-1}$
Темп прироста (Тпр)	$K_{пр} \cdot 100; T_{р} - 100$	$K_{пр} \cdot 100; T_{р} - 100$
Абсолютное значение одного процента прироста (А)		$Y_{i-1} / 100; \Delta / T_{пр};$ $\frac{Y_i - Y_{i-1}}{T_{р} - 100}$

- В случае, когда сравнение проводится с периодом (моментом) времени, начальным в ряду динамики, получают **базисные показатели**. Если же сравнение производится с предыдущим периодом или моментом времени, то говорят о **цепных показателях**.

Пример

Годы	Консервы мясные, млн. усл. банок	Абсолютные приросты, млн. усл. банок		Темпы роста, %		Темпы прироста, %		А, млн. усл. банок
		Цепн.	Базис.	Цепн.	Базис.	Цепн.	Базис.	
1999	891,00							
2000	806,00							
2001	1595,00							
2002	1637,00							
2003	1651,00							
	6580,00							

Пример

Годы	Консервы мясные, млн. усл. банок	Абсолютные приросты, млн. усл. банок		Темпы роста, %		Темпы прироста, %		А, млн. усл. банок
		Цепн.	Базис.	Цепн.	Базис.	Цепн.	Базис.	
1999	891,00	-						
2000	806,00	-85,00						
2001	1595,00	789,00						
2002	1637,00	42,00						
2003	1651,00	14,00						
	6580,00	760,00						

Пример

Годы	Консервы мясные, млн. усл. банок	Абсолютные приросты, млн. усл. банок		Темпы роста, %		Темпы прироста, %		А, млн. усл. банок
		Цепн.	Базис.	Цепн.	Базис.	Цепн.	Базис.	
1999	891,00	-	-					
2000	806,00	-85,00	-85,00					
2001	1595,00	789,00	704,00					
2002	1637,00	42,00	746,00					
2003	1651,00	14,00	760,00					
	6580,00	760,00						

Пример

Годы	Консервы мясные, млн. усл. банок	Абсолютные приросты, млн. усл. банок		Темпы роста, %		Темпы прироста, %		А, млн. усл. банок
		Цепн.	Базис.	Цепн.	Базис.	Цепн.	Базис.	
1999	891,00	-	-	-				
2000	806,00	-85,00	-85,00	90,5%				
2001	1595,00	789,00	704,00	197,9%				
2002	1637,00	42,00	746,00	102,6%				
2003	1651,00	14,00	760,00	100,9%				
	6580,00	760,00		185,3%				

Пример

Годы	Консервы мясные, млн. усл. банок	Абсолютные приросты, млн. усл. банок		Темпы роста, %		Темпы прироста, %		А, млн. усл. банок
		Цепн.	Базис.	Цепн.	Базис.	Цепн.	Базис.	
1999	891,00	-	-	-	-			
2000	806,00	-85,00	-85,00	90,5%	90,5%			
2001	1595,00	789,00	704,00	197,9%	179,0%			
2002	1637,00	42,00	746,00	102,6%	183,7%			
2003	1651,00	14,00	760,00	100,9%	185,3%			
	6580,00	760,00		185,3%				

Пример

Годы	Консервы мясные, млн. усл. банок	Абсолютные приросты, млн. усл. банок		Темпы роста, %		Темпы прироста, %		А, млн. усл. банок
		Цепн.	Базис.	Цепн.	Базис.	Цепн.	Базис.	
1999	891,00	-	-	-	-	-		
2000	806,00	-85,00	-85,00	90,5%	90,5%	-9,5%		
2001	1595,00	789,00	704,00	197,9%	179,0%	97,9%		
2002	1637,00	42,00	746,00	102,6%	183,7%	2,6%		
2003	1651,00	14,00	760,00	100,9%	185,3%	0,9%		
	6580,00	760,00		185,3%				

Пример

Годы	Консервы мясные, млн. усл. банок	Абсолютные приросты, млн. усл. банок		Темпы роста, %		Темпы прироста, %		А, млн. усл. банок
		Цепн.	Базис.	Цепн.	Базис.	Цепн.	Базис.	
1999	891,00	-	-	-	-	-	-	
2000	806,00	-85,00	-85,00	90,5%	90,5%	-9,5%	-9,5%	
2001	1595,00	789,00	704,00	197,9%	179,0%	97,9%	79,0%	
2002	1637,00	42,00	746,00	102,6%	183,7%	2,6%	83,7%	
2003	1651,00	14,00	760,00	100,9%	185,3%	0,9%	85,3%	
	6580,00	760,00		185,3%				

Пример

Годы	Консервы мясные, млн. усл. банок	Абсолютные приросты, млн. усл. банок		Темпы роста, %		Темпы прироста, %		А, млн. усл. банок
		Цепн.	Базис.	Цепн.	Базис.	Цепн.	Базис.	
1999	891,00	-	-	-	-	-	-	-
2000	806,00	-85,00	-85,00	90,5%	90,5%	-9,5%	-9,5%	8,91
2001	1595,00	789,00	704,00	197,9%	179,0%	97,9%	79,0%	8,06
2002	1637,00	42,00	746,00	102,6%	183,7%	2,6%	83,7%	15,95
2003	1651,00	14,00	760,00	100,9%	185,3%	0,9%	85,3%	16,37
	6580,00	760,00		185,3%				

Система средних показателей динамики

- *средний уровень ряда,*
- *средний абсолютный прирост,*
- *средний темп роста,*
- *средний темп прироста*

Средний уровень ряда

- *показатель, обобщающий итоги развития явления за единичный интервал или момент из имеющейся временной последовательности*
- Расчет среднего уровня ряда динамики определяется видом этого ряда и величиной интервала, соответствующего каждому уровню.

Средний уровень ряда

Для интервальных рядов с равными периодами времени

$$\bar{Y} = \sum_{1}^n Y_i / n \text{ или } \bar{Y} = \sum_{0}^n Y_i / (n + 1),$$

Для интервального ряда с неравноотстоящими уровнями

$\bar{Y} = \frac{\sum yt}{\sum t}$, где t – число периодов времени в течение которых уровень не изменялся

Для моментного ряда с равноотстоящими уровнями

$$\bar{Y} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n}{n - 1}$$

Для моментного ряда с неравноотстоящими уровнями

$$\bar{Y} = \frac{(y_1 + y_2)t + (y_2 + y_3)t_2 + \dots + (y_{n-1} + y_n)t_{n-1}}{2\sum t_i}$$

Средний абсолютный прирост

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum \Delta_{ц}}{n-1} \quad \text{или} \quad \bar{\Delta} = \frac{y_n - y_0}{n-1}$$

$$\bar{T}_p = \bar{K}_p \cdot 100 \quad \text{где}$$

Средний темп роста

$$\bar{K}_p = \sqrt[n]{\text{ПК}_{\text{цеп}}} \quad \text{или} \quad \bar{K}_p = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_0}}$$

Средний темп прироста

$$\bar{T}_{\text{пр}} = \bar{T}_p - 100$$

Средние (пример)

Для интервальных рядов с равными периодами времени

$$\bar{Y} = \frac{6580}{5} = 1316$$

Средний абсолютный прирост

$$\bar{\Delta} = \frac{760}{4} = 190$$

Средний темп роста

$$\bar{T}_p = \sqrt[4]{0.905 * 1.979 * 1.026 * 1.009} = \sqrt[4]{1.853} = 1.167(116.7\%)$$

Средний темп прироста

$$\bar{T}_{np} \equiv 116,7 - 100 \equiv 16,7\%$$

Изучение тенденции развития

- Основной тенденцией развития называется плавное и устойчивое изменение уровня во времени, свободное от случайных колебаний
- Задача состоит в выявлении общей тенденции в изменении уровней ряда, освобожденной от действия различных факторов.

Всякий ряд динамики теоретически может быть представлен в виде составляющих:

- 1) тренд - основная тенденция развития динамического ряда (к увеличению либо снижению его уровней);
- 2) циклические (периодические) колебания, в том числе сезонные;
- 3) случайные колебания.

Изучение тенденции развития

этапы:

- 1) ряд динамики проверяется на наличие тренда;
- 2) производится выравнивание временного ряда и непосредственное выделение тренда с экстраполяцией полученных результатов (распространение установленных в прошлом тенденций на будущий период).

Непосредственное выделение тренда

методы :

- 1) Укрупнение интервалов;*
- 2) Скользящая средняя;*
- 3) Аналитическое выравнивание.*

Метод укрупнения интервалов основан на укрупнении периодов, к которым относятся уровни ряда динамики

Если средние уровни по интервалам не позволяют увидеть тенденцию развития явления, переходят к расчету уровней за большие промежутки времени, увеличивая длину каждого интервала (одновременно уменьшается количество интервалов). Например, преобразование месячных периодов в квартальные, квартальных в годовые и т.д.

Укрупнение интервалов

Валовой сбор зерновых культур с/х
предприятия, т

1986	171,2	1991	181,2	1996	223,8
1987	147,9	1992	168,2	1997	195,7
1988	169,5	1993	222,5	1998	237,4
1989	162,4	1994	195,7	1999	179,3
1990	186,6	1995	140,1	2000	189,1

Укрупнение интервалов

Валовой сбор зерновых культур с/х предприятия, т					
1986-1 990	167,6	1991-1 995	181,5	1996-2 000	205,0

$$\frac{171,2 + 147,9 + 169,5 + 162,4 + 186,6}{5} = 167,6$$

Метод скользящей средней-исходные уровни ряда заменяются средними величинами

- исходные уровни ряда заменяются средними величинами, которые получают из данного уровня и нескольких симметрично его окружающих. Целое число уровней, по которым рассчитывается среднее значение, называют интервалом сглаживания.
- посредством осреднения эмпирических данных индивидуальные колебания погашаются и общая тенденция развития явления выражается в виде некоторой плавной линии

- Если продолжительность периода нечетная (равна 3), то скользящие средние рассчитываются следующим образом:

$$\bar{Y}_1 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}; \quad \bar{Y}_2 = \frac{Y_2 + Y_3 + Y_4}{3};$$

$$\bar{Y}_3 = \frac{Y_3 + Y_4 + Y_5}{3} \text{ И Т.Д.}$$

При четных периодах скользящей средней можно центрировать данные,

т.е. определять среднюю из найденных средних.

К примеру, если скользящая исчисляется с продолжительностью периода, равной 2, то центрированные средние можно определить так:

$$\bar{y}_1^1 = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} ; \quad \bar{y}_2^1 = \frac{\bar{y}_2 + \bar{y}_3}{2} ; \quad \bar{y}_3^1 = \frac{\bar{y}_3 + \bar{y}_4}{2} \text{ И Т.Д.}$$

Первую рассчитанную центрированную относят ко второму периоду, вторую - к третьему, третью - к четвертому и т.д. По сравнению с фактическим сглаженный ряд становится короче на $(m - 1)/2$, где m - число уровней интервала.

В зависимости от целей сглаживания используют следующие подходы:

- 1. Отнесение результата сглаживания к моменту, разделяющему средние периоды.

$$\tilde{Y}_{t+\frac{n}{2}-0,5} = \frac{Y_t + \dots + Y_{t+n-1}}{n}$$

$$\tilde{Y}_{t+0,5} = \frac{Y_t + Y_{t+1}}{2}$$

- Если длина базы $n=2$, имеем:
- Данный способ часто используется в статистике, но неудобен тем, что исходный и сглаженный ряд несопоставимы, т.к. их значения относятся к различным периодам.

2. Отнесение результата сглаживания к последнему периоду

$$\tilde{Y}_{t+n-1} = \frac{Y_t + \dots + Y_{t+n-1}}{n}$$

Если длина базы $n=2$, имеем: .

$$\tilde{Y}_{t+1} = \frac{Y_t + Y_{t+1}}{2}$$

Сглаженный ряд, полученный данным способом, отстаёт от ряда, полученного предыдущим способом, на $n/2-0.5$ периода. Т.е., является смещённым. (На его основе, однако, можно определить форму тренда).

3. Отнесение результата сглаживания к среднему периоду расширенной базы сглаживания

У четной базы нет среднего периода. Если расширить её на 1 период – средний период появится. Чтобы «количество» периодов осталось чётным, будем считать крайние периоды за полпериода.

$$\tilde{Y}_t = \frac{\frac{1}{2}Y_{t-\frac{n}{2}} + Y_{t-\frac{n}{2}+1} + \dots + Y_t + \dots + Y_{t+\frac{n}{2}-1} + \frac{1}{2}Y_{t+\frac{n}{2}}}{n}$$

При $n=2$ имеем:

$$\tilde{Y}_t = \frac{\frac{1}{2}Y_{t-1} + Y_t + \frac{1}{2}Y_{t+1}}{2}$$

При $n=4$ - и т.п.

$$\tilde{Y}_t = \frac{\frac{1}{2}Y_{t-2} + Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1} + \frac{1}{2}Y_{t+2}}{4}$$

Метод скользящей средней - исходные уровни ряда заменяются средними величинами

Месяц	Стиральные машины	Трехчленные скользящие суммы	Трехчленные скользящие средние	Четырехчленные суммы	Четырехчленные скользящие
1	155	-	-	-	-
2	163	485	161,67	616	154,00
3	167	461	153,67	619	154,75
4	131	456	152,00	603	150,75
5	158	436	145,33	566	141,50
6	147	435	145,00	580	145,00
7	130	422	140,67	550	137,50
8	145	403	134,33	543	135,75
9	128	413	137,67	572	143,00
10	140	427	142,33	587	146,75
11	159	459	153,00	606	151,50
12	160	466	155,33	616	154,00
13	147	457	152,33	622	155,50
14	150	462	154,00		-
15	165		-		-

Четырехлетние скользящие средние (центрированные):

- 154,4
- 152.8;
- 146,2
- 143.3;
- 141.3;
- 136.7;
- 139.4;
- 144.0;
- 149,2;
- 152.8;
- 154,8

Аналитическое выравнивание (трендовая модель)

- определение основной проявляющейся во времени тенденции развития изучаемого явления
- Задачей является определение не только общей тенденции развития явления, но и некоторых недостающих значений как внутри периода, так и за его пределами (для прогнозирования).

Аналитическое выравнивание (трендовая модель)

- Способ определения неизвестных значений внутри динамического ряда называют интерполяцией. Эти неизвестные значения можно определить:
- 1) используя полусумму уровней, расположенных рядом с интерполируемыми;
- 2) по среднему абсолютному приросту;
- 3) по темпу роста.

Аналитическое выравнивание (трендовая модель)

- Способ определения количественных значений за пределами ряда называют **экстраполяцией**.

Экстраполирование используется для прогнозирования тех факторов, которые не только в прошлом и настоящем обуславливают развитие явления, но и могут оказать влияние на его развитие в будущем.

- Экстраполировать можно по средней арифметической, по среднему абсолютному приросту, по среднему темпу роста.

Аналитическое выравнивание заключается в нахождении уравнения, выражающего закономерность изменения явления как функцию времени $y = f(t)$.

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t.$$

где $f(t)$ - уровень, определяемый тенденцией развития;

ε_t - случайное и циклическое отклонение от тенденции.

Аналитическое выравнивание

линейная $f(t) = a_0 + a_1t$;

параболическая $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$,

экспоненциальные $f(t) = \exp(a_0 + a_1t)$

или $f(t) = \exp(a_0 + a_1t + a_2t^2)$.

Аналитическое выравнивание

- ✓ *Линейная зависимость - в исходном временном ряду наблюдаются более или менее постоянные абсолютные цепные приросты, не проявляющие тенденции ни к увеличению, ни к снижению.*
- ✓ *Параболическая зависимость - абсолютные цепные приросты обнаруживают некоторую тенденцию развития, но абсолютные цепные приросты абсолютных цепных приростов (разности второго порядка) никакой тенденции развития не проявляют.*
- ✓ *Экспоненциальные зависимости - в исходном временном ряду наблюдается более или менее постоянный относительный рост (устойчивость цепных темпов роста, темпов прироста, коэффициентов роста), либо, при отсутствии такого постоянства, - устойчивость в изменении показателей относительного роста (цепных темпов роста цепных же темпов роста, цепных коэффициентов роста цепных же коэффициентов или темпов роста и т. п.)*

Аналитическое выравнивание

Оценка параметров (a_0, a_1, a_2, \dots):

- 1) метод избранных точек,
- 2) метод наименьших расстояний,
- 3) метод наименьших квадратов (МНК).

Метод наименьших квадратов -обеспечивает наименьшую сумму квадратов отклонений фактических уровней от выравненных:

$$\min \sum (y_t - f(t))^2.$$

Для линейной зависимости $(f(t)=a_0+a_1t)$ параметр a_0 обычно интерпретации не имеет, но иногда его рассматривают как *обобщенный начальный уровень ряда*; a_1 - сила связи, т.е. *параметр, показывающий, насколько изменится результат при изменении времени на единицу.*

Способ наименьших квадратов дает систему двух нормальных уравнений для нахождения параметров уравнения

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum t = \sum y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum ty \end{cases}$$

где y – исходный уровень ряда динамики,
 n – число членов ряда,

t –показатель времени, который обозначается порядковыми номерами, начиная от низшего.

Решение системы уравнений позволяет получить выражения для параметров уравнения.

$$a_0 = \frac{\sum t^2 * \sum y - \sum t * \sum yt}{n \sum t^2 - \sum t * \sum t}$$

$$a_1 = \frac{n \sum ty - \sum t * \sum y}{n \sum t^2 - \sum t * \sum t}$$

С целью упрощения расчетов показателям времени t придают такие значения, чтобы их сумма была равна 0. Тогда уравнения параметров примут следующий вид:

показатель времени t

$$\sum t = 0$$

$$a_0 = \frac{\sum y}{n}$$

$$a_1 = \frac{\sum ty}{\sum t^2}$$

Производство молока в регионе, млн. т

1999	13,3
2000	13,5
2001	14,8
2002	16,1
2003	16,6

произведем выравнивание приведенных в табл. данных о производстве молока в регионе по уравнению прямой:

$$Y_t = a_0 + a_1 t.$$

- Первые две колонки - ряд динамики, подвергаемый выравниванию, дополняется колонкой, в которой показана система отсчета времени "t". Причем эта система выбирается таким образом, чтобы $t = 0$.

Метод наименьших квадратов (пример)

Год	Производство молока в регионе, млн. т.	Условные годы, t	Расчет параметров уравнения			Оценка модели	
			t ²	Y·t	Y _t	Y - Y _t	(Y-Y _t) ²
1999	13,3						
2000	13,5						
2001	14,8						
2002	16,1						
2003	16,6						
	74,3						

Метод наименьших квадратов (пример)

Год	Производство молока в регионе, млн. т.	Условные годы, t	Расчет параметров уравнения			Оценка модели	
			t ²	Y·t	Y _t	Y - Y _t	(Y-Y _t) ²
1999	13,3	-2					
2000	13,5	-1					
2001	14,8	0					
2002	16,1	1					
2003	16,6	2					
	74,3	0					

Метод наименьших квадратов (пример)

Год	Производство молока в регионе, млн. т.	Условные годы, t	Расчет параметров уравнения			Оценка модели	
			t ²	Y·t	Y _t	Y - Y _t	(Y-Y _t) ²
1999	13,3	-2	4				
2000	13,5	-1	1				
2001	14,8	0	0				
2002	16,1	1	1				
2003	16,6	2	4				
	74,3	0	10				

Метод наименьших квадратов (пример)

Год	Производство молока в регионе, млн. т.	Условные годы, t	Расчет параметров уравнения			Оценка модели	
			t ²	Y·t	Y _t	Y - Y _t	(Y-Y _t) ²
1999	13,3	-2	4	-26,6			
2000	13,5	-1	1	-13,5			
2001	14,8	0	0	0			
2002	16,1	1	1	16,1			
2003	16,6	2	4	33,2			
	74,3	0	10	9,2			

$$a_0 = \frac{74.3}{5} = 14.86$$

$$a_1 = \frac{9.2}{10} = 0.92$$

Таким образом, уравнение прямой примет вид:

$$f(t) = 14.86 + 0.92 * t$$

Метод наименьших квадратов (пример)

Год	Производство молока в регионе, млн. т.	Условные годы, t	Расчет параметров уравнения			Оценка модели	
			t ²	Y·t	Y _t	Y - Y _t	(Y-Y _t) ²
1999	13,3	-2	4	-26,6	13,02		
2000	13,5	-1	1	-13,5	13,94		
2001	14,8	0	0	0	14,86		
2002	16,1	1	1	16,1	15,78		
2003	16,6	2	4	33,2	16,7		
	74,3	0	10	9,2	74,3		

Метод наименьших квадратов (пример)

Год	Производство молока в регионе, млн. т.	Условные годы, t	Расчет параметров уравнения			Оценка модели	
			t ²	Y·t	Y _t	Y - Y _t	(Y-Y _t) ²
1999	13,3	-2	4	-26,6	13,02	0,28	
2000	13,5	-1	1	-13,5	13,94	-0,44	
2001	14,8	0	0	0	14,86	-0,06	
2002	16,1	1	1	16,1	15,78	0,32	
2003	16,6	2	4	33,2	16,7	-0,1	
	74,3	0	10	9,2	74,3	-	

Метод наименьших квадратов (пример)

Год	Производство молока в регионе, млн. т.	Условные годы, t	Расчет параметров уравнения			Оценка модели	
			t ²	Y·t	Y _t	Y - Y _t	(Y-Y _t) ²
1999	13,3	-2	4	-26,6	13,02	0,28	0,08
2000	13,5	-1	1	-13,5	13,94	-0,44	0,19
2001	14,8	0	0	0	14,86	-0,06	0,00
2002	16,1	1	1	16,1	15,78	0,32	0,10
2003	16,6	2	4	33,2	16,7	-0,1	0,01
	74,3	0	10	9,2	74,3	-	0,39

Параметры a_0 и a_1 можно исчислить иначе с помощью определителей:

- Расчет параметров a_0 и a_1 с помощью определителей. Обозначив годы t порядковыми номерами, определим эти величины и представим их значения в табл.

$$a_0 = \frac{\sum Y \cdot \sum t^2 - \sum Y \cdot t \cdot \sum t}{n \cdot \sum t^2 - \sum t \cdot \sum t}$$

$$a_1 = \frac{n \cdot \sum Y \cdot t - \sum Y \cdot \sum t}{n \cdot \sum t^2 - \sum t \cdot \sum t}$$

Метод наименьших квадратов (пример)

$$a_0 = \frac{55 * 74.3 - 15 * 232.1}{5 * 55 - 225} = 12.1$$

$$a_1 = \frac{5 * 232.1 - 15 * 74.3}{5 * 55 - 225} = 0.92$$

$$f(t) = 12.1 + 0.92 * t$$

Метод наименьших квадратов (пример)

Год	Производство молока в регионе, млн. т.	Условны е годы, t	Расчет параметров уравнения			Оценка модели	
			t^2	$Y \cdot t$	Y_t	$Y - Y_t$	$(Y - Y_t)^2$
1999	13,3	1					
2000	13,5	2					
2001	14,8	3					
2002	16,1	4					
2003	16,6	5					
	74,3	15					

Метод наименьших квадратов (пример)

Год	Производство молока в регионе, млн. т.	Условны е годы, t	Расчет параметров уравнения			Оценка модели	
			t	t ²	Y·t	Y _t	Y - Y _t
1999	13,3	1	1				
2000	13,5	2	4				
2001	14,8	3	9				
2002	16,1	4	16				
2003	16,6	5	25				
	74,3	15	55				

Метод наименьших квадратов (пример)

Год	Производство молока в регионе, млн. т.	Условны е годы, t	Расчет параметров уравнения			Оценка модели	
			t ²	Y·t	Y _t	Y - Y _t	(Y-Y _t) ²
1999	13,3	1	1	13,3			
2000	13,5	2	4	27			
2001	14,8	3	9	44,4			
2002	16,1	4	16	64,4			
2003	16,6	5	25	83			
	74,3	15	55	232,1			

$$a_0 = \frac{55 * 74.3 - 15 * 232.1}{5 * 55 - 225} = 12.1$$

$$a_1 = \frac{5 * 232.1 - 15 * 74.3}{5 * 55 - 225} = 0.92$$

$$f(t) = 12.1 + 0.92 * t$$

Метод наименьших квадратов (пример)

Год	Производство молока в регионе, млн. т.	Условны е годы, t	Расчет параметров уравнения			Оценка модели	
			t	t ²	Y·t	Y _t	Y - Y _t
1999	13,3	1	1	13,3	13,02		
2000	13,5	2	4	27	13,94		
2001	14,8	3	9	44,4	14,86		
2002	16,1	4	16	64,4	15,78		
2003	16,6	5	25	83	16,7		
	74,3	15	55	232,1	74,3		

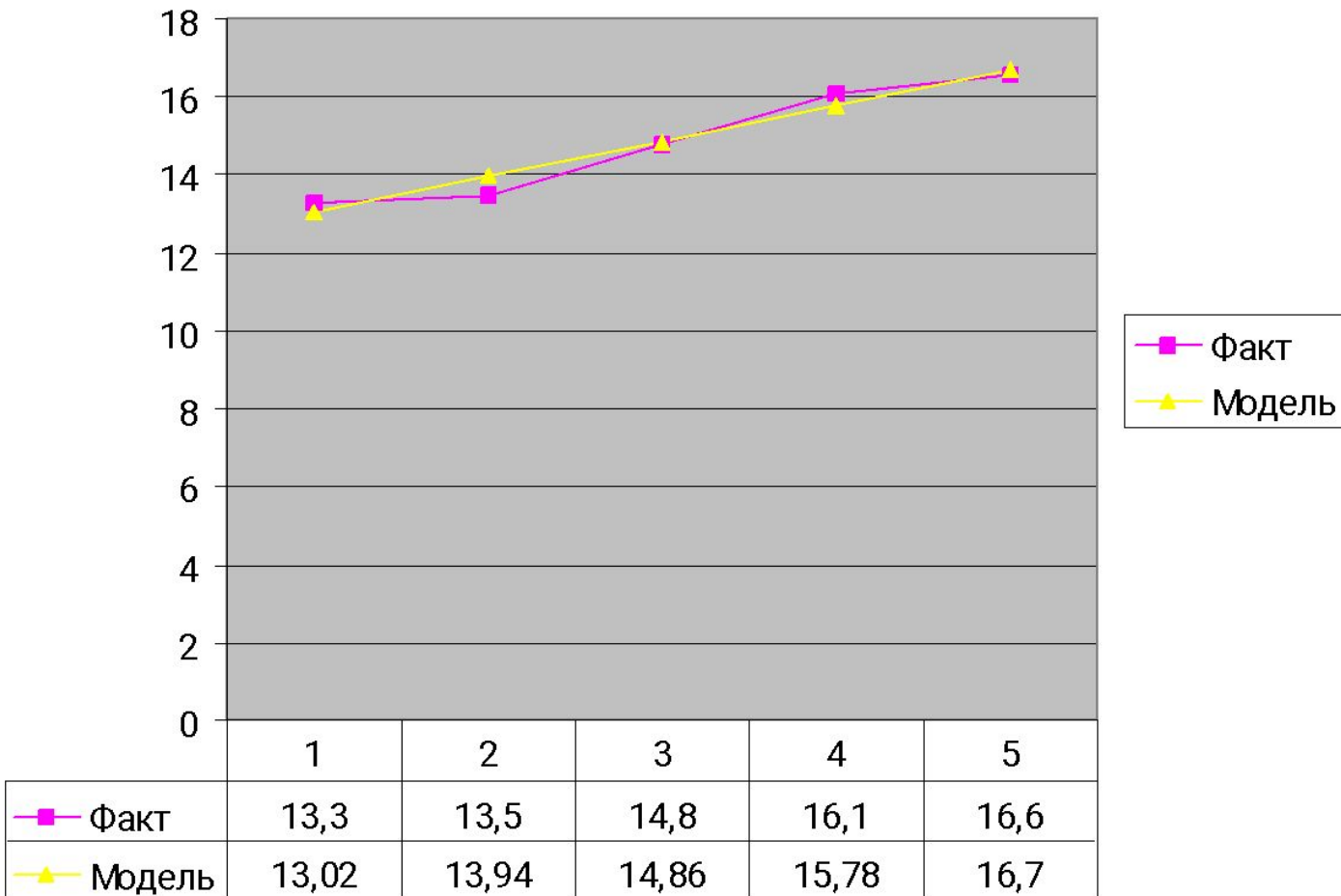
Метод наименьших квадратов (пример)

Год	Производство молока в регионе, млн. т.	Условны е годы, t	Расчет параметров уравнения			Оценка модели	
			t	t ²	Y·t	Y _t	Y - Y _t
1999	13,3	1	1	13,3	13,02	0,28	
2000	13,5	2	4	27	13,94	-0,44	
2001	14,8	3	9	44,4	14,86	-0,06	
2002	16,1	4	16	64,4	15,78	0,32	
2003	16,6	5	25	83	16,7	-0,1	
	74,3	15	55	232,1	74,3	-	

Метод наименьших квадратов (пример)

Год	Производство молока в регионе, млн. т.	Условны е годы, t	Расчет параметров уравнения			Оценка модели	
			t	t ²	Y·t	Y _t	Y - Y _t
1999	13,3	1	1	13,3	13,02	0,28	0,08
2000	13,5	2	4	27	13,94	-0,44	0,19
2001	14,8	3	9	44,4	14,86	-0,06	0,00
2002	16,1	4	16	64,4	15,78	0,32	0,10
2003	16,6	5	25	83	16,7	-0,1	0,01
	74,3	15	55	232,1	74,3	-	0,39

Метод наименьших квадратов (пример)



Метод наименьших квадратов (пример)

Для определения колеблемости рассчитывается показатель среднего квадратического отклонения:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum (y - \bar{y}_t)^2}{n}} = \sqrt{\frac{0.39}{5}} = 0.275 \text{ млн.т}$$

Относительной мерой колеблемости является коэффициент вариации:

$$v = \frac{\sigma_t}{\bar{y}} = \frac{0.275}{14.86} = 0.0185 \text{ или } 1,85\%$$

Метод наименьших квадратов (пример)

Год	1998	1999	2000	2001	2002	2003
t	- 5	- 3	- 1	1	3	5

При анализе рядов динамики важное значение имеет выявление сезонных колебаний.

Этим колебаниям свойственны более или менее устойчивые изменения уровней ряда по внутригодовым периодам.

Индекс сезонности – один из показателей измерения сезонных колебаний:

$$J_{сез} = \frac{y_i}{\bar{y}} * 100$$

Месяцы	Численность рабочих, чел.	Индекс сезонности, %
Январь	620	76,9%
Февраль	640	79,3%
Март	710	88,0%
Апрель	730	90,5%
Май	880	109,1%
Июнь	920	114,0%
Июль	990	122,7%
Август	980	121,5%
Сентябрь	970	120,2%
Октябрь	870	107,9%
Ноябрь	740	91,7%
Декабрь	630	78,1%
	9680	
Среднее	806,67	

Измерение сезонных колебаний

Месяцы	Число расторгнутых браков				Индекс сезонности, %
	2001	2002	2003	В среднем за 3 года	
Январь	195	158	144	165,67	122,4%
Февраль	164	141	136	147,00	108,6%
Март	153	153	146	150,67	111,3%
Апрель	136	140	132	136,00	100,5%
Май	136	136	136	136,00	100,5%
Июнь	123	129	125	125,67	92,8%
Июль	126	128	124	126,00	93,1%
Август	121	122	119	120,67	89,1%
Сентябрь	118	118	118	118,00	87,2%
Октябрь	126	130	128	128,00	94,5%
Ноябрь	129	131	135	131,67	97,3%
Декабрь	138	141	139	139,33	102,9%
	1665	1627	1582	1624,67	1200,0%
<i>Средний уровень</i>	<i>138,75</i>	<i>135,58</i>	<i>131,83</i>	<i>135,39</i>	<i>100,0%</i>

Индекс сезонности

- Может применяться для прогнозирования сбыта товаров сезонного спроса.
- Под сезонным спросом понимаются циклические (повторяющиеся ежегодно) колебания объемов потребления товаров. Эти колебания могут быть связаны со временем года, погодой или календарной датой (Новый год, 8 марта).
- Индекс сезонности показывает, на сколько процентов отклоняется товарооборот данного месяца (квартала) от среднемесячной (квартальной) величины под влиянием факторов сезонного характера.

Индексы сезонности можно использовать для прогнозирования и планирования товарооборота на очередной год.

- Рассчитав прогнозный среднемесячный объем продаж товара и умножив его на соответствующие индексы сезонности, получаем прогнозные объемы реализации по месяцам.