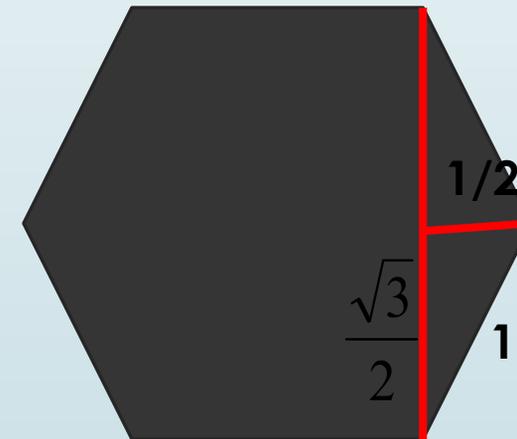
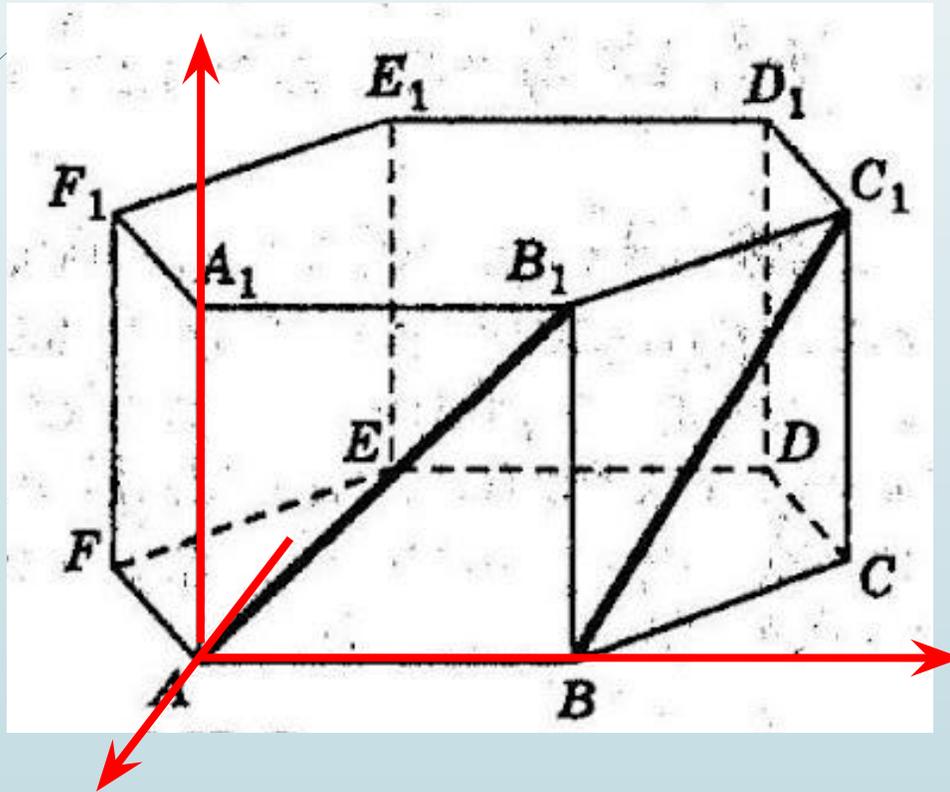


Задача 1 (угол между прямыми)

- В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1



Решение задачи 1

Введем прямоугольную систему координат (см. рисунок)

$$A(0;0;0)$$

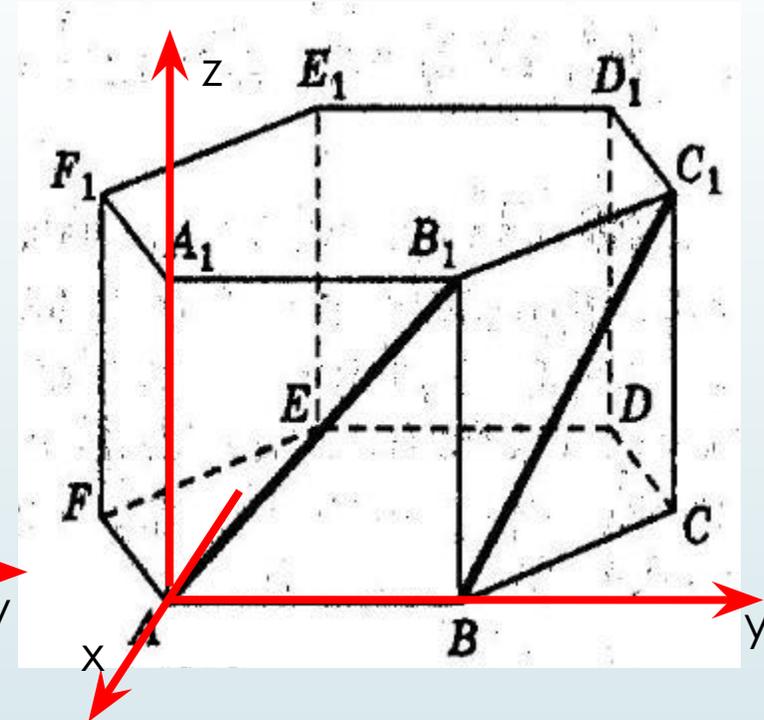
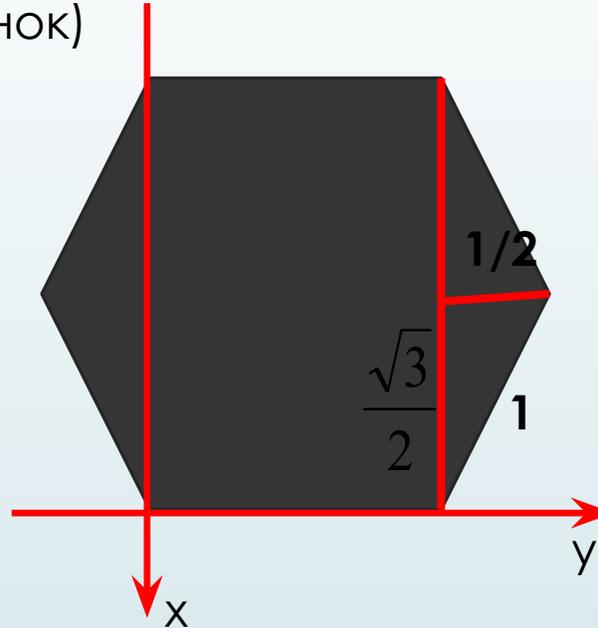
$$B(0;1;0)$$

$$B_1(0;1;1)$$

$$C_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 1\right)$$

$$\overrightarrow{AB_1}\{0;1;1\}$$

$$\overrightarrow{BC_1}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1\right\}$$



$$\cos \alpha = \frac{\left| 0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} + 1 \right|}{\sqrt{0+1+1} \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$

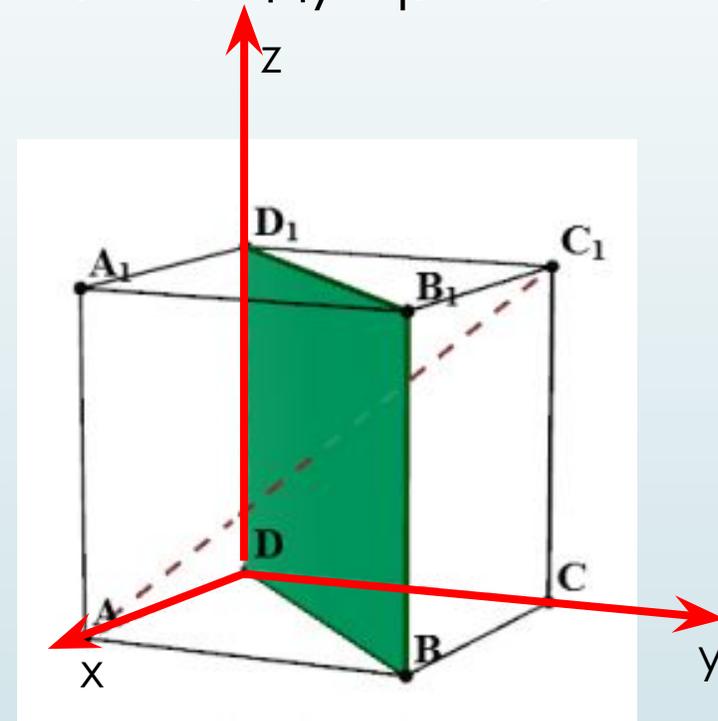
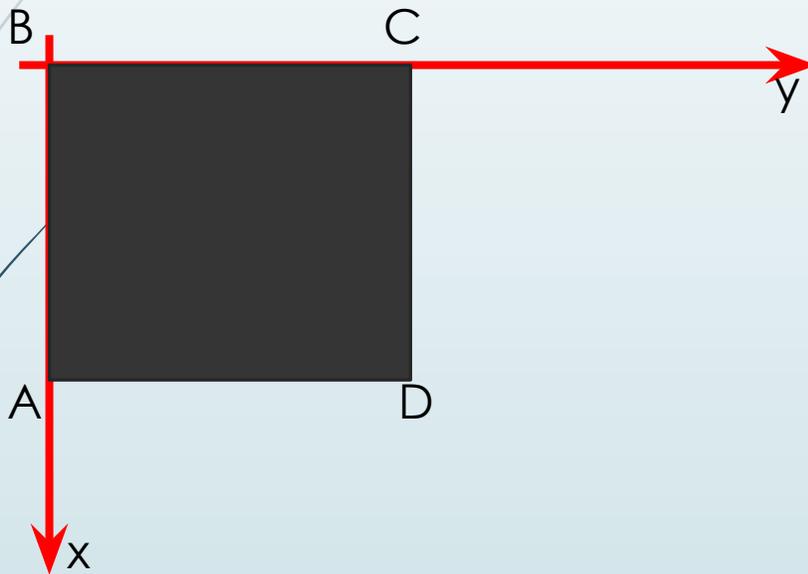
Ответ: 0,75



[Посмотреть формулу](#)

Задача 2 (угол между прямой и плоскостью).

В кубе $A...D_1$ найдите тангенс угла между прямой AC_1 и плоскостью BDD_1 .



$AC \perp DB$ (диагонали _ квадрата)

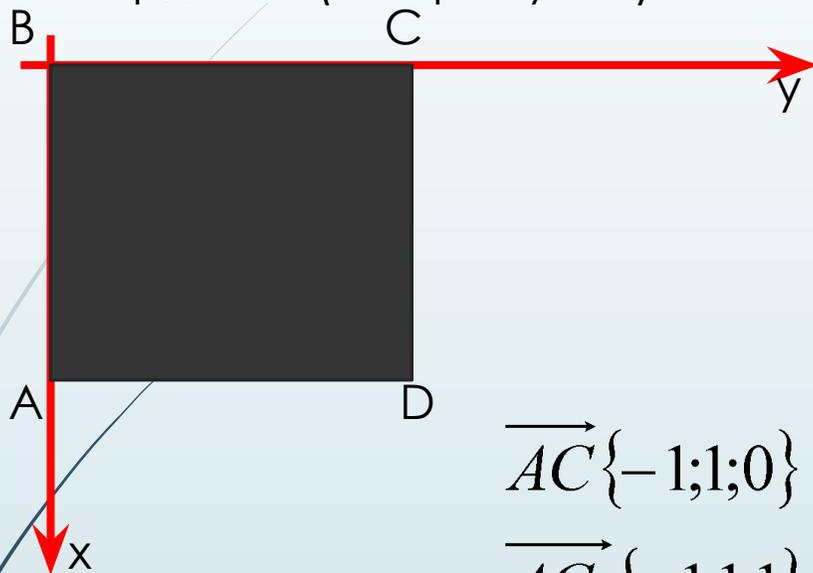
$AC \perp BB_1$ (т.к. $BB \perp ABC$)

значит, $AC \perp BB_1D_1D$ (признак _ перпенд. _ прямой и _ плоскости)



Решение задачи 2

Введем прямоугольную систему координат (см. рисунок)



$$\begin{aligned} A(1;0;0) \\ C(0;1;0) \\ C_1(0;1;1) \end{aligned}$$

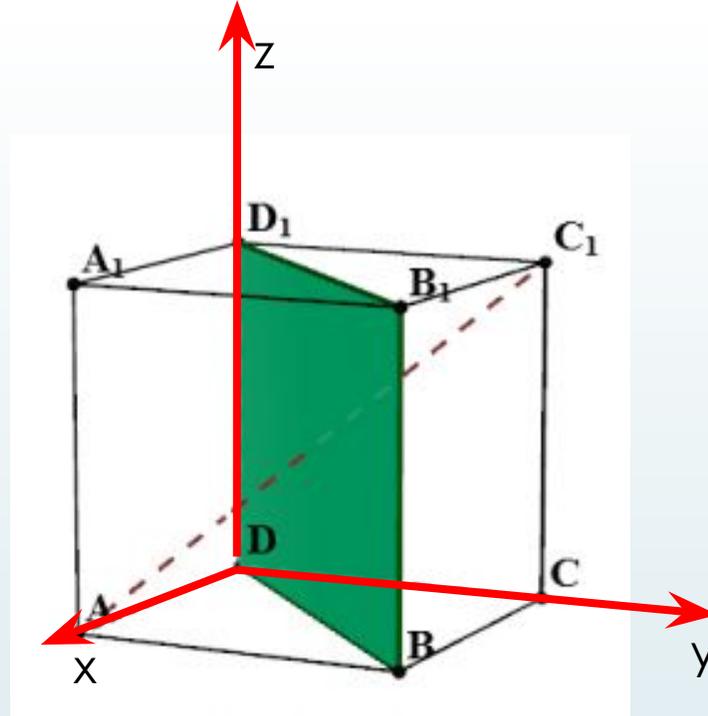
$$\overrightarrow{AC} \{-1;1;0\}$$

$$\overrightarrow{AC_1} \{-1;1;1\}$$

$$\sin \alpha = \cos(\overrightarrow{AC} \hat{;} \overrightarrow{AC_1}) = \frac{|1+1+0|}{\sqrt{1+1+0}\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$$



Пусть α – искомый угол)

Ответ: $\sqrt{2}$

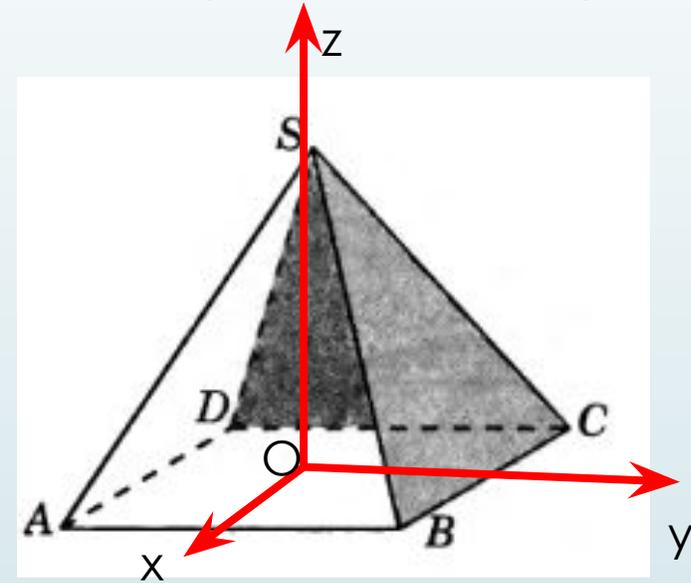
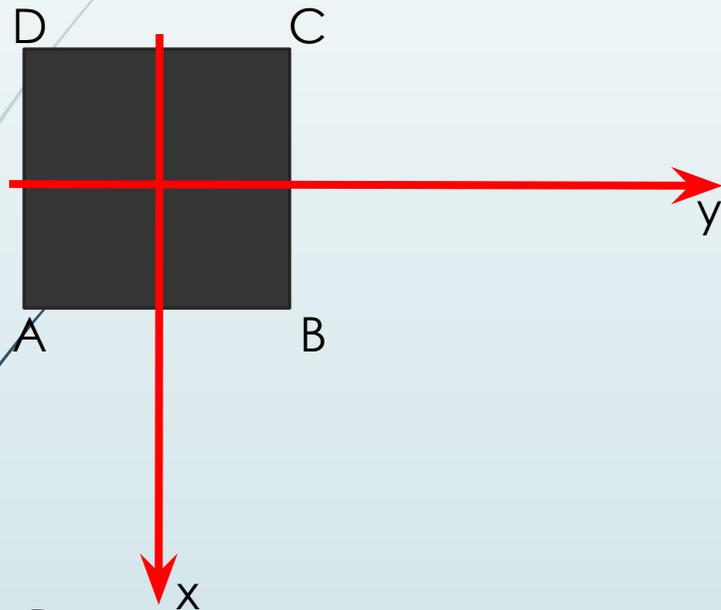
[Посмотреть формулу](#)



Задача 3. Угол между

плоскостями

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус двугранного угла, образованного гранями SBC и SCD .



Введем прямоугольную систему координат (см.рис.)
Найдем угол между перпендикулярами к плоскостям SBC и SCD . Обозначим искомый угол α .
Составим уравнения плоскостей.



Решение задачи 3

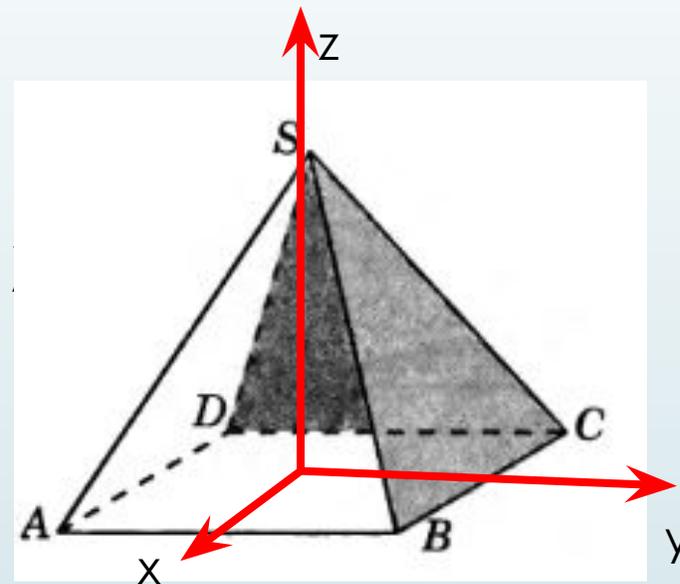
(1) $ax+by+cz+d=0$ – общий вид уравнения плоскости

вектор $\vec{n}\{a;b;c\} \perp$ плоскости

Т.к. точки S,B,C принадлежат плоскости SBC, то их координаты удовлетворяют уравнению (1)

Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) & \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + d = 0; \\ C\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) & -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + d = 0; \\ S\left(0; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) & \frac{\sqrt{2}}{2}c + d = 0 \end{cases}$$



Неизвестных 4, уравнений 3
Пусть $d=1$



Решение задачи 3 (продолжение)

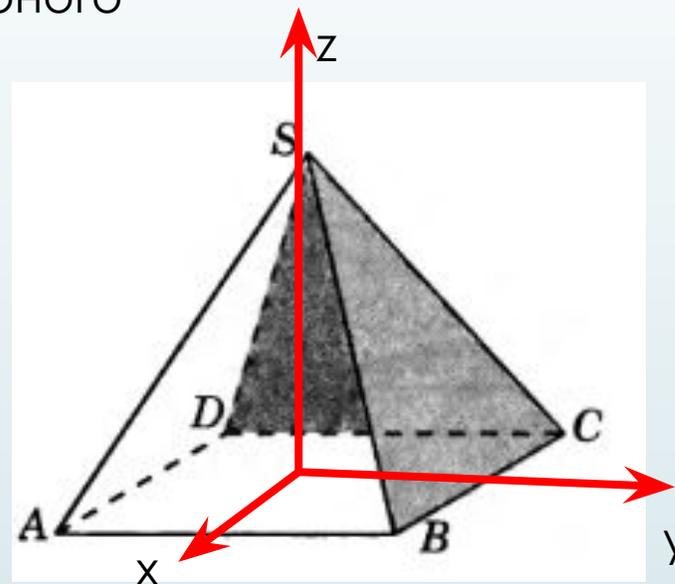
Аналогично найдем координаты Вектора, перпендикулярного плоскости SCD

$$\begin{cases} a = 0; \\ b = -2; \\ c = -\sqrt{2}; \\ d = 1. \end{cases}$$

$$S\left(0; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$C\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$$

$$D\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$$



$$\vec{n}\{0; -2; -\sqrt{2}\} \perp SBC$$

$$\vec{m}\{2; 0; -\sqrt{2}\} \perp SCD$$

$$\cos \alpha = \frac{|0 + 0 + 2|}{\sqrt{4 + 2} \sqrt{4 + 2}} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}c + d = 0; \\ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + d = 0; \\ -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = d = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2; \\ b = 0; \\ c = -\sqrt{2}; \\ d = 1. \end{cases}$$



Задача 4 (Расстояние от точки до прямой)

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки F до прямой BG , где G – середина ребра SC

$$SO = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

$$S(0; 0; \sqrt{3})$$

$$C(0; 1; 0)$$

$$G\left(0; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$F(0; -1; 0)$$

$$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$$

$$\Delta FBG$$

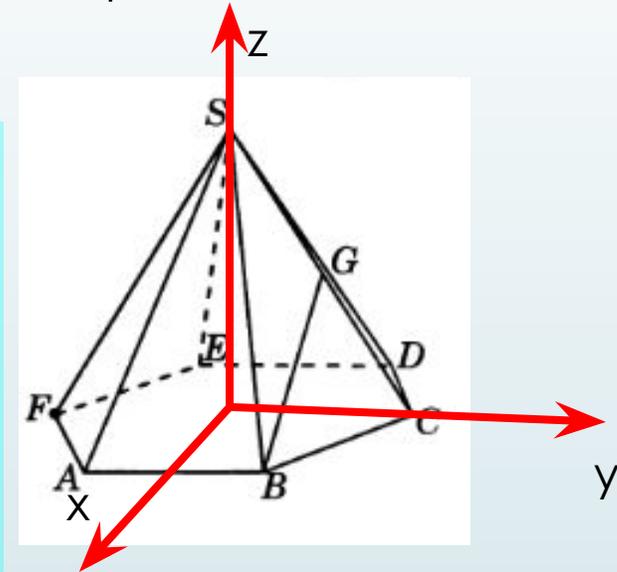
$$FB = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4} + 0} = \sqrt{3}$$

$$FG = \sqrt{0 + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$BG = \sqrt{\frac{3}{4} + 0 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

ΔBFG – равнобедренный

$$FH = \sqrt{3 - \frac{6}{16}} = \sqrt{\frac{21}{8}} = \frac{\sqrt{42}}{4}$$



$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{42}}{4}$$



Задача 5 (Расстояние от точки до плоскости)

В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1

Решение:

Введем прямоугольную систему координат

$$A_1(1;0;1) \quad \begin{cases} a + c + d = 0 \\ d = 0 \\ a + b + d = 0 \end{cases}$$

$$D(0;0;0)$$

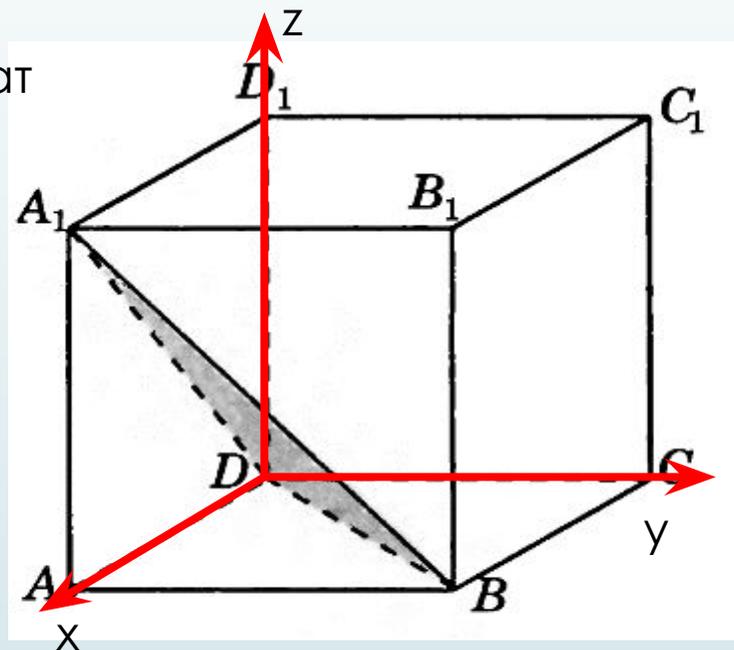
$$B(1;1;0)$$

$$A(1;0;0)$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\rho = \frac{|1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Задача 6 (Расстояние от точки до плоскости)

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки A до плоскости SBC .

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$$

$$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$$

$$C(0; 1; 0)$$

$$SO = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

$$S(0; 0; \sqrt{3})$$

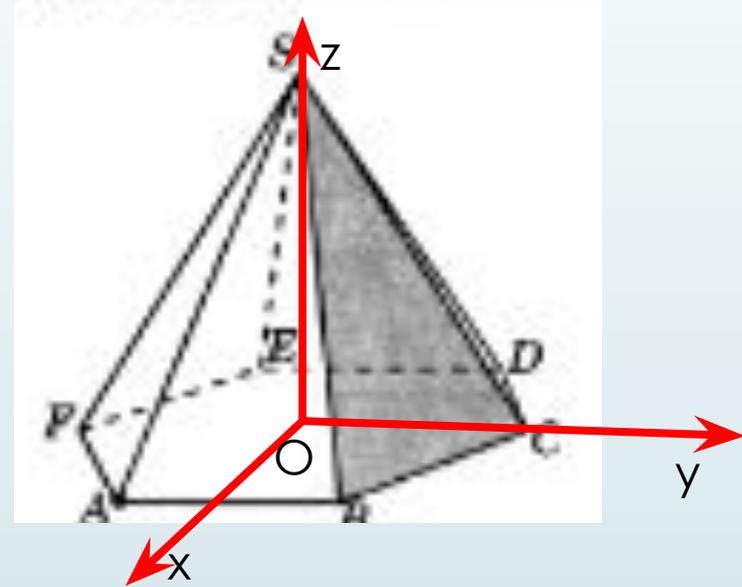
Уравнение _плоскости

SBC :

$$\begin{cases} \sqrt{3}c + d = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b + d = 0 \end{cases}$$

$$b + d = 0$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 3 \\ c = \sqrt{3} \\ d = -3 \end{cases}$$



$$\rho = \frac{\left| \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 \right|}{\sqrt{3+9+3}} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

Ответ : $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 