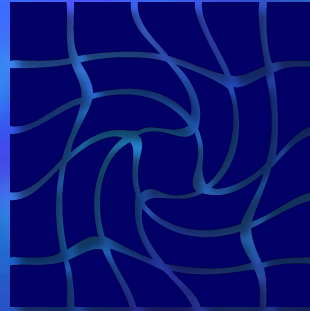


Современные проблемы прикладной математики и информатики



*Лекция. Примеры решения математических задач
при помощи MathCad*

Обзор экономико-математических методов.

Экономико-математические методы.

- **Системный анализ** - позволяет рассматривать любую рыночную ситуацию как некий объект для изучения с большим диапазоном внутренних и внешних причинно-следственных связей.
- **Программно-целевое планирование** — широко используется при выработке и реализации стратегии и тактики маркетинга.
- **Методы теории массового обслуживания** -применяются при решении проблем выбора очередности обслуживания заказчиков, составления графиков поставок товаров и др. аналогичных задач. Они дают возможность, во-первых, изучить складывающиеся закономерности, связанные с наличием потока заявок на обслуживание и, во-вторых, соблюсти необходимую очередность их выполнения.

Обзор экономико-математических методов.

- **Линейное программирование (ЗЛП)** – математический метод для выбора альтернативных решений наиболее благоприятного (с минимальными расходами, максимальной прибылью, наименьшими затратами времени или усилий) применяется при решении ряда проблем маркетинга.

Например, разработка более выгодного ассортимента при ограниченных ресурсах, расчет *оптимальной* величины товарных запасов, планирование маршрутов движения сбытовых агентов.

Обзор экономико-математических методов.

Обзор экономико-математических методов.

- **Теория связи**
- **Методы теории вероятностей**
- **Метод сетевого планирования**
- **Метод деловых игр** – *метод помогает разрешению реальных маркетинговых ситуаций. Упрощенные модели поведения конкурентов, стратегии выхода на новые рынки могут проигрываться для нахождения оптимальных решений*

Обзор экономико-математических методов.

- *Метод функционально-стоимостного анализа – Используется для комплексного решения задач, связанных с повышением качества продукции и одновременной экономии материальных и трудовых затрат.*
- *Эконометрические модели – эти модели дают возможность с учетом действующих факторов внешней и внутренней среды оценить, например, перспективы развития емкости рынка, определить наиболее рациональные стратегии маркетинга и возможные шаги конкурентов, оценить оптимальные затраты на маркетинг для получения необходимого размера прибыли.*
- *Методы экспертных оценок – методы позволяют достаточно быстро получить ответ о возможных процессах развития того или иного события на рынке, выявить сильные и слабые стороны предприятия.*

Системы линейных уравнений

Одной из центральных проблем вычислительной линейной алгебры является решение систем линейных уравнений, а также различные матричные разложения.

Задачу систем алгебраических уравнений (СЛАУ), т.е. систем N уравнений вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

Можно записать в эквивалентной матричной форме:

$$A * x = b,$$

где A – матрица коэффициентов СЛАУ размерности $N * N$, x – вектор неизвестных; b – вектор правых частей уравнений.

СЛАУ имеет единственное решение, если матрица является **невыврожденной (несингулярной)**, т.е. ее определитель не равен нулю.

Векторные и матричные функции MathCad

Имя функции	Описание
Rows(A)	Возвращает число строк в массиве A (\otimes)
cols(A)	Возвращает число столбцов в массиве A (\otimes)
length(v)	Возвращает число элементов в векторе v (\otimes)
last(v)	Возвращает индекс последнего элемента в векторе v (\otimes)
max(A)	Возвращает наибольший элемент в массиве A
min(A)	Возвращает наименьший элемент в массиве A
lsolve(M,v)	Возвращает вектор решения x ($Mx=v$)

Самый простой способ решения почти всякой несингулярной системы – использование алгоритма Гаусса, реализованного встроенной функцией *lsolve*.

Системы линейных уравнений

Для решения СЛАУ необходимо выписать коэффициенты при неизвестных в виде матрицы. Введите матрицу (3*3) коэффициентов и матрицу свободных членов (3*1):

$$m := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad v := \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Затем вычислим обратную матрицу \times^{-1}

$$(m)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.292 & 0.25 & -0.083 \\ 0.167 & 0 & -0.333 \\ 0.187 & -0.125 & -0.125 \end{pmatrix} \quad m^{-1} \cdot v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Затем вычислим обратную матрицу и произведение обратной матрицы m^{-1} на v

Результат – решение СЛАУ.

Линейная регрессия

В различных аспектах человеческой деятельности, явлениях природы мы сталкиваемся с динамическими временными рядами (например, количество произведенного мяса, молока, динамика заболеваемости и т.д.).

Например, в таблице 1 приведена динамика урожайности картофеля с 1 га в некотором хозяйстве.

Векторные и матричные функции MathCad

Имя функции	Описание
Rows(A)	Возвращает число строк в массиве A (⊗)
cols(A)	Возвращает число столбцов в массиве A (⊗)
length(v)	Возвращает число элементов в векторе v (⊗)
last(v)	Возвращает индекс последнего элемента в векторе v (⊗)
max(A)	Возвращает наибольший элемент .в массиве A
min(A)	Возвращает наименьший элемент в массиве A
lsolve(M,v)	Возвращает вектор решения x (Mx=v)

Линейная регрессия

Основным объектом исследования будет выборка экспериментальных данных, которые чаще всего, представляются в виде массива, состоящего из пар чисел (x_i, y_i) .

В связи с этим возникает задача аппроксимации дискретной зависимости непрерывной функцией. Функция в зависимости от специфики задачи, может отвечать различным требованиям:

- $F(x)$ должна проходить через точки (x_i, y_i) , т.е. В этом случае говорят об *интерполяции* данных функцией $F(x)$ во внутренних точках между x_i или *экстраполяции* за пределами интервала, содержащими все x_i
- $F(x)$ должна некоторым образом приближать точки $y(x_i)$, *не обязательно проходя через точки (x_i, y_i)*
- Такова постановка задач *регрессии*, или *сглаживание данных*

Линейная регрессия

Го- ды	2086	2087	2088	2089	2090	2091	2092	20 93	20 94	2095	2096
Уро- жай	149	145	168	146	177	176	190	18 6	17 6	211	170

Линейная регрессия

Сравнивая урожайность в разные годы, мы видим, что имеется тенденция к повышению урожайности, хотя в отдельные годы наблюдается колебания от среднего значения в силу различных метеорологических причин.

Найдем уравнение линии, описывающее данную тенденцию.

Решение экономических задач

Данная тенденция носит линейный характер, поэтому уравнение (данное уравнение называется трендом) будем искать в виде $y=bx+a$.

Зная коэффициенты a и b можно спрогнозировать показатель на 2097 год ($x=97$, а урожай Y вычисляется).

Линейная регрессия

Самый простой и наиболее часто используемый вид регрессии – линейная.

Введем вариацию ряда VX (годы), VY (урожайность) в виде *матриц* размерностью 11×1 (см. рис. 1)

Линейная регрессия

Вычислите коэффициенты **a** и **b**. Постройте график исходных данных (кружки) и линию тренда ($f(x)$). Вычислите прогноз на 2097 год.

- Шаг 3. Найдем коэффициент корреляции $\text{corr}(VX, VY) =$ (Показывает тесноту связи факторов VX и VY . Чем ближе к 1, тем теснее зависимость).

Линейная регрессия

VX :=	86	VY :=	149
	87		145
	88		168
	89		146
	90		177
	91		176
	92		190
	93		186
	94		176
	95		211
	96		170

```
a := intercept(VX, VY)
b := slope(VX, VY)
a = -229.873  b = 4.418
```

Линейная регрессия

- Эти функции возвращают наклон и смещение линии, которая наилучшим образом приближает данные в смысле наименьших квадратов. Если поместить значения x в вектор vx и соответствующие значения y в vy , то линия определяется в виде

$$y = \text{slope}(vx, vy)x + \text{intercept}(vx, vy)$$

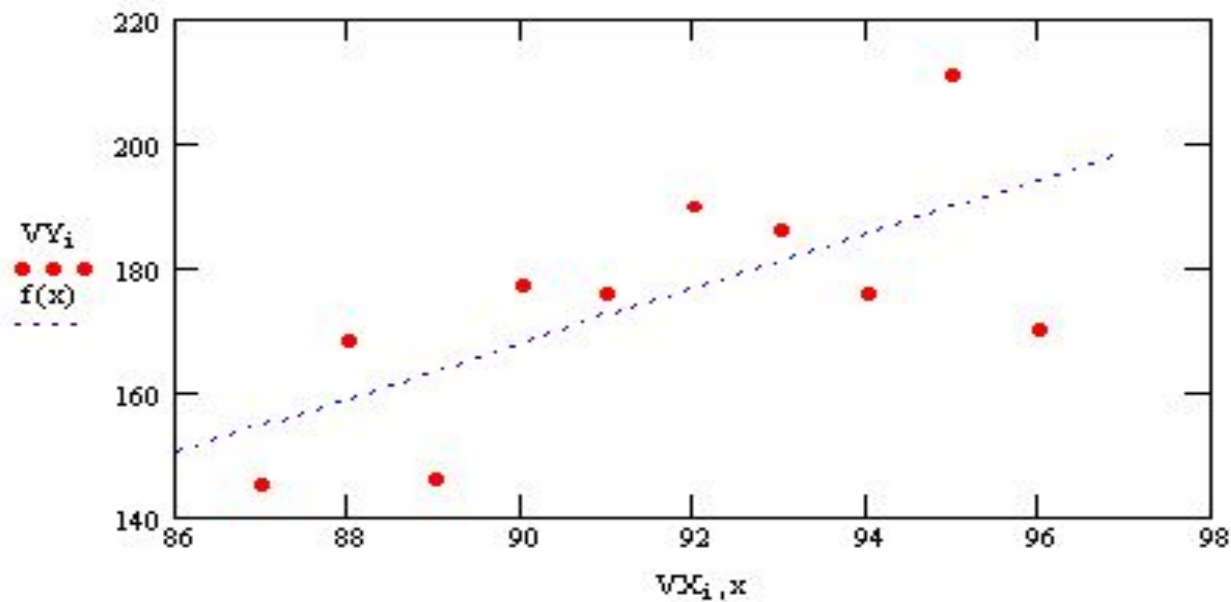
- **slope(vx, vy)** Возвращает скаляр: наклон линии регрессии в смысле наименьших квадратов для данных из vx и vy .
- **intercept(vx, vy)** Возвращает скаляр: смещение по оси ординат линии регрессии в смысле наименьших квадратов для данных из vx и vy .

Линейная регрессия

$i := 1..11$

$x := 86,87..97$

$f(x) := b \cdot x + a$



$x := 97$

$f(x) = 198.691$

Многомерная регрессия

```

Mxy :=
( 2 2 )
( 2 3 )
( 3 2 )
( 3 3 )
( 1 1 )
( 1 4 )
( 4 1 )
( 4 4 )
( 0 0 )
( 0 5 )
( 5 0 )
( 5 5 )

VZ :=
( 1 )
( 2 )
( 2 )
( 2 )
( 3 )
( 4 )
( 3 )
( 5 )
( 2 )
( 3 )
( 2 )
( 1 )

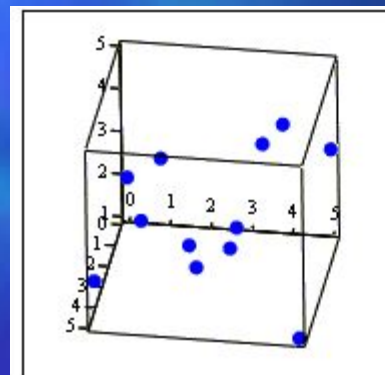
VS := regress(Mxy, VZ, 3)

i := 0..50    j := 0..50

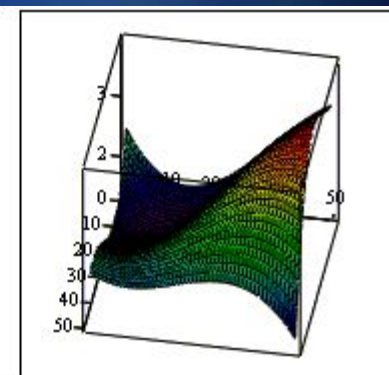
x_i := i/10   y_j := j/10

Z3_{i,j} := interp [ VS, Mxy, VZ, ( x_i )
                    ( y_j ) ]

X := Mxy<0>    Y := Mxy<1>    Z := VZ
    
```



(X, Y, Z)



Z3

Многомерная регрессия

- **Regress (Mxy, Vz, n)** — возвращает вектор, запрашиваемый функцией `interp (VS, Mxy, Vz, V)` для вычисления многочлена n -й степени, который наилучшим образом приближает точки множества Mxy и Vz . Mxy — матрица $m \times 2$, содержащая координаты x и y .
- **Vz** — m -мерный вектор, содержащий z -координат, соответствующих m точкам, указанным в Mxy ;
- **interp (VS, Mxy, Vz, V)** — возвращает значение z по заданным векторам VS (создается функциями `regress` или `loess`) и Mxy , Vz и V (вектор координат x и y заданной точки, для которой находится z).

Транспортная задача

Транспортная задача является одной из наиболее распространенных задач линейного программирования и находит широкое практическое применение.

Постановка транспортной задачи.

Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у m поставщиков A_i в количестве a_i ($i=1, \dots, m$) единиц, необходимо доставить n потребителям B_j в количестве b_j ($j=1, \dots, n$) единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза от поставщика i к потребителю j .

Составить план перевозок, позволяющий с минимальными затратами удовлетворить потребителей.

Транспортная задача

$$a := \begin{pmatrix} 145 \\ 210 \\ 160 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 237 \\ 278 \end{pmatrix}$$

$$\sum a = 515 \quad \sum b = 515$$

$$M := \text{rows}(a) \quad N := \text{rows}(b)$$

$$M = 3 \quad N = 2$$

$$c := \begin{pmatrix} 11.5 & 7 & 12 \\ 6.2 & 10 & 9.0 \end{pmatrix}$$

$$f(x) := \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} c_{i,j} \cdot x_{i,j}$$

$$x_{N-1, M-1} = 0$$

Given

$$\begin{array}{llll} x_{0,0} + x_{0,1} + x_{0,2} = b_0 & x_{0,0} + x_{1,0} = a_0 & x_{0,0} \geq 0 & x_{1,0} \geq 0 \\ x_{1,0} + x_{1,1} + x_{1,2} = b_1 & x_{0,1} + x_{1,1} = a_1 & x_{0,1} \geq 0 & x_{1,1} \geq 0 \\ & x_{0,2} + x_{1,2} = a_2 & x_{0,2} \geq 0 & x_{1,2} \geq 0 \end{array}$$

$$\text{sol} := \text{Minimize}(f, x)$$

$$\text{sol} = \begin{pmatrix} 0 & 210 & 27 \\ 145 & 0 & 133 \end{pmatrix}$$

$$f(\text{sol}) = 3.89 \times 10^3$$

Экономико-математическая модель задачи

Исходные данные транспортной задачи приведены схематически: внутри прямоугольника заданы удельные транспортные затраты на перевозку единицы груза c_{ij} , слева указаны мощности поставщиков a_i , а сверху - мощности потребителей b_j .

Д/З: Найти оптимальный план закрепления поставщиков за потребителями x_{ij} . (см. л/р “Транспортная задача”)