

# Чистый сдвиг и свободное кручение

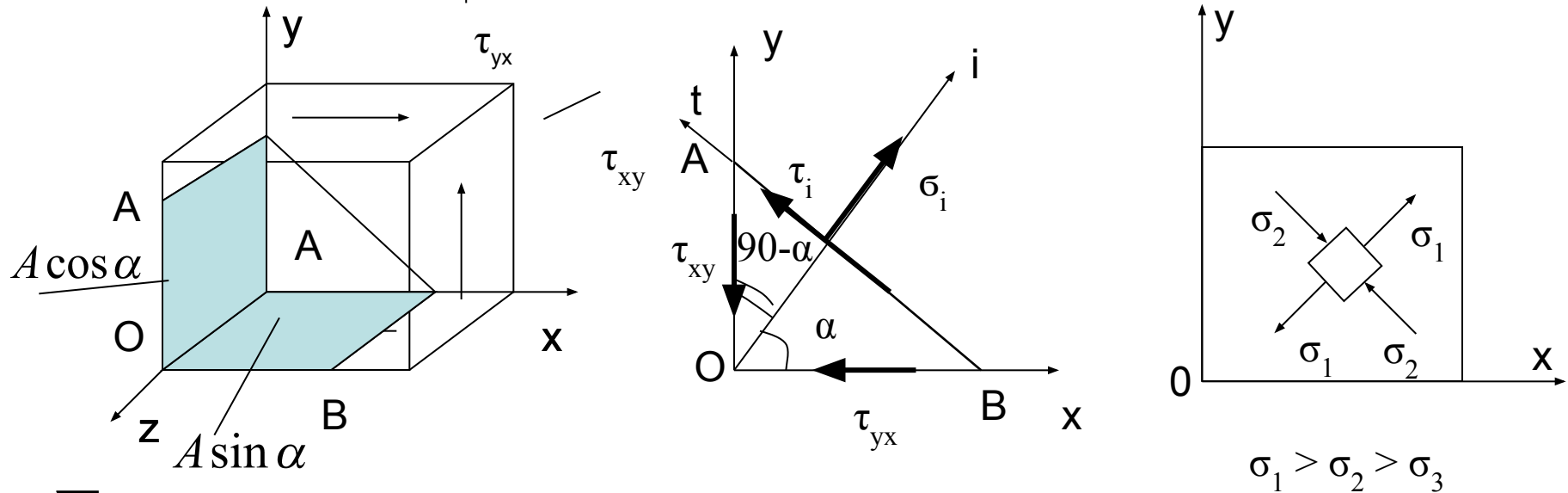
Доцент кафедры  
самолетостроения  
к.т.н. Мухин Д.В.

# 1. Анализ напряженного состояния при чистом сдвиге

**Чистым сдвигом** называется напряженное состояние, в котором отличными от нуля будут только одни касательные компоненты напряженного состояния

Равенство моментов относительно центра площади  $\Delta$  в плоскости сдвига

Площади  $\Delta$  в равной плоскости связаны с площадью  $i$  горизонтальной и вертикальной площадок соотношениями



$$\sum i = \sigma_i A - \tau_{xy} A \cos \alpha \sin \alpha - \tau_{yx} A \sin \alpha \cos \alpha = 0;$$

$$\sigma_i = \tau_{xy} \sin 2\alpha.$$

$$\sum t = \tau_i A - \tau_{xy} A \cos^2 \alpha + \tau_{xy} A \sin^2 \alpha = 0;$$

$$\tau_i = \tau_{xy} \cos 2\alpha.$$

$$\sigma_1 = \tau_{xy}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau_{xy}$$

# Закон Гука при чистом сдвиге

Так как нормальные компоненты тензора напряжений равны нулю, то:

$$\begin{cases} \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \\ \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \end{cases} \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

## Потенциальная энергия при чистом сдвиге

Рассмотри элемент размером  $a \times a \times 1$ . Горизонтальная сила  $Q = \tau \cdot a \cdot 1$  совершает работу на перемещении  $\Delta = \gamma \cdot a$ . Работа равна:

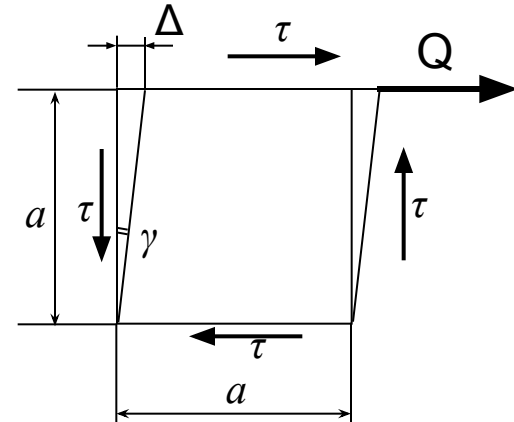
$$A = \frac{1}{2} T \cdot \Delta = \frac{1}{2} \tau \gamma a^2$$

Отнесем численно равную работе энергию деформации к единице объема:

$$u = \frac{A}{a^2 \cdot 1} = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} = \frac{1}{2} G \gamma^2$$

$u$  – плотность энергии деформации или удельная потенциальная энергия деформации при чистом сдвиге.

Полная энергия деформации:  $U = \int_V u dV$



## 2. Расчеты соединений, работающих на сдвиг

### Заклепочные соединения

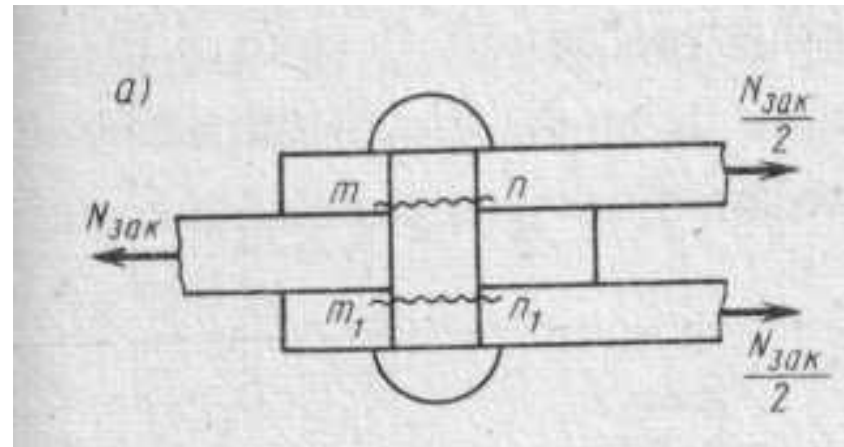
На рис. показана работа одиночной заклепки, соединяющей три листа. Одним из видов разрушения является срез заклепки по сечениям  $m-n$  и  $m_1-n_1$  (отсюда название заклепки – «двухсрезная»). Площадь среза:

$$A_{CP} = i * \frac{\pi d^2}{4}; i - \text{число плоскостей среза.}$$

В момент текучести приблизительно можно считать, что касательные напряжения в этих сечениях распределены равномерно. Тогда условие прочности заклепки на срез будет иметь вид:

$$\tau_{CP} = \frac{N_{ЗАК}}{A_{CP}} \leq [\tau]_{CP}$$

$N_{ЗАК}$  – сила действующая на одну заклепку,  $[\tau]_{CP}$  – максимально допустимое касательное напряжение на срез.



Помимо среза при относительно тонких листах возможно нарушение соединения вследствие смятия листов или заклепки по поверхности их контакта. Фактическое распределение контактных напряжений весьма сложно. Поэтому вычисляются условные напряжения смятия, отнесенные к площади  $A$  являющейся проекцией фактической криволинейной площади на плоскость диаметрального сечения заклепки.

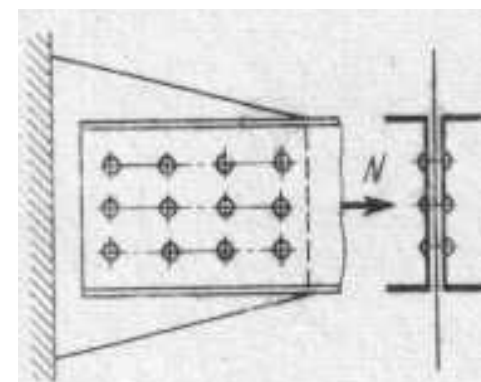
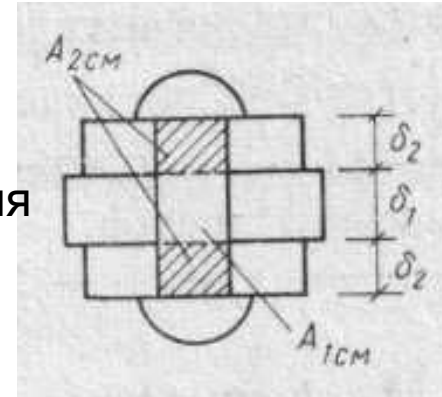
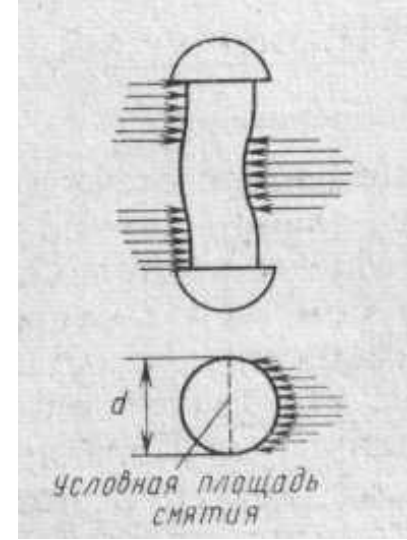
Условие прочности:

$$\sigma_{CM} = \frac{N_{ЗАК}}{A_{CM}} = \frac{N_{ЗАК}}{\delta_i d} \leq [\sigma]_{CM}$$

$[\sigma]_{CM}$  – предельное напряжение заклепки (листа) на смятие (определяется исходя из предела текучести). Расчет делают для заклепки и каждого листа.

Расчет заклепочного соединения обычно состоит в определении необходимого числа заклепок  $n$  при действии на соединение заданного расчетного усилия  $N$ . В упругой стадии это усилие неравномерно распределяется между заклепками. Однако в предельном состоянии благодаря деформациям текучести усилия в заклепках выравниваются. Поэтому сделаем допущение: сила  $N$  распределяется между всеми заклепками поровну. Тогда

$$n = \frac{N}{N_{ЗАК}}$$



# Сопротивление материалов

## Раздел: Сдвиг и кручение

### Расчет простейших соединений

В основе расчета лежат условия прочности

на растяжение 
$$\sigma_{\text{раст}} = \frac{F}{A_{\text{раст}}} \leq [\sigma_{\text{раст}}] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{n}$$

на срез 
$$\tau_{\text{среза}} = \frac{F}{A_{\text{среза}}} \leq [\tau_{\text{среза}}] \approx (0,5 - 0,6) [\sigma_{\text{раст}}]$$

на смятие 
$$\sigma_{\text{смят}} = \frac{F}{A_{\text{смят}}} \leq [\sigma_{\text{смят}}] \approx 2 [\sigma_{\text{раст}}]$$

Форма условия прочности во всех случаях расчета одинакова. Оно приобретает вид равенства, так как Mathcad не выполняет численных расчетов с неравенствами.

Для решения равенства используется функция **root**, которая требует подстановки выражения, равного нулю, поэтому вместо условия прочности

$$\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma]$$

используется выражение

$$\sigma_{\text{max}} - [\sigma] = 0$$

$$F := N \quad \epsilon_f := 10^3 \cdot f \quad i := m \quad \ddot{i} := 0.001 \cdot i \quad \ddot{m} := 0.01 \cdot i \quad \ddot{l} := 10^6 \cdot \frac{f}{i^2}$$

## Исходные данные

### Нагрузка

$$F := 10 \cdot \epsilon_f$$

$$[\sigma_{\text{раñò}}] := 100 \cdot \ddot{l}$$

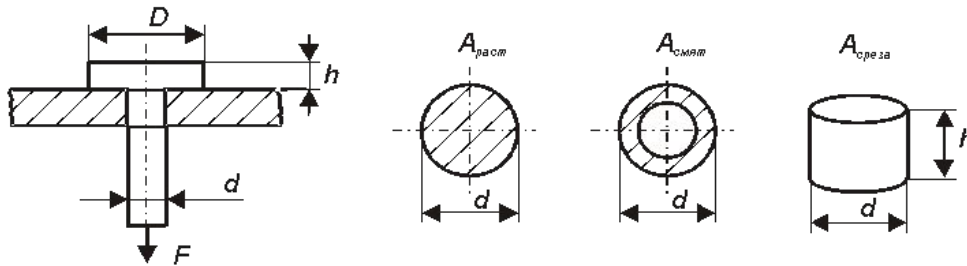
$$[\sigma_{\text{ñò}}] := 200 \cdot \ddot{l}$$

$$[\tau_{\text{ñàçà}}] := 50 \cdot \ddot{l}$$

### Допускаемые напряжения

Вычисление размеров сечений путем решения условия прочности с помощью функции **root**

### Расчет винтов (тяг)



### Расчет на растяжение

$$A(d) := \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$d := 1 \cdot \ddot{m}$$

$$d := \text{root} \left( \frac{F}{A(d)} - [\sigma_{\text{раñò}}, d \right)$$

$$d = 11.284 \ddot{i}$$

### Расчет на срез

$$A(h) := \pi \cdot d \cdot h$$

$$h := 1 \cdot \ddot{m}$$

$$h := \text{root} \left( \frac{F}{A(h)} - [\tau_{\text{ñàçà}}, h \right)$$

$$h = 5.642 \ddot{i}$$

### Расчет на смятие

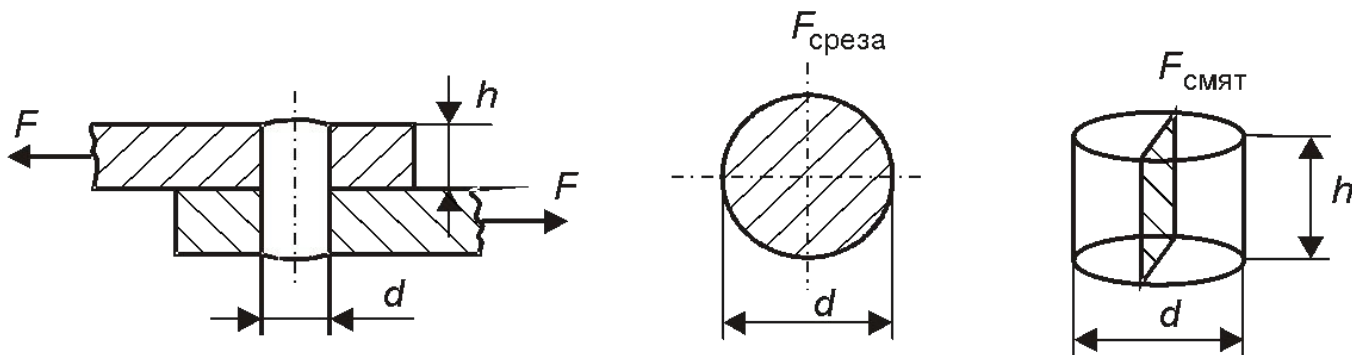
$$A(D) := \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$D := 15 \ddot{i}$$

$$D := \text{root} \left( \frac{F}{A(D)} - [\sigma_{\text{ñò}}, D \right)$$

$$D = 13.82 \ddot{i}$$

## Расчет заклепки (штифта)



### Расчет на срез

$$A(d) := \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$d := 1 \cdot \tilde{n}$$

$$d := \text{root} \left( \frac{F}{A(d)} - [\tau_{\text{н\ddot{a}çä}], d \right)$$

$$d = 15.958 \text{ мм}$$

### Расчет на смятие

$$A(h) := h \cdot d$$

$$h := 0.1 \cdot \tilde{n}$$

$$h := \text{root} \left( \frac{F}{A(h)} - [\sigma_{\text{н\ddot{u}ö}], h \right)$$

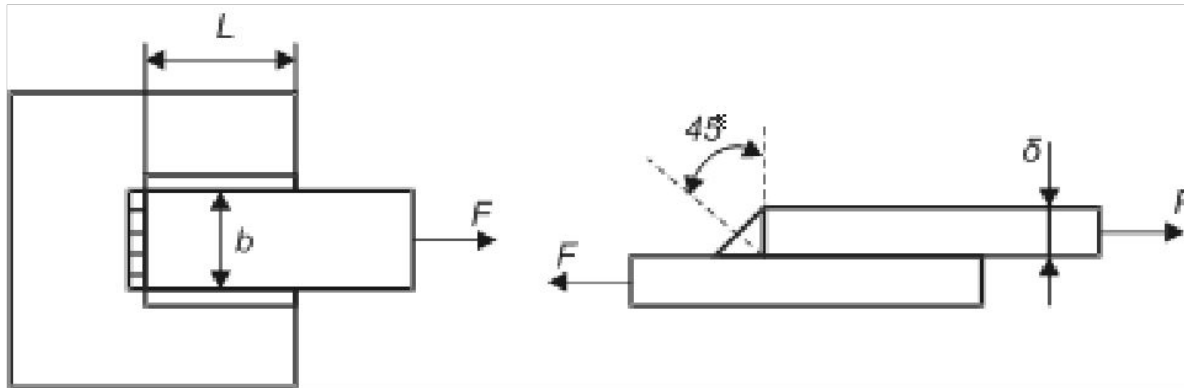
$$h = 3.133 \text{ мм}$$



## Расчет сварного шва

$$\delta := 5 \cdot \text{mm}$$

$$F := 100 \text{ kN}$$



## Расчет пластины на разрыв

$$b := 1 \cdot \text{mm}$$

$$b := \text{root} \left( \frac{F}{A(b)} - [\sigma_{\text{разр}}], b \right)$$

$$A(b) := b \cdot \delta$$

$$b = 200 \text{ mm}$$

## Расчет на срез сварного шва

$$L := 1 \cdot \text{mm}$$

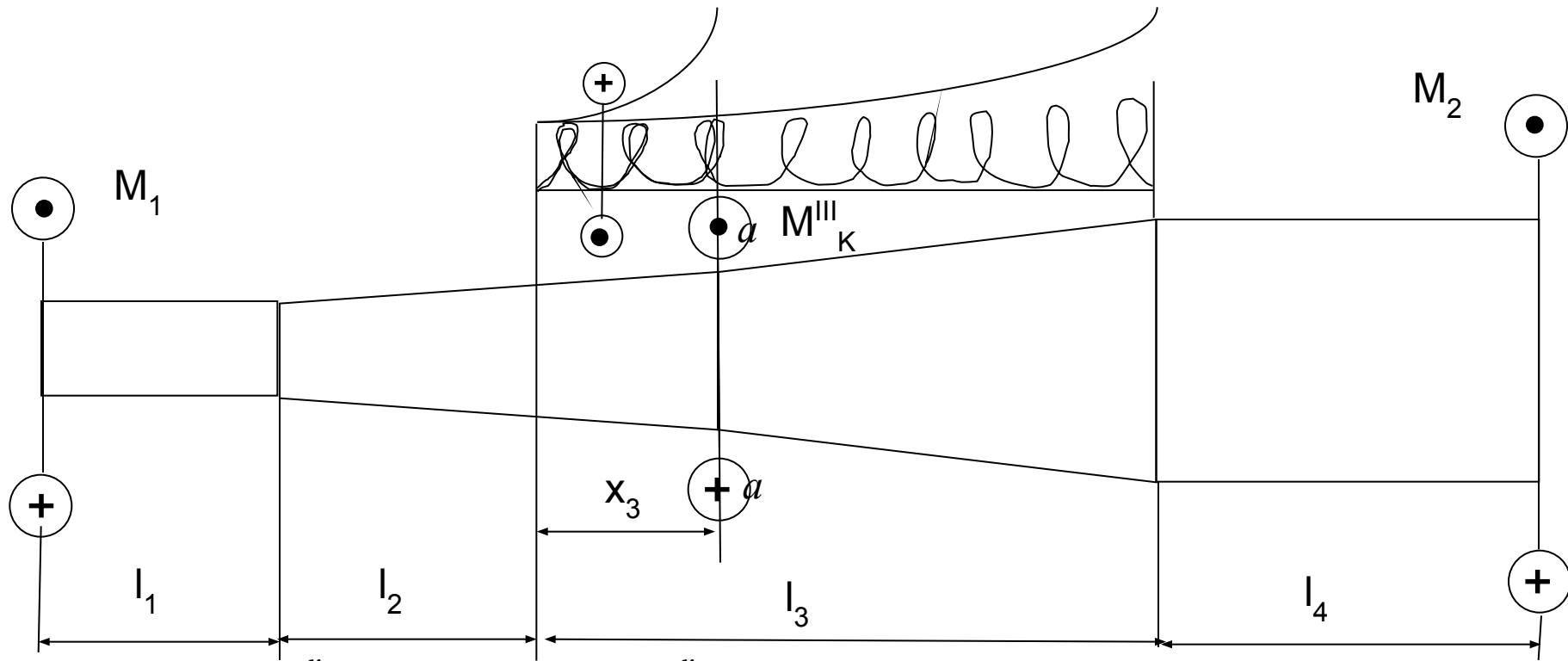
$$L := \text{root} \left( \frac{F}{A(L)} - [\tau_{\text{срез}}], L \right)$$

$$A(L) := \delta \cdot \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) \cdot (2 \cdot L + b)$$

$$L = 182.843 \text{ mm}$$

# 3. Кручение стержней

**Кручением** называется деформация стержня, нагруженного парами сил, плоскости действия которых перпендикулярны его продольной оси.



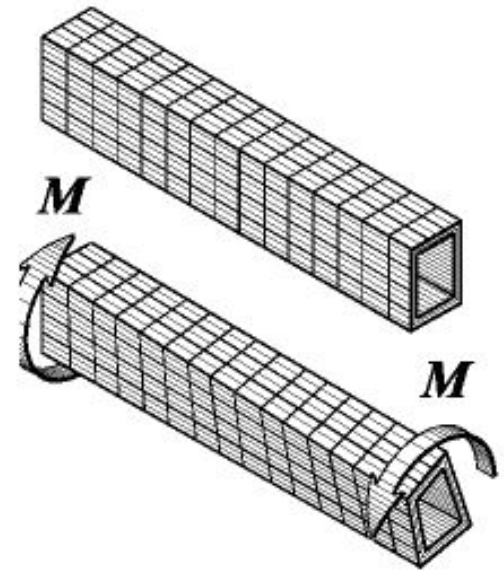
$$\sum m_x = M_1 - \int_0^{x_3} m dx + M_K^{III} = 0, \quad \int_0^{x_3} m dx = \Omega_{x_3} \Rightarrow M_K^{III} = -M_1 + \Omega_{x_3}$$

$$M_K = \sum_{\text{лев}} M_i + \sum_{\text{лев}} \Omega_i = \sum_{\text{прав}} M_m + \sum_{\text{прав}} \Omega_m$$

Принимаем предположения, которые подтверждаются решением задачами о кручении методами теории упругости:

1. При кручении стержней кольцевого сечения поперечные сечения стержня поворачиваются друг относительно друга около прямой, называемой **осью кручения** (в дальнейшем ось  $x$ ), как недеформирующиеся в своей плоскости (жесткие) диски. Это предположение называют гипотезой жесткости сечения в своей плоскости. Точка пересечения оси кручения с поперечным сечением называется **центром кручения**. Угол поворота произвольного поперечного сечения стержня, как жесткого целого, относительно сечения, принятого за неподвижное, будем обозначать  $\varphi = \varphi(x)$  и называть **углом закручивания**, а через  $\varphi_{j-i}$  будем обозначать угол закручивания сечения  $j$  относительно сечения  $i$ .
2. Точки поперечного сечения любой формы, за исключением кольцевой, неодинаково перемещаются в направлении оси кручения, за счет чего оно превращается в некоторую поверхность (депланирует).

3. Если точки поперечного сечения могут свободно перемещаться в направлении оси кручения, то кручение называется **свободным**, в противном случае оно называется **стесненным**. При свободном кручении в поперечных сечениях стержня возникают только касательные силы упругости, а следовательно, только касательные напряжения.



Максимальное касательное напряжение в сечении любой формы при кручении всегда определяется по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_k}$$

где  $W_K$  - момент сопротивления сечения кручению, величина которого зависит от его формы и размеров.

Погонным углом закручивания называется производная от  $\varphi$  по  $x$   $\theta = \frac{d\varphi}{dx}$

Как увидим в дальнейшем, всегда  $\theta = \frac{M_K}{GI_K}$  следовательно:

$$\varphi = \int_0^{x_i} \frac{M_K}{GI_K} dx + \varphi_{i-0}$$

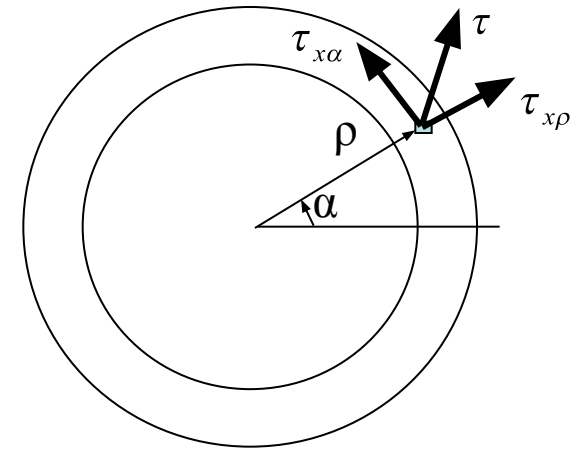
где  $\varphi_{i-0}$  — угол закручивания сечения, находящегося в начале участка относительно сечения, принимаемого за неподвижное;  $GI_K$  — жесткость сечения стержня при кручении;  $I_K$  — геометрическая характеристика жесткости, зависящая от размеров и формы сечения.

# 4. Кручение стержня кольцевого поперечного сечения

Для стержня кольцевого поперечного сечения справедлива гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений).

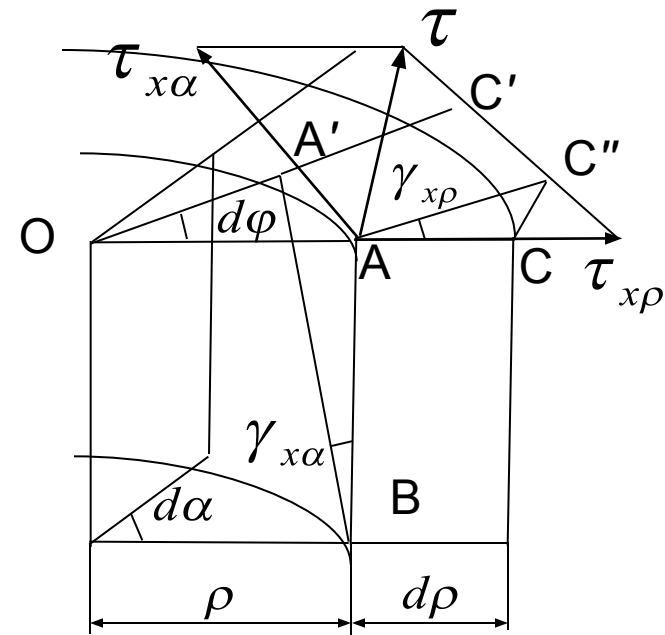
Предположим, что касательное напряжение в любой точке поперечного сечения с координатами  $\rho$ ,  $\alpha$  направлено произвольно по отношению к радиусу.

Разложим его на два компонента:  $\tau_{x\alpha}$  - нормальный к радиусу и  $\tau_{x\rho}$  — направленный по радиусу.



Рассмотрим деформацию элемента, вырезанного из бруса. Отрезок  $OA=OA'$  — из гипотезы жесткости сечения в своей плоскости;  $\gamma_{x\rho}=0$  — из гипотезы Бернулли (поперечное сечение остается плоским).

Но  $\tau_{x\rho}=G\gamma_{x\rho}$  — закон Гука при чистом сдвиге, поэтому  $\tau_{x\rho}=0$  и  $\tau=\tau_{x\alpha}$ .



Следовательно, **касательное напряжение в любой точке поперечного сечения перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку из центра вращения.** Таким образом, принятые гипотезы позволили установить направление  $\tau$  в любой точке поперечного сечения.

Найдем зависимость между  $\tau$  и  $\rho$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Из } \triangle OAA' \quad AA' = \rho d\varphi \\ \text{Из } \triangle BAA' \quad AA' = \gamma_{x\alpha} dx \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma_{x\alpha} = \frac{d\varphi}{dx} \rho = \theta \rho;$$

Из закона Гука:

$$\tau_{x\alpha} = G\gamma_{x\alpha} \Rightarrow \tau = G\theta\rho$$

Согласно определению крутящий момент – это равнодействующая касательных сил упругости, действующих в сечении

$$M_K = \iint_A \rho \tau dA = \iint_A G\theta\rho^2 dA = G\theta \iint_A \rho^2 dA$$

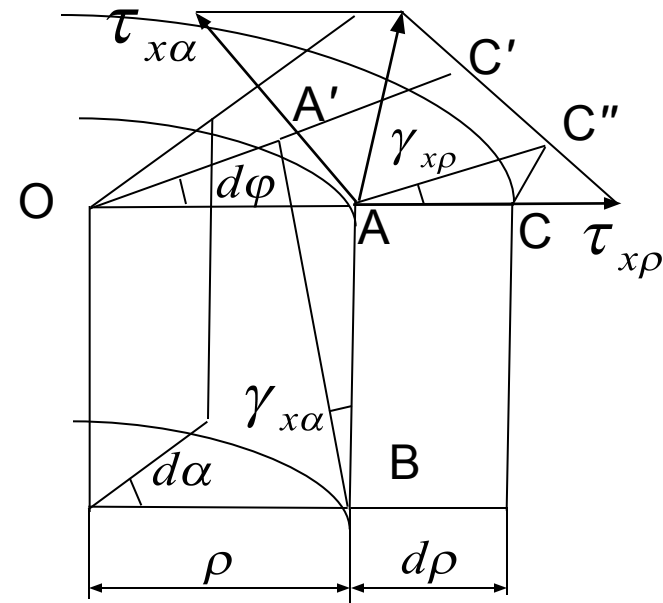
Интеграл - полярный момент инерции  $I_p = \iint_A \rho^2 dA$

Таким образом:  $\theta = \frac{M_K}{GI_p}$  т.е. для стержней кольцевого сечения  $I_K = I_p$

Сопоставляя

$$\left. \begin{array}{l} \theta = \frac{M_K}{GI_p} \\ G\theta = \frac{\tau}{\rho} \end{array} \right\} \Rightarrow \tau = \frac{M_K}{I_p} \rho$$

Формула для определения значений касательных напряжений в любой точке сечения.



Касательные напряжения в поперечном сечении изменяются вдоль радиуса по линейному закону, достигая максимума в точках наружного контура сечения.

$$\rho_{\max} = \frac{d}{2} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{M_k d}{2I_p}, W_k = \frac{2I_p}{d}$$

Для определения  $I_k$  и  $W_k$  вычислим  $I_p$  для кольца:

$$I_p = \iint_A \rho^2 dA = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{d_1/2}^{d/2} \rho^2 d\rho = \frac{\pi d^4}{32} - \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4) \cong 0,1d^4 (1 - c^4)$$

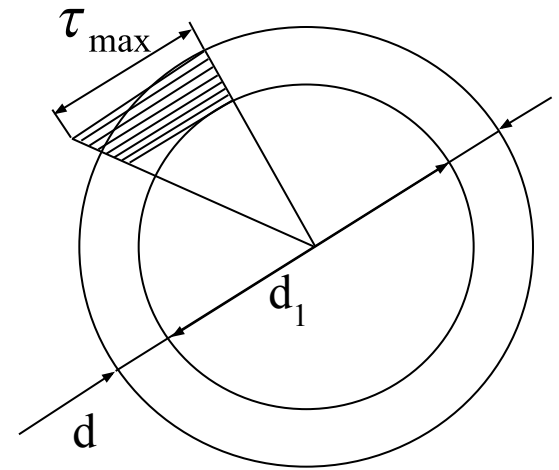
где  $c = d_1/d$

$$W_k = \frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4) \cong 0,2d^3 (1 - c^4)$$

Для круга  $c=0$

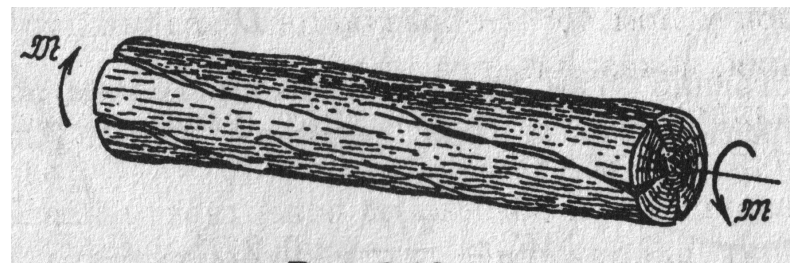
$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \cong 0,1d^4$$

$$W_k = \frac{\pi d^3}{16} \cong 0,2d^3$$

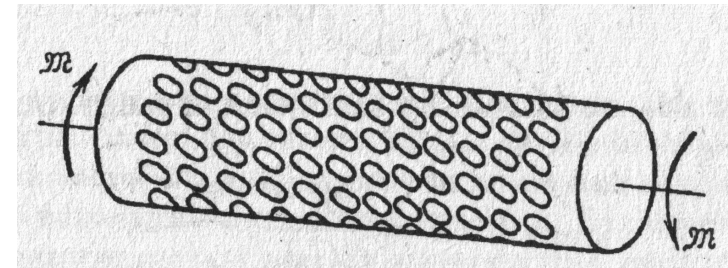
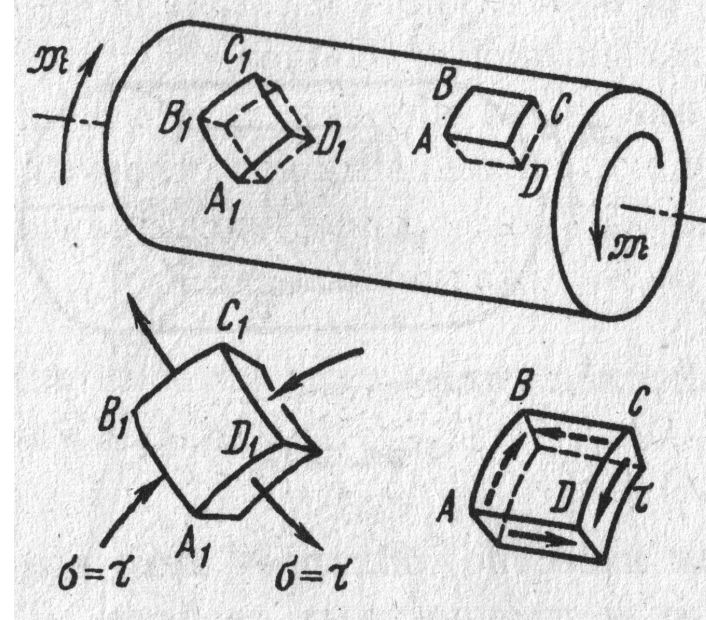


При кручении по свойству парности касательных напряжений будут существовать касательные напряжения в продольных сечениях бруса, распределенные по тому же закону.

Это приводит в частности к растрескиванию древесины вдоль волокон при кручении



Если двумя парами осевых и поперечных сечений выделить из закрученного стержня элемент **ABCD**, то на его гранях будут обнаружены только касательные напряжения. Следовательно, во всех точках стержня при кручении возникает состояние чистого сдвига. Здесь, однако, чистый сдвиг не будет однородным, поскольку значение  $\tau$  изменяется по радиусу поперечного сечения. Если изменить ориентацию сечений, повернув их в плоскости сдвига на  $45^\circ$ , то в новых площадках обнаруживаются только нормальные напряжения, имеющие одинаковое с  $\tau$  значение. При этом одно из них является растягивающим, а второе - сжимающим.



Наличие растягивающих и сжимающих напряжений в наклонных площадках при кручении можно наглядно проиллюстрировать следующим способом. На поверхности цилиндра, изготовленного из пластичного материала, краской нанести множество мелких кружочков. При закручивании бруса кружки превратятся в эллипсы с главными осями, направленными под углом  $45^\circ$  к образующим. По направлению больших осей эллипса произойдет удлинение, а вдоль малых осей - сжатие.



# Потенциальная энергия деформации при кручении

Внешние силы, создающие упругую деформацию стержня, совершают некоторую работу, которая накапливается в объеме материала стержня в виде потенциальной энергии деформации. Представим себе отрезок вала длиной  $dx$ , получивший угол закручивания  $d\varphi$  от момента  $M_K$ . Момент упруго возрастает пропорционально углу  $d\varphi$ . Поэтому работа этого момента, равная площади графика,

$$dA = \frac{1}{2} M_K d\varphi$$

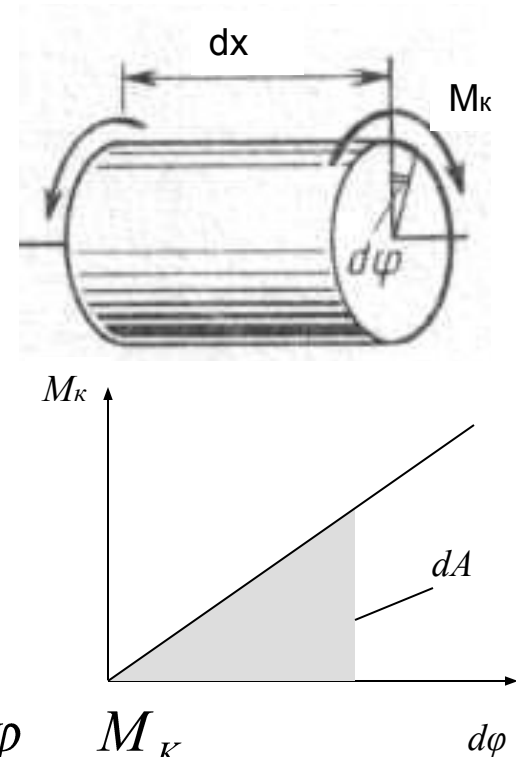
Энергия, накопленная в элементе стержня,  $dU = dA$ , или

$$dU = \frac{1}{2} M_K d\varphi = \frac{1}{2} \frac{M_K^2}{GI_K} dx$$

$$\text{(с учетом)} \quad \theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_K}{GI_K}$$

Заменяем  $M_K = \frac{d\varphi}{dx} GI_K$

Получаем  $dU = \frac{1}{2} GI_K \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx$



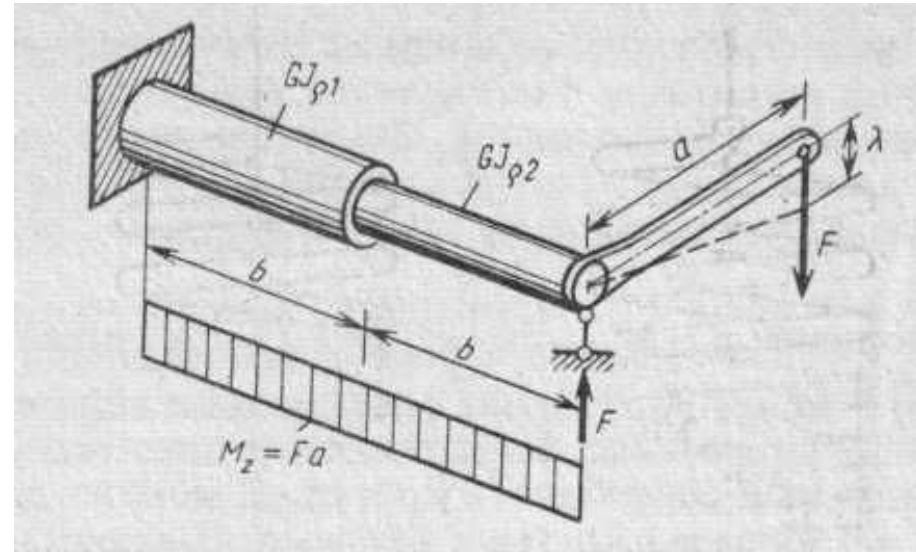
Интегрируя выражения для  $dU$  по длине стержня  $l$ , получим из выражения для энергии деформации  $U$ , выраженные через крутящие моменты  $M_K$  или через углы закручивания:

$$U = \int_0^l dU = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_K^2}{GI_K} dx \quad U = \int_0^l dU = \frac{1}{2} \int_0^l GI_K \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx$$

Оба эти выражения используются в расчетах

Рассмотрим пример:

Пусть требуется найти опускание  $\lambda$  точки приложения 1 силы  $F$ , передаваемой через абсолютно жесткий рычаг на 1 упругий ступенчатый вал. Составим равенство работы силы  $F$  на перемещении  $\lambda$  энергии деформации вала:



$$A = \frac{1}{2} F\lambda = U = \int_0^{2b} \frac{M_K^2 dz}{2GI_p} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(Fa)^2 b}{GI_{p1}} + \frac{(Fa)^2 b}{GI_{p2}} \right]$$

Отсюда найдем:

$$\lambda = Fa^2 b \left( \frac{1}{GI_{p1}} + \frac{1}{GI_{p2}} \right)$$

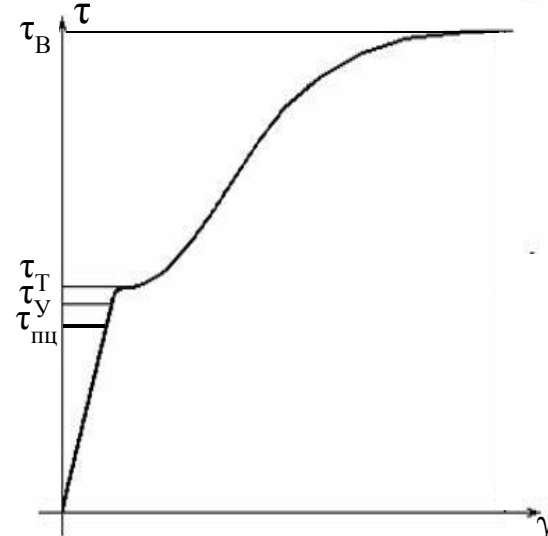
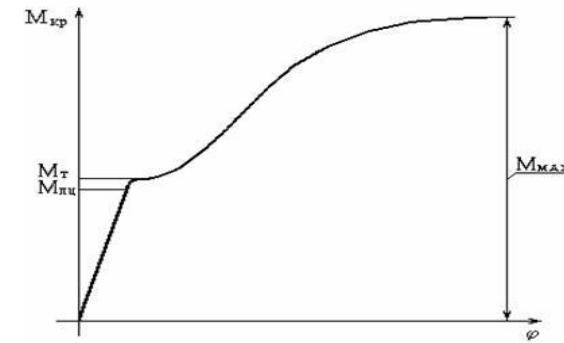
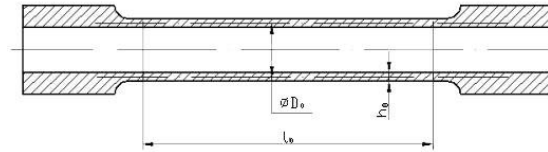
# 5. Результаты механических испытаний при кручении, расчеты на прочность и жесткость

Механические испытания на кручение проводят на тонкостенных трубчатых образцах, которые при кручении будут испытывать чистый однородный сдвиг, так как распределение напряжений по толщине их сечений в силу тонкостенности можно считать равномерным. По результатам испытаний такого образца строится диаграмма кручения — график зависимости  $M_K = M_K(\varphi)$ .

По диаграмме кручения, в свою очередь, строится диаграмма сдвига (характеристика материала при чистом сдвиге, диаграмма сдвига) — график зависимости  $\tau = \tau(\gamma)$ , в котором

$$\tau = \frac{M_K}{2\pi r^2 s}; \quad \gamma = \frac{\varphi d}{2l}$$

Все, что говорилось о диаграмме растяжения, а также о диаграмме напряжений и расчете на прочность при растяжении, можно перенести на чистый сдвиг, если заменить символы  $P$ ,  $\Delta l$ ,  $A$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $E$ ,  $EF$  соответственно на  $M_K$ ,  $\varphi$ ,  $W_K$ ,  $\tau$ ,  $\gamma$ ,  $G$ ,  $GJ_K$  за исключением явлений уменьшения площади сечения и образования шейки, которая при кручении отсутствует.



# Расчеты на прочность и жесткость при кручении

## Расчет на прочность

Условие прочности  
проектировочного расчета

$$|\tau_{\max}|_{\max} = \left| \frac{M_K}{W_K} \right|_{\max} \leq \frac{\tau_{np}}{[n]} = [\tau]$$

Условие прочности проверочного  
расчета

$$[n] = \frac{\tau_{np}}{|\tau_{\max}|_{\max}} > 1$$

Первый max относится к сечению,  
второй - к длине стержня.

За  $\tau_{np}$  для пластичного материала принимается  $\tau_T$  - предел текучести при сдвиге, а для хрупкого  $\tau_B$  - предел прочности при сдвиге.

Если для материала известны значения предельных характеристик при растяжении и сжатии, то экспериментальное определение  $\tau_T$  и  $\tau_B$  не является необходимым, так как  $\tau_T$  и  $\tau_B$  для него могут быть найдены по теориям прочности. Например, для пластичного материала, одинаково работающего на растяжение

$$\tau_T \cong 0,6\sigma_T$$

# Расчет на жесткость

## Условие жесткости

$$\theta_{\max} = \left| \frac{M_K}{GI_p} \right|_{\max} \leq [\theta]$$

$$\theta_{\max} = \left| \frac{180^0 M_K}{\pi GI_p} \right|_{\max} \leq [\theta]$$

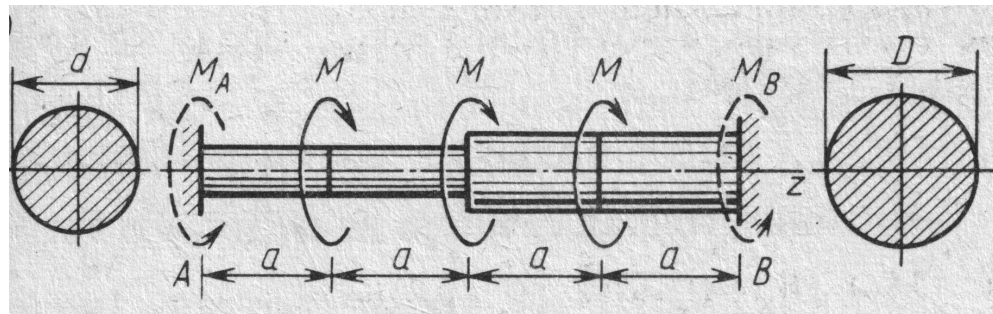
$\theta$  – в радианах/метр

$\theta$  – в градусах/метр

Допускаемый погонный угол закручивания  $[\theta]$  в изделиях общего машиностроения обычно принимают:  $[\theta]=2^{\circ}/\text{м}$  = при статической нагрузке,  $[\theta]=0,25^{\circ}/\text{м}$  — переменной нагрузке,  $[\theta] = 0,5^{\circ}/\text{м}$  - при ударной нагрузке.

В особых случаях требования могут возрасти (допустимый угол уменьшится).

Так же как и в случае задач на растяжение-сжатие, задачи на кручение могут быть статически определимыми и статически неопределимыми. Последние решаются при помощи составления уравнения совместности деформаций.

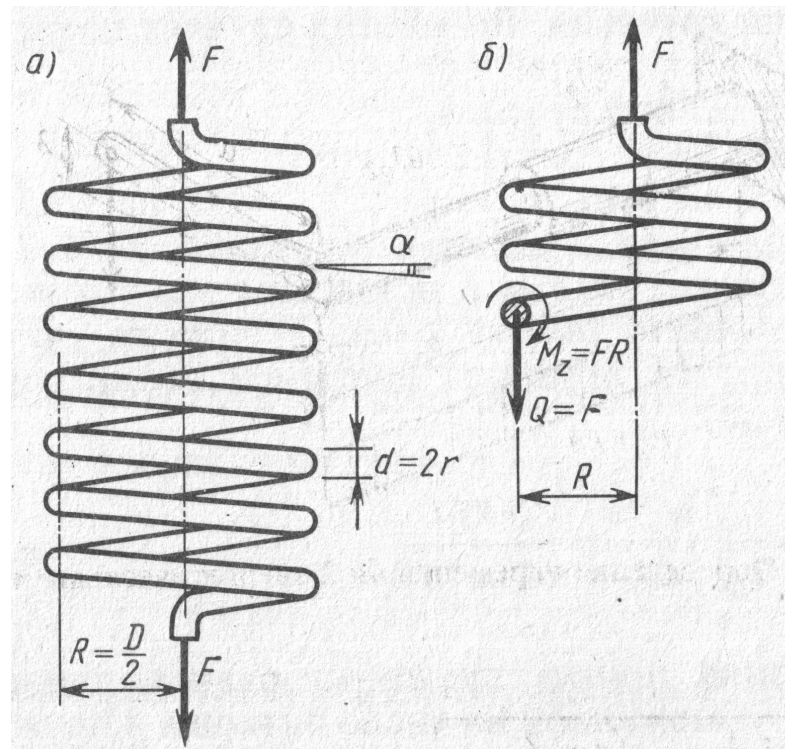


## 6. Расчет винтовых цилиндрических пружин

Чтобы установить к каким внутренним силовым факторам приводятся силы упругости в поперечном сечении витка пружины, разрезаем его плоскостью, проходящей через ось пружины, и рассматриваем равновесие верхней отсеченной части (рис. б). В силу малости  $\alpha$  сечение витка плоскостью можно считать поперечным (кругом диаметра  $d$ ).

Для равновесия отсеченной части силы упругости в поперечном сечении витка должны привести к

$$Q = F \quad \text{и} \quad M_z = FR$$



На рис. обозначены:

$D=2R$  — средний диаметр витков пружины;

$d=2r$  — диаметр проволоки;

$i$  — число рабочих витков;

$\alpha$  — угол подъема витка.

Распределение касательных напряжений по поперечному сечению от  $Q_y$  и  $M_k$  показаны на рис.

Опасной будет точка К, так как в ней касательные напряжения от  $Q_y$  и  $M_k$  достигают наибольших значений и оба направлены вниз.

Следовательно

$$\tau_{\max} = \tau_K = \tau_K^{Q_y} + \tau_K^{M_k}$$

Для кручения:

$$\tau_K^{M_k} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{FR}{\pi r^3/2} = \frac{2FR}{\pi r^3}$$

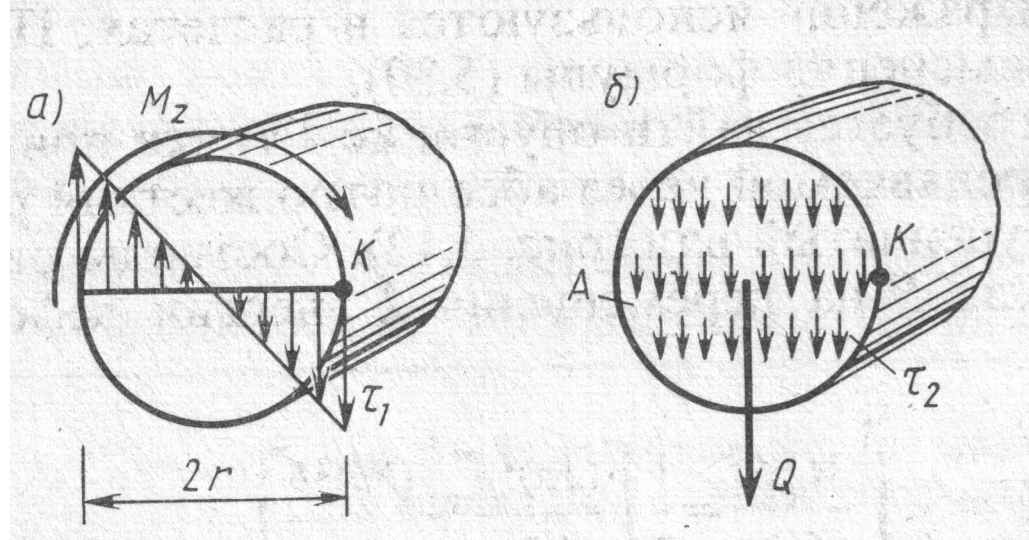
Здесь  $\beta = r/(2R)$

Для сдвига

$$\tau_K^{Q_y} = \frac{Q}{A} = \frac{F}{\pi r^2}$$

Второе слагаемое в скобках мало и им по сравнению с единицей можно пренебречь. Это означает, что мы пренебрегаем напряжением от  $Q_y$ , как малым по сравнению с напряжением от  $M_k$ , считая, что пружина испытывает только кручение. Тогда

$$\tau_{\max} = \frac{2FR}{\pi r^3}$$



Суммируем

$$\tau_{\max} = \tau_K^{Q_y} + \tau_K^{M_k} = \frac{F}{\pi r^2} + \frac{2FR}{\pi r^3} = \frac{2FR}{\pi r^3} (1 + \beta)$$

Важной характеристикой упругих свойств пружины является *жесткость пружины*  $c$  — так называется сила  $F$ , которая вызывает удлинение пружины  $\lambda=1$ . Для получения соотношения  $F$  и  $\lambda$  применим энергетический метод. Приравняем работу силы  $F$  энергии деформации кручения прутка пружины (энергией деформации среза пренебрегаем):

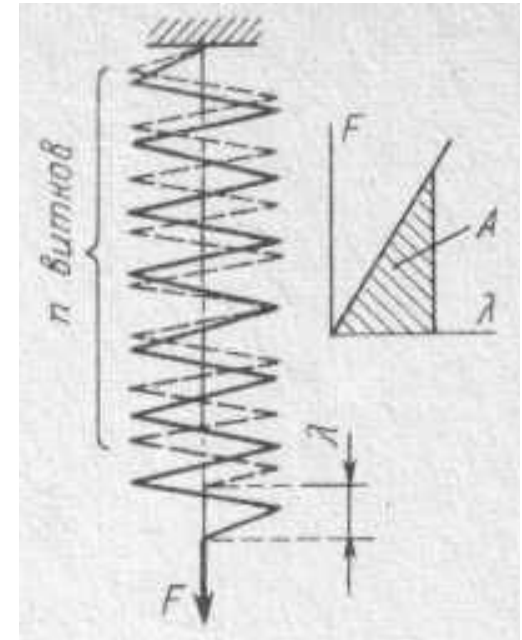
$$\frac{1}{2} F \lambda = U_{KP} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_z ds}{GI_p} = \frac{(FR)^2 l}{2G(\pi r^4/2)}$$

где  $l$  — длина прутка пружины, равная длине одного витка  $2\pi R$ , умноженной на число витков  $i$  в пружине, т. е.  $l=2\pi R i$ . Подставляя  $l$  в формулу, после сокращений окончательно получим:

$$\lambda = \frac{4FR^3 i}{Gr^4}$$

Полагая  $\lambda=1$ , найдем жесткость пружины  $c=F$  :

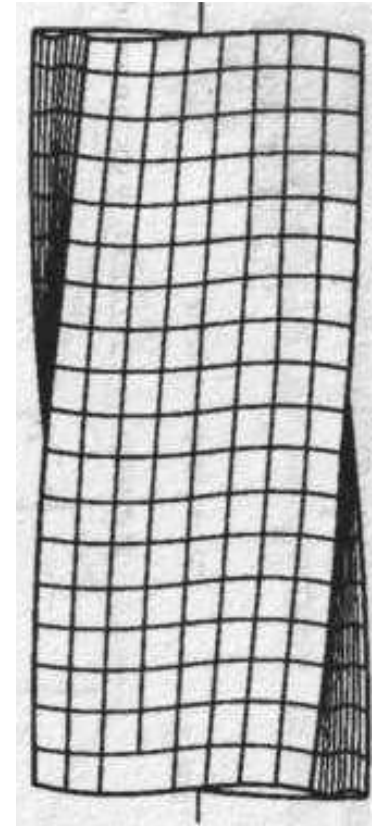
$$c = \frac{Gr^4}{4R^3 i}$$





## 7. Кручение стержней с некруглым поперечным сечением. Мембранная аналогия.

Определение напряжений в стержне с некруглым поперечным сечением представляет собой задачу, которая не может быть решена методами сопротивления материалов, так как для некруглого сечения упрощающая гипотеза неизменности плоских сечений, оказывается неприемлемой. Сечения заметно искривляются, в результате чего существенно меняется картина распределения по ним напряжений. На рис. в качестве примера показана форма закрученного стержня прямоугольного поперечного сечения, на поверхность которого предварительно была нанесена мелкая прямоугольная сетка.



Сетка деформировалась вместе с поверхностными частицами металла. Поперечные линии сетки заметно искривлены, следовательно, будут искривлены и поперечные сечения.

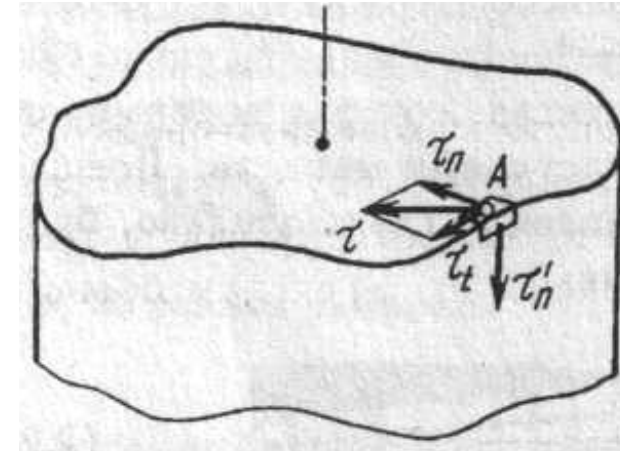
Таким образом, при определении углов сдвига необходимо учитывать не только взаимный поворот сечений, но также и местный перекося, связанный с их искривлением. Задача, кроме того, резко усложняется тем, что для некруглого сечения напряжения будут определяться в функции уже не одного независимого переменного ( $\rho$ ), а двух ( $y$  и  $z$ ).

Рассмотрим общие положения относительно законов распределения напряжений в поперечных сечениях некруглой формы, а затем приведем готовые формулы, полученные методами теории упругости для некоторых, наиболее часто встречающихся форм поперечных сечений.

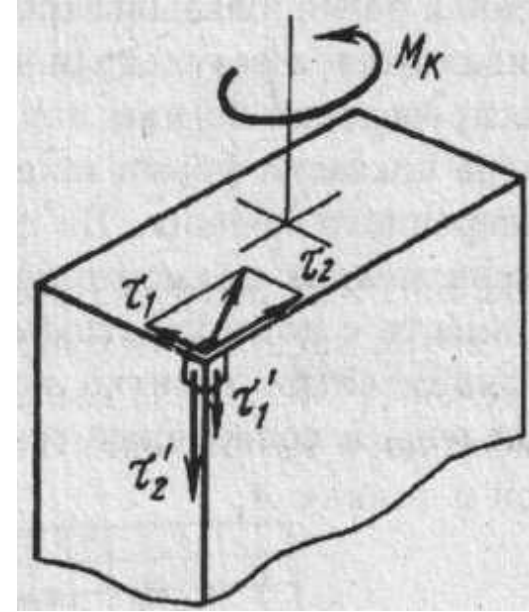
**Касательные напряжения в поперечных сечениях для точек, расположенных вблизи контура, направлены по касательной к дуге контура.**

Положим, что в точке А. касательное напряжение  $\tau$  вблизи контура направлено под некоторым углом к контуру. Разложим это напряжение на две составляющие - по касательной к контуру  $\tau_t$  и по нормали  $\tau_n$ . По условию парности на свободной поверхности стержня должно возникнуть касательное напряжение  $\tau'_n = \tau_n$ .

Но внешняя поверхность свободна от нагрузки и к ней никаких внешних сил не приложено. Таким образом,  $\tau'_n = 0$ . Следовательно и  $\tau_n = 0$ , и касательное напряжение  $\tau$  вблизи контура направлено по касательной к контуру.



**Если поперечное сечение имеет внешние углы, то в них касательные напряжения обращаются в нуль.**  
 Раскладывая напряжение  $\tau$  вблизи угла на две составляющие по нормальям к сторонам угла, получаем напряжения  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Так как парные им напряжения  $\tau'_1$  и  $\tau'_2$  равны нулю, то в нуль обращаются и напряжения  $\tau_1$  и  $\tau_2$ .  
 Значит, вблизи внешнего угла касательные напряжения в поперечном сечении отсутствуют



На рис. показана полученная методами теории упругости эпюра касательных напряжений для бруса прямоугольного сечения. В углах, как видим, напряжения равны нулю, а наибольшие напряжения возникают по серединам больших сторон в точках А

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_K}{\alpha ab^2}$$

в точках В

$$\tau_B = \eta \tau_{\max}$$

где  $a$  - большая, а  $b$  - малая сторона прямоугольника.  
 Коэффициенты  $\alpha$  и  $\eta$  зависят от отношения сторон  $a/b$

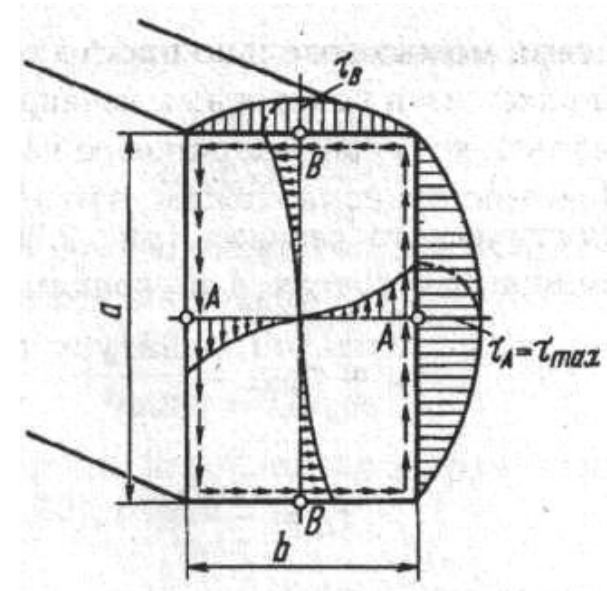


Таблица 2.1. Значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\eta$

## Значения коэффициентов $\alpha$ , $\beta$ и $\eta$

$a/b$	$\alpha$	$\beta$	$\eta$		$a/b$	$\alpha$	$\beta$	$\eta$
1	0,208	0,141	1,00		4	0,282	0,281	0,745
1,5	0,231	0,196	0,859		6	0,299	0,299	0,743
1,75	0,239	0,214	0,82		8	0,307	0,307	0,742
2	0,246	0,229	0,795		10	0,313	0,313	0,742
2,5	0,258	0,249	0,766		∞	0,333	0,333	0,742
3	0,267	0,263	0,753					

Угловое перемещение для прямоугольного сечения

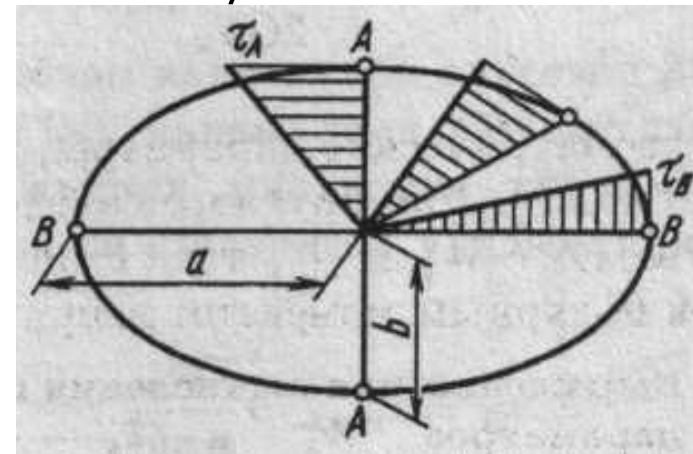
$$\varphi = \frac{Ml}{G\beta b^3 a}$$

Для **эллиптического сечения** наибольшие напряжения возникают в точках А по концам малой оси:

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{2M_K}{\pi a b^2}$$

в точках В

$$\tau_B = \frac{2M_K}{\pi b a^2}$$



Угловое перемещение для стержня эллиптического сечения имеет следующее выражение:

$$\varphi = \frac{Ml}{G \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}}$$

Для сечения, имеющего форму **равностороннего треугольника** со сторонами  $a$ , наибольшие напряжения возникают по серединам сторон и равны

$$\tau_{\max} = \frac{20M_K}{a^3}$$

Угловое перемещение в этом случае:

$$\varphi = \frac{Ml}{G \frac{\sqrt{3}}{80} a^4}$$

Обобщая все эти формулы, можно отметить, что при кручении

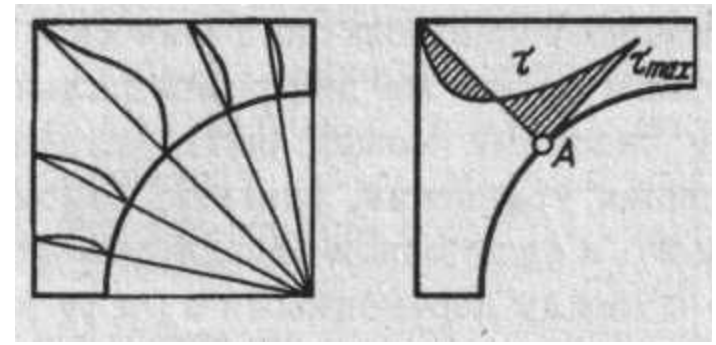
$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K}; \quad \varphi = \frac{Ml}{GI_K}; \quad M_K = GI_K \theta; \quad U = \int_0^l \frac{M_K dx}{2GI_K}$$

# Краткие сведения о пленочной (мембранной) аналогии

В результате того, что аналитическое решение задачи о кручении стержня с некруглым поперечным сечением является достаточно сложным, возникла необходимость создания косвенных методов исследования этого вопроса. Среди таких методов первое место занимает *метод аналогий*.

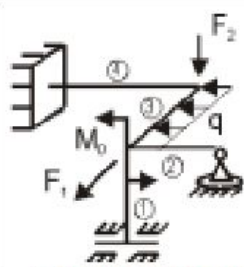
В задачах механики часто встречаются случаи, когда решения совершенно различных по физической сущности задач сводятся к одним и тем же дифференциальным уравнениям. Тогда между задачами может быть установлена аналогия. Можно, не решая уравнения, сказать, например, что между переменными  $x_1$  и  $y_1$  из одной задачи существует та же зависимость, что и между переменными  $x_2$  и  $y_2$  из другой задачи. Тогда говорят, что переменная  $x_2$  является аналогом переменной  $x_1$ , а  $y_2$  - аналогом переменной  $y_1$ . Часто бывает так, что в первой задаче, не решая уравнений, трудно представить себе связь между переменными  $x_1$  и  $y_1$ , а физическое содержание второй задачи допускает простое и наглядное толкование зависимости  $x_2$  от  $y_2$ . В таком случае установленная аналогия дает возможность наглядно представить себе закономерности, существующие в первой задаче. Так, в частности, обстоит дело с задачей о кручении. Оказывается, что, независимо от формы исследуемого сечения, задача о кручении стержня сводится к тому же дифференциальному уравнению, что и задача о равновесии пленки, натянутой по контуру того же очертания и нагруженной равномерно распределенным давлением. Аналогом напряжения является угол, который составляет касательная к поверхности пленки с плоскостью контура, а аналогом крутящего момента - объем, заключенный между плоскостью контура и поверхностью пленки.

Характер деформации пленки под действием давления можно всегда представить себе, если не точно, то, во всяком случае, ориентировочно. Следовательно, всегда имеется возможность представить и закон распределения напряжений при кручении стержня с заданной формой сечения.



Положим, например, что нужно установить закон распределения напряжений в сечении, показанном на рисунке. Представим себе, что на заданный контур натянута пленка, которая нагружена равномерно распределенным давлением. Изобразим несколько разрезов пленки. Соответственно углам наклона пленки покажем ориентировочно распределение напряжений по сечению.

При помощи пленочной аналогии можно получить не только качественные, но и количественные соотношения. Для этого используют специальный прибор. Он состоит из подвижного столика, на котором расположена плоская коробка с натянутой тонкой резиновой пленкой. Сверху пленка вплотную накрыта крышкой с отверстием по форме исследуемого сечения. К нижней части коробки подведена трубка, сообщающаяся со стеклянным манометром. Поднимая трубку, повышают давление под резиновой пленкой, и последняя деформируется. Легко провести обмер пленки посредством вертикально установленного микрометра. Координаты точки на пленке устанавливаются продольным и поперечным перемещениями столика. После того как определены перемещения, могут быть найдены и углы наклона касательной к поверхности пленки.



# Сопротивление материалов

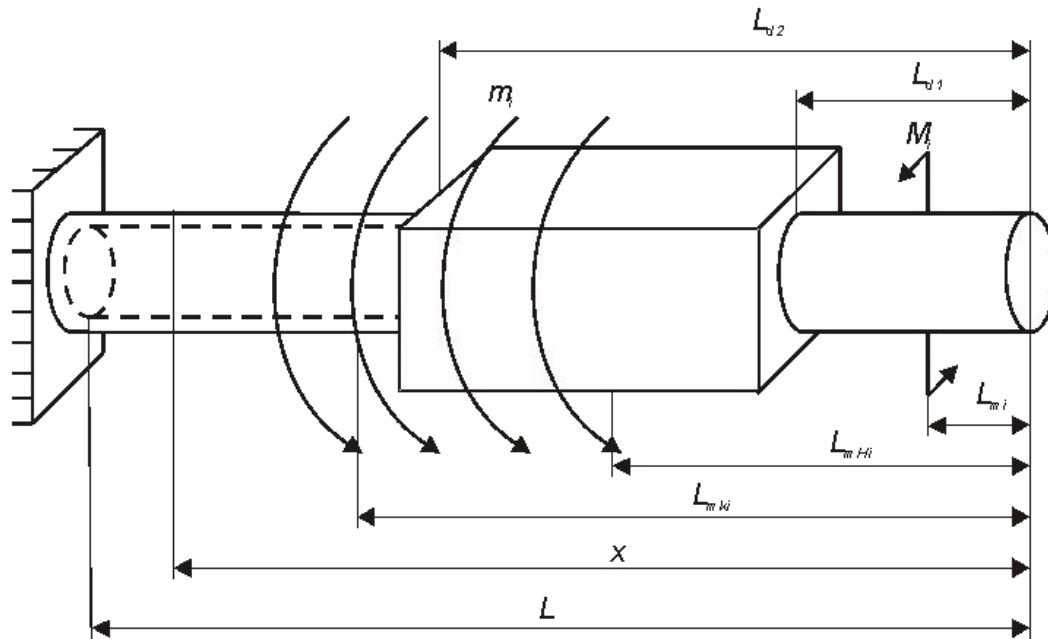
## Раздел: Сдвиг и кручение

### Кручение статически - определимого стержня

ORIGIN := 1

Для данного стержня найти максимальные напряжения и углы закручивания по длине стержня.

Условная расчетная схема нагружения стержня



$\alpha := \text{deg}$     $l := \text{m}$     $n_l := 0.01 \cdot \text{m}$     $l_i := 0.001 \cdot \text{m}$

$e_l := 1000 \text{ N}$     $e_{li} := 1000 \text{ N} \cdot \text{m}$     $l_i := \text{N} \cdot \text{m}$     $l_{ia} := 10^6 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$



## Исходные данные

$$G := 8 \cdot 10^4 \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \quad \text{модуль сдвига}$$

Размеры сечения

для круга

$$D1 := 50 \text{ мм}$$

для кольца

$$d := 40 \text{ мм}$$

$$D := 50 \text{ мм}$$

$$L := 1 \text{ м}$$

$$L_d := \begin{pmatrix} 0.3L \\ 0.7L \end{pmatrix}$$

для прямоугольного сечения

$$b := 50 \text{ мм}$$

$$h := 50 \text{ мм}$$

$$hb := \frac{h}{b}$$

## Внешние моменты и координата их приложения

$$M := \begin{pmatrix} 500 \\ 700 \\ -800 \end{pmatrix} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}$$

$$L_M := \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \text{мм}$$

$$x := 0 \text{ м}, \frac{L}{100} \dots L$$

$$m := \begin{pmatrix} -3000 \\ 2000 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$L_m := \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix} \cdot \text{мм}$$

$$L_{\hat{m}} := \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot \text{мм}$$

## Определение крутящих моментов

$$mn(x) := \begin{cases} m_1 & \text{if } L_{m_1} \leq x \leq L_{\hat{m}_1} \\ m_2 & \text{if } L_{m_2} \leq x \leq L_{\hat{m}_2} \\ \left(0 \cdot \frac{\text{Н}}{\text{м}}\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Все правильно и просто, но вычисление интеграла от интеграла (угол закручивания) просходит ну очень долго

$$M_k(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} [M_i \cdot (x > L_{M_i})] + \int_0^x mn(x) dx$$

Без интеграла расчет идет раз в 100 быстрее

$$M_k(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} [M_i \cdot (x > L_{M_i})] + \left[ \sum_{i=1}^{\text{rows}(m)} [m_i \cdot (x - L_{m_i}) \cdot (x > L_{m_i})] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(m)} [m_i \cdot (x - L_{\hat{m}_i}) \cdot (x > L_{\hat{m}_i})] \right]$$

## Здесь скрыт расчет коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma$ для расчета прямоугольного сечения



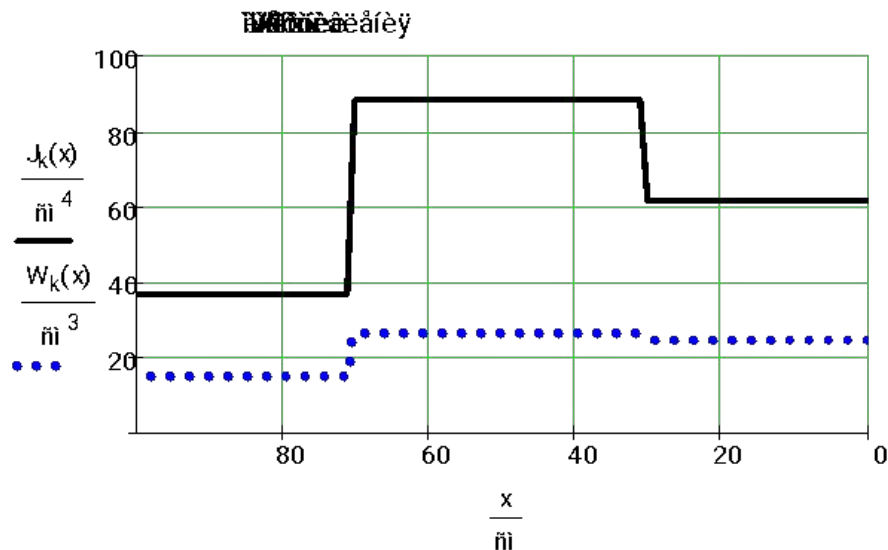
Двойной щелчек мышью на этой линии раскрывает закрытую зону и закрывает раскрытую

Моменты инерции

$$J_k(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{32} \cdot D^4 & \text{if } x \leq L_{d_1} \\ \alpha(hb) \cdot h \cdot b^3 & \text{if } L_{d_1} < x \leq L_{d_2} \\ \left[ \frac{\pi}{32} \cdot D^4 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

Моменты сопротивления

$$W_k(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{16} \cdot D^3 & \text{if } 0 \leq x \leq L_{d_1} \\ \beta(hb) \cdot h \cdot b^2 & \text{if } L_{d_1} < x \leq L_{d_2} \\ \left[ \frac{\pi}{16} \cdot D^3 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

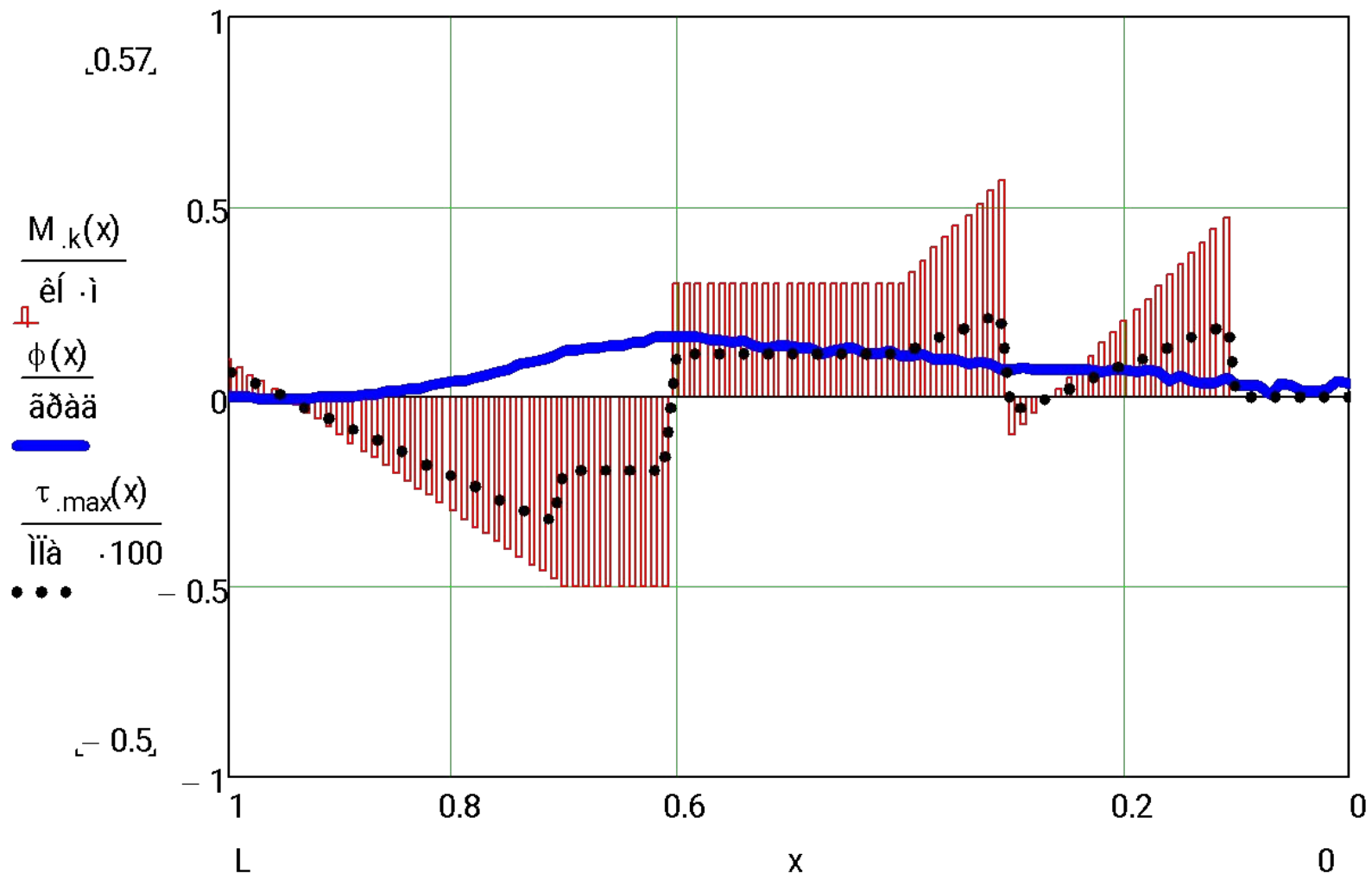


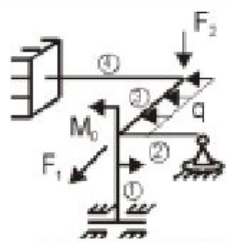
Углы поворота сечений Максимальные напряжения

$$\phi(x) := \int_L^x \frac{M_k(x)}{G \cdot J_k(x)} dx$$

$$\tau_{\max}(x) := \frac{M_k(x)}{W_k(x)}$$

Поскольку угол поворота отсчитывается от неподвижной заделки, в выражении для угла поворота сечения интеграл берется не от 0 до  $x$ , а от  $L$  до  $x$ .





# Сопротивление материалов

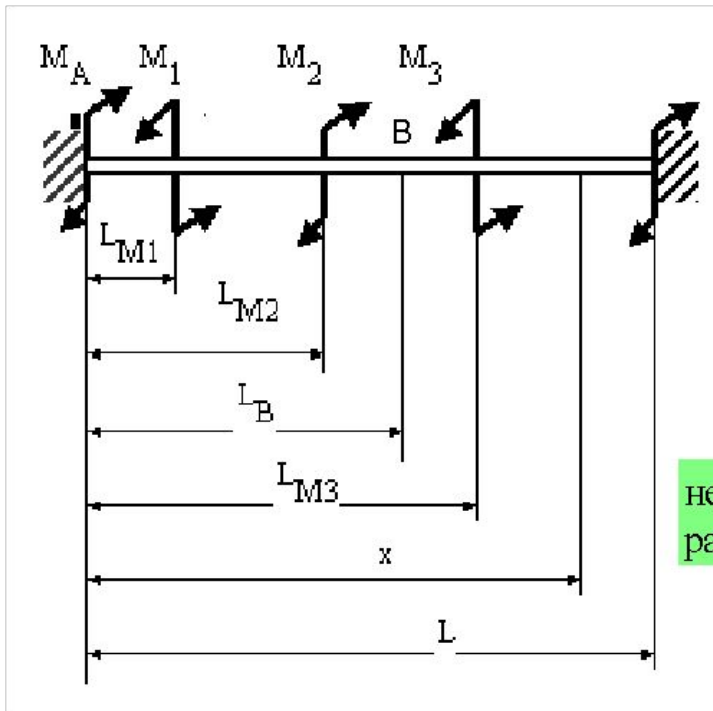
## Раздел: Сдвиг и кручение

### Кручение статически - неопределимого стержня

Для заданного стержня найти диаметр  
трубы из условия прочности

$$\tau \leq \tau_{\text{доп}} \text{ и из условия жесткости } \phi \leq \phi_{\text{в}}$$

ORIGIN := 1



необходим глобальный ввод этой  
размерности

$$\tilde{n} := 0.01 \cdot m$$

$$l := m \quad f := N \quad e_f := 1000 \text{ N} \quad \tilde{n} := 10^6 \cdot \frac{N}{m^2}$$

$$e_{\tilde{n}} := 1000 \text{ N} \cdot m \quad \tilde{l} := N \cdot m \quad \tilde{\alpha} := \text{deg}$$

## Исходные данные

$$L := 1 \cdot \text{м} \quad G := 8 \cdot 10^4 \cdot \text{Н/м}^2 \quad \tau_{\text{доп}} := 50 \cdot \text{МПа}$$

Диаметр трубы (в первом приближении) задан глобально ниже графика

$$\alpha := 0.9 \quad (\text{Труба } \alpha = d/D) \quad d := D \cdot \alpha$$

## Пары сил и координаты их приложения

$$M := \begin{pmatrix} -500 \\ 700 \\ -800 \end{pmatrix} \cdot \text{Н} \quad L_M := \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \text{м}$$

Задаемся положением точки, где наложено ограничение  $L_A$  и углом поворота  $\phi_A$  в месте ее наложения

$$L_A := 0 \cdot \text{м} \quad \phi_A := 0 \cdot \text{рад}$$

В левой заделке поменяйте

Проверить условие жесткости в точке В

$$L_B := 50 \cdot \text{м} \quad \phi_B := 0.3 \cdot \text{рад}$$

$L_A$  и  $\phi_A$   
 $L_B$  и  $\phi_B$

## Геометрические характеристики

$$J_k(D) := \frac{\pi}{32} \cdot D^4 \cdot (1 - \alpha^4) \quad \text{момент инерции}$$

$$W_k(D) := \frac{\pi}{16} \cdot D^3 \cdot (1 - \alpha^4) \quad \text{момент сопротивления}$$

$$A(D) := \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot (1 - \alpha^2) \quad \text{площадь сечения}$$

$$\text{Крутящий момент } M_k(M_A, x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} [M_i \cdot (x > L_{M_i})] + M_A \cdot (x > L_A)$$

$$\text{Угол поворота } \phi(D, M_A, x) := \int_L^x \frac{M_k(M_A, x)}{G \cdot J_k(D)} dx$$

### решение уравнения неразрывности деформаций

$$\phi(L_A) - \phi_A = 0$$

$M_A := 1 \cdot \hat{e}_1$  начальное приближение

$$M_R := \text{root}(\phi(D, M_A, L_A) - \phi_A, M_A)$$

$$M_R = 280 \hat{e}_1$$

$$x := 0 \cdot \hat{e}_1, \frac{L}{100} \dots L$$

**Определение максимального крутящего момента  $M_{\max}$**

$$M_k(x) := M_k(M_R, x)$$

Здесь скрыта программа  $F_{\max}$



```

F_max(F, L_f, L_e, N) :=
  L ← L_f
  A1 ← |F(L)|
  while L < L_e
    L ← L + (L_e - L_f) / N
    A2 ← |F(L)|
    if A2 > A1
      A1 ← A2
      L2 ← L
  (A1 L2 e1)^T
    
```



Поменяйте параметры поиска максимума

$$L_f := 0 \hat{e}_1$$

$$L_e := L$$

$$N := 1000$$

$$M_{\max} := F_{\max}(M_k, L_f, L_e, N)_1$$

$$F_{\max}(M_k, L_f, L_e, N)_2$$

$$x_{V_{\max}} := \frac{\quad}{\hat{e}_1}$$

**Возвращение к исходной размерности**

Максимальный момент

$$M_{\max} = 480 \hat{e}_1$$

в сечении

$$x_{V_{\max}} = 30.1 \hat{e}_1$$

При  $D = 5 \hat{e}_1$

$$\tau_{\max}(D) := \frac{M_{\max}}{W_k(D)}$$

$$\tau_{\max}(D) = 57 \hat{e}_1$$

### Определение D из условия прочности

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\text{aнн}}$$

$$D_{\tau} := \text{root}(\tau_{\max}(D) - \tau_{\text{aнн}}, D)$$

$$D_{\tau} = 5.22 \text{ нн}$$

### Определение D из условия жесткости

$$\phi(D, L_B) \leq \phi_B$$

$$\phi(D, x) := \left| \int_L^x \frac{M_k(z)}{G \cdot J_k(D)} dz \right|$$

$D_{\text{нн}} := 5 \text{ нн}$  начальное приближение

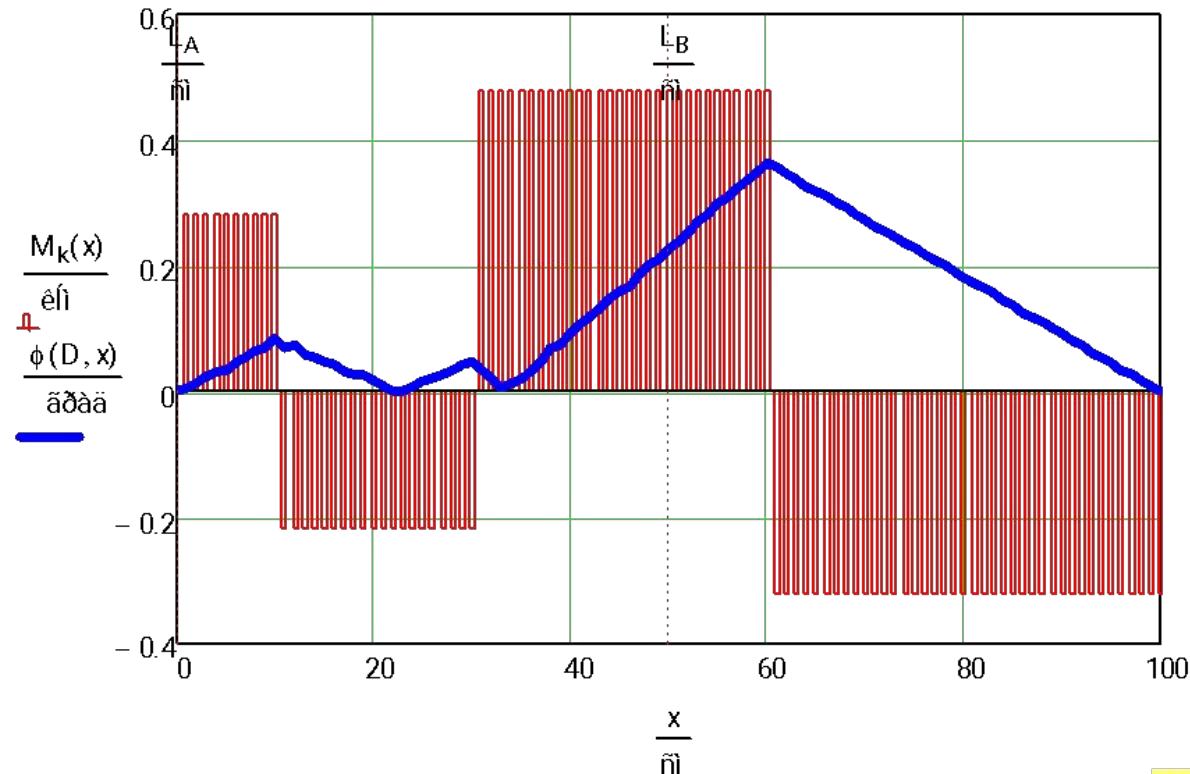
$$D_{\phi} := \text{root}(\phi(D, L_B) - \phi_B, D)$$

$$D_{\phi} = 4.88 \text{ нн}$$

Выбираем диаметр, удовлетворяющий обоим условиям

$$D_{\text{нн}} := \max(D_{\tau}, D_{\phi})$$

$$D = 0.052 \text{ нн}$$



Диаметр трубы задан глобально

Расчетный диаметр

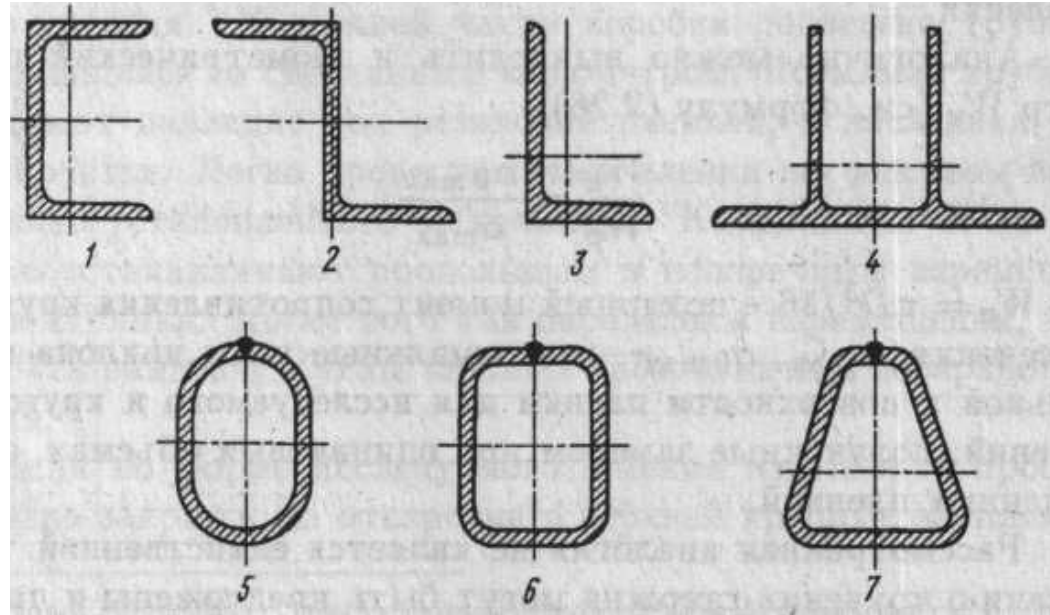
$$D = 5.22 \text{ нн}$$

Первое приближение

$$D = 5 \text{ нн}$$

# 8. Кручение тонкостенного стержня

В практике машиностроения, и особенно самолетостроения, часто возникает необходимость расчета на кручение так называемых тонкостенных стержней. Типичные формы прокатанных, гнутых, тянутых и прессованных профилей показаны на рисунке. Характерной геометрической особенностью тонкостенных стержней является то, что их толщина существенно меньше прочих линейных размеров.

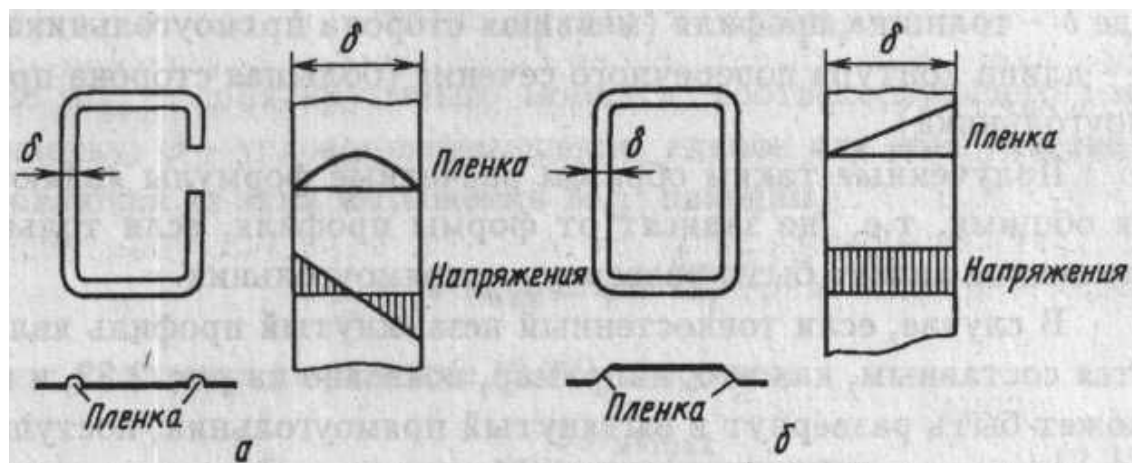


Тонкие профили разделяются на замкнутые и открытые. Так, первые четыре профиля, показанные на рисунке, являются открытыми (незамкнутыми), а последние три - замкнутыми.



Характер распределения напряжений в поперечном сечении тонкостенного стержня проще всего установить при помощи пленочной аналогии. Представим себе вырезанное в плоской плите отверстие по форме профиля и натянутую на нем пленку. Если приложить к пленке равномерно распределенную нагрузку, то пленка деформируется, но по-разному, в зависимости от того, замкнутым или открытым является профиль. Это различие иллюстрирует рисунок. В случае замкнутого профиля область внутри контура не связана с внешней областью и под действием давления смещается (см. рис. б). Это и предопределяет качественное различие между формами пленки для случаев замкнутого и открытого профилей.

Для открытого профиля пленка имеет наибольшие углы наклона по концам нормального отрезка (рис., а), причем примерно в середине толщины происходит смена знака угла наклона.



С большой степенью точности можно принять, что напряжения по толщине незамкнутого профиля распределены линейно.

В случае замкнутого контура деформированная пленка образует поверхность примерно постоянного угла подъема (рис. б), откуда следует, что распределение напряжений по толщине профиля близко к равномерному.

Перейдем к составлению расчетных формул.

### Открытый профиль.

Достаточно очевидно, что форма пленки, а следовательно, и напряжения в стержне сильно не изменятся, если профиль сечения распрямить. Т.е. напряжения в криволинейном открытом профиле будут примерно такими же, как и в прямом. Используем расчетные формулы, для прямоугольного сечения с большим отношением сторон  $a/b = \infty$

$$\tau_{\max} = \frac{3M_{\kappa}}{\delta^2 s}; \quad \varphi = \frac{3Ml}{G\delta^3 s}$$

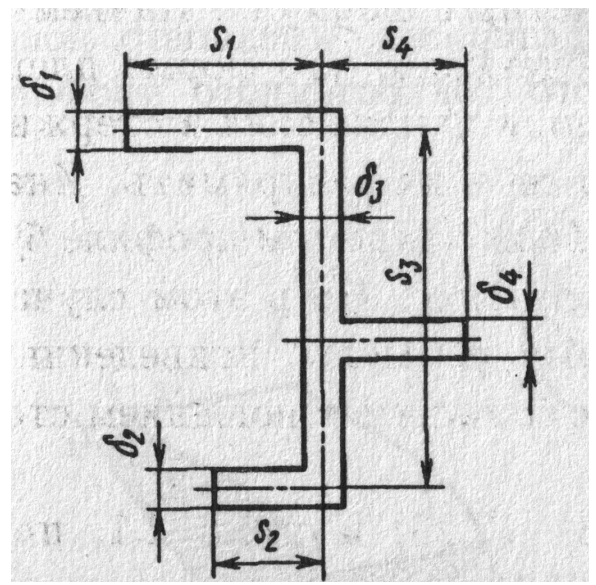
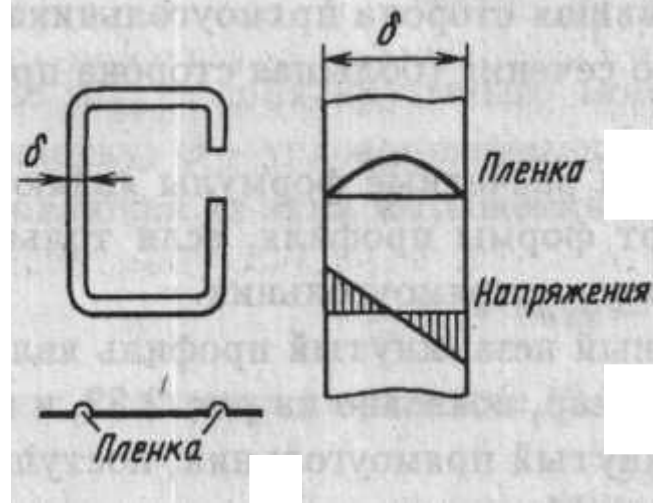
где  $\delta$  - толщина профиля (меньшая сторона прямоугольника);  $s$  - длина контура поперечного сечения (большая сторона прямоугольника).

Полученные формулы являются общими, т.е. не зависят от формы профиля, если последний может быть развернут в прямоугольник.

В случае, если тонкостенный незамкнутый профиль является составным, и не может быть развернут в вытянутый прямоугольник, то момент  $M_{\kappa}$  рассматривают как сумму моментов, возникающих в отдельных участках. Тогда,

$$\varphi = \frac{3Ml}{G\delta^3 s} \Rightarrow M = \frac{\varphi G}{3l} (\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \dots + \delta_n^3 s_n)$$

$$\varphi = \frac{3Ml}{G(\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \dots + \delta_n^3 s_n)}$$



При помощи пленочной аналогии легко установить, что наибольшие напряжения возникают на участке с наибольшей толщиной  $\delta_{\max}$ . Для этого отдельно взятого участка, которому припишем номер  $k$ , справедливы формулы:

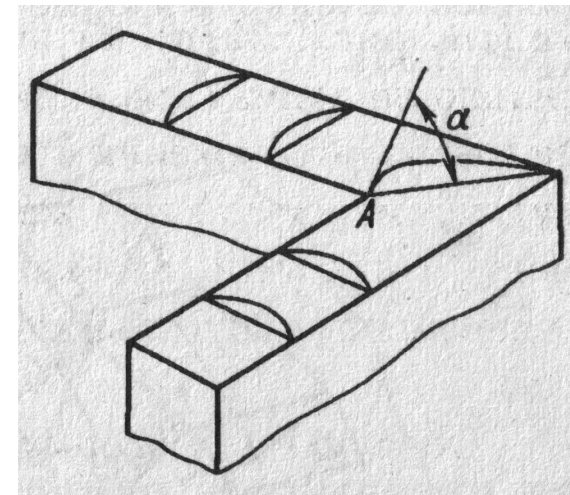
$$\tau_k = \tau_{\max} = \frac{3M_{Kk}}{\delta_k^2 s_k}; \quad \varphi = \frac{3M_{Kk} l}{G \delta_k^3 s_k}$$

$M_{Kk}$  - доля крутящего момента, соответствующего  $k$ -му участку;  $\varphi$  - угловое перемещение, единое для всех участков.

Исключая из этих выражений  $M_{Kk}$ , находим

$$\tau_k = \tau_{\max} = \varphi G \frac{\delta_{\max}}{l} = \frac{3M_K \delta_{\max}}{(\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \dots + \delta_n^3 s_n)}$$

Данный метод определения напряжений в незамкнутом профиле является приближенным, поскольку не учитываются повышенные местные напряжения во внутренних углах ломаного профиля. Чем меньше радиус закругления во внутренних углах, тем больше местные напряжения. Это наглядно можно проиллюстрировать при помощи пленочной аналогии. Местный угол наклона  $\alpha$  пленки в точке  $A$  больше, чем в остальных точках внутреннего контура. Во избежание местных перенапряжений внутренние углы в профилях выполняют скругленными.



## Замкнутый профиль

Здесь, в отличие от открытого профиля, напряжения распределены по толщине равномерно. Выделим из стержня элементарную призму длиной  $dx$ . Размер призмы в направлении дуги контура, т.е. расстояние между точками 1 и 2, является произвольным. Пусть толщина контура в точке 1 будет  $\delta_1$ , а в точке 2 -  $\delta_2$ .

Соответственно через  $\tau_1$ , и  $\tau_2$  обозначим напряжения в поперечном сечении. В продольных сечениях возникают парные напряжения  $\tau'_1 = \tau_1$  и  $\tau'_2 = \tau_2$ . Составим для выделенного элемента уравнение равновесия, спроектировав все силы на направление оси бруса.

Очевидно:

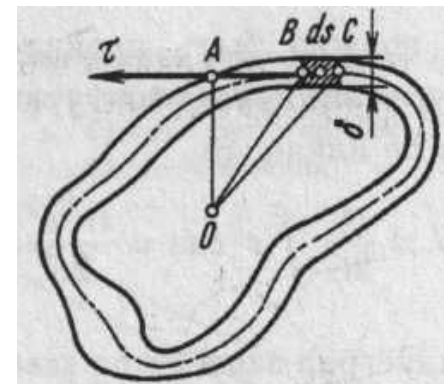
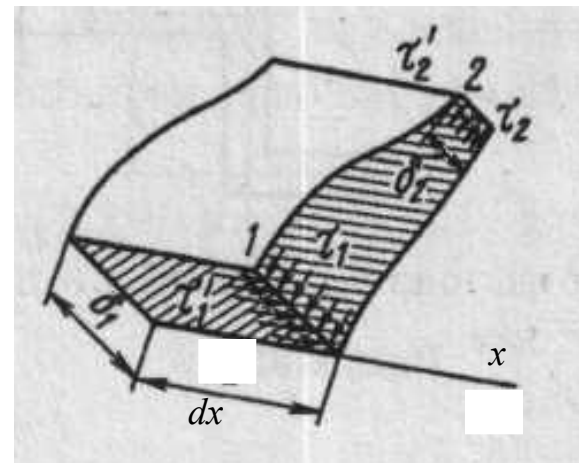
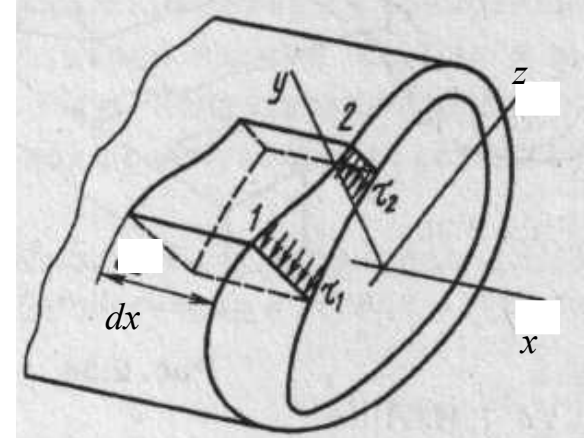
$$\tau_1 \delta_1 dx = \tau_2 \delta_2 dx$$

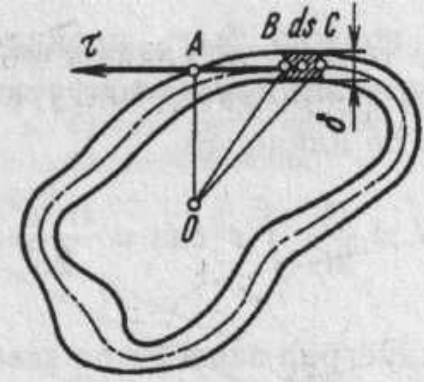
Так как точки 1 и 2 взяты произвольно, то  $\tau\delta = \text{const}$ .

Таким образом, произведение  $\tau\delta$  по длине замкнутого контура не изменяется. На участках, имеющих меньшую толщину, напряжения будут соответственно большими.

Выразим крутящий момент через напряжения  $\tau$ . Для этого возьмем на контуре элементарный участок длиной  $ds$ . Момент силы  $\tau\delta ds$  относительно произвольно взятой точки  $O$  равен  $\delta ds |OA|$ . Тогда

$$M_K = \int \tau \delta |OA| ds$$





Произведение  $\tau\delta$  по длине дуги контура не изменяется

$$M_K = \tau\delta \int_s |OA| ds$$

Произведение  $|OA|ds$  представляет собой удвоенную площадь треугольника  $OBC$ , а интеграл от этого произведения по длине замкнутого контура дает удвоенную площадь, ограниченную средней линией контура. Обозначим эту площадь через  $A^*$  в отличие от  $A$ . Таким образом

$$M_K = 2\tau A^* \delta$$

Наибольшее напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{2A^* \delta_{\min}}$$

Угловое перемещение  $\varphi$  для тонкостенного стержня замкнутого профиля поперечного сечения определим путем сопоставления потенциальной энергии, выраженной через напряжение  $\tau$ , с потенциальной энергией, выраженной через внешний момент  $M$ . Обратимся к выражению удельной потенциальной энергии при сдвиге

$$U_0 = \frac{\tau^2}{2G}$$

Энергия, накопленная в элементарном объеме с размерами  $ds$ ,  $dx$ ,  $\delta$ , равна

$$dU = \frac{\tau^2}{2G} \delta ds dx$$

Это выражение должно быть проинтегрировано по длине стержня  $l$  и по дуге замкнутого контура. Если стержень является однородным по длине, то

$$U = \frac{l}{2G} \int_s \tau^2 \delta ds = \frac{l \tau^2 \delta^2}{2G} \int_s \frac{ds}{\delta}$$

Последний интеграл зависит от закона изменения толщины по дуге контура и является геометрической характеристикой сечения. Учитывая, что

$$\tau \delta = \frac{M_K}{2A^*}$$

получим 
$$U = \frac{M^2 l}{8GA^{*2}} \int_s \frac{ds}{\delta}$$

Однако энергию  $U$  можно выразить как работу внешнего момента  $M$  на угловом перемещении  $\varphi$ :

$$U = \frac{1}{2} M \varphi$$

Приравнивая оба выражения для  $U$ , находим

$$\varphi = \frac{Ml}{4GA^{*2}} \int_s \frac{ds}{\delta}$$

Если толщина  $\delta$  по дуге контура не меняется, то

$$\varphi = \frac{Mls}{4GA^{*2}\delta} \quad \text{где } s - \text{длина замкнутого контура.}$$