Предикаты и кванторы. Действия над предикатами и их свойства

Предикаты

Предложения, содержащие переменные, часто встречаются в

- математических утверждениях;
- компьютерных программах;
- спецификациях систем.

Предикаты

Примеры таких предложений:

- “$x > 3$”, “$x = y + 3$”, “$x = y + z$”,
- “компьютер x подвергается атаке хакера”,
- “компьютер x функционирует в нормальном режиме”.

Если значения переменных, входящих в эти предложения, не специфицированы, то эти предложения не являются ни истинными, ни ложными.

Предикаты

- $$\text{“}x > 3\text{”}$$

Предложение “x больше трех” состоит из двух частей:

- первая часть: **переменная x**, – подлежащее предложения;
- вторая часть: “больше трех”, – **предикат** – объясняет, каким свойством обладает подлежащее предложения.

Обозначим предложение “x больше трех” через $P(x)$, где P обозначает предикат, а x – переменную.

Предикаты

- Предложение $P(x)$ еще называют значением **пропозициональной функции** P в точке x.

Как только переменной x будет присвоено определенное значение, утверждение $P(x)$ станет высказыванием, принимающим логическое значение “Истина” или логическое значение “Ложь”.

Предикаты

- Пример 1

Пусть $P(x)$ обозначает утверждение “$x > 3$”. Найдем логические значения высказываний $P(4)$ и $P(2)$.

$P(4)$ – высказывание “$4 > 3$”, которое является истинным.

$P(2)$ – высказывание “$2 > 3$”, которое является ложным.

Предикаты

- <u>Пример 2</u>

Пусть $\mathrm{A}(c, n)$ обозначает утверждение "Компьютер c подсоединен к сети n". Предположим, что компьютер $MATH1$ подсоединен к сети $CAMPUS2$, но не подсоединен к сети $CAMPUS1$. Найдем логические значения $\mathrm{A}(MATH1, CAMPUS2)$ и $\mathrm{A}(MATH1, CAMPUS1)$:

$\mathrm{A}(MATH1, CAMPUS2) = T$;

$\mathrm{A}(MATH1, CAMPUS1) = F$.

Предикаты

<u>Пример 3</u>

Пусть $R(x, y, z)$ обозначает утверждение "$x + y = z$". Найдем логические значения высказываний $R(1, 2, 3)$ и $R(0, 0, 1)$.

Утверждение $R(1, 2, 3)$ – это высказывание "$1 + 2 = 3$", которое истинно.

Утверждение $R(0, 0, 1)$ – это высказывание "$0 + 0 = 1$", которое ложно.

Предикаты

- Предложение, содержащее n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обозначают через $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Предложение $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ еще называют значением **пропозициональной функции** P на n-наборе $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

а P называют n –***местным предикатом*** или n –**арным предикатом**.

Предикаты

- Если переменным, входящим в состав пропозициональной функции, присвоить некоторые значения, то в результате получится высказывание, имеющее определенное истинностное значение.
- Имеется еще один способ образования высказываний из пропозициональных функций, известный как **квантификация**.
- Раздел логики, изучающие предикаты и кванторы, называется **исчислением предикатов**.

Кванторы

Определение 1 Пусть предикат $P(x)$ определен на некоторой области рассуждений U (называемой далее для краткости «область»).

Универсальной квантификацией предиката $P(x)$ относительно области U называется высказывание

$\forall x P(x) \equiv$ "$P(x)$ для всех значений x из области U".

Высказывание $\forall x P(x)$ истинно тогда и только тогда, когда $P(x)$ принимает значение "Истина" для всех значений x из области U.

Кванторы

- $$\forall x P(x)$$

Символ $\forall$ называется **универсальным квантором**.

Мы читаем $\forall x P(x)$ так:

- ”для всех x $P(x)$“;
- ”для каждого x $P(x)$“.

Элемент x, для которого высказывание $P(x)$ ложно, называется **контрпримером** для высказывания $\forall x P(x)$.

Кванторы

- Высказывание $\forall x P(x)$ ложно тогда и только тогда, когда $P(x)$ не является истинным для всех элементов x из области рассуждений U.

Таким образом, высказывание $\forall x P(x)$ ложно тогда и только тогда, когда имеется контрпример для высказывания $\forall x P(x)$ из области рассуждений U.

Кванторы

- <u>Пример 4</u> Пусть $P(x)$ – предикат “$x^2 < 10$”, определенный на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$. Найти логическое значение высказывания $\forall x P(x)$.

Кванторы

- Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на множестве $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, тогда

$$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n).$$

Кванторы

- Пример 5 Пусть $N(x)$ – предикат "Компьютер x подсоединен к сети", определенный на множестве всех компьютеров кампуса. Что означает высказывание $\forall x N(x)$?

Кванторы

<u>Пример 6</u> Найдите логическое значение высказывания $\forall x(x^2 \geq x)$, если

1) область предиката $x^2 \geq x$ состоит из всех вещественных чисел;

2) область предиката $x^2 \geq x$ состоит из всех целых чисел.

Кванторы

- Определение 2 Пусть предикат $P(x)$ определен на некоторой области U.

Экзистенциальной квантификацией предиката $P(x)$ относительно области U называется высказывание

$\exists x P(x) \equiv$ "Существует значение x из области U, для которого $P(x)$".

Высказывание $\exists x P(x)$ истинно тогда и только тогда, когда $P(x)$ принимает значение “Истина” для некоторого значения x из области U.

Кванторы

- $$\exists x P(x)$$

Символ $\exists$ называется

квантором существования.

Мы читаем $\exists x P(x)$ так:

- ”существует x, такой что $P(x)$“;
- ”для некоторого x $P(x)$“.

Кванторы

- Высказывание $\exists x P(x)$ ложно тогда и только тогда, когда $P(x)$ не является истинным для некоторого элемента x из области рассуждений U.

  Таким образом, высказывание $\exists x P(x)$ ложно тогда и только тогда, когда $P(x)$ ложно для любого элемента x из области рассуждений U.

Кванторы

Пример 7

Пусть $P(x)$ обозначает утверждение “$x > 3$”.

Найти логическое значение высказывания

$$\exists x P(x),$$

если область предиката $P(x)$ состоит из всех вещественных чисел.

Кванторы

- <u>Пример 8</u>

Пусть $Q(x)$ обозначает утверждение “$x = x + 1$”.

Найти логическое значение высказывания

$$\exists x Q(x),$$

если область предиката $Q(x)$ состоит из всех вещественных чисел.

Кванторы

- <u>Пример 9</u>

Пусть $P(x)$ – предикат “$x^2 < 10$”, определенный на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$.

Найти логическое значение высказывания $\exists x P(x)$.

Кванторы

- Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на множестве $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, тогда

$$\exists x P(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n).$$

Ограничительные кванторы

- Пример 10 Выясним, что означает утверждение $\forall x < 0\ (x^2 > 0)$, где областью является множество вещественных чисел.

Утверждение $\forall x < 0\ (x^2 > 0)$ означает:

для любого вещественного числа x со свойством $x < 0$ имеет место неравенство $x^2 > 0$, т.е. "Квадрат любого отрицательного числа является числом положительным".

Это утверждение эквивалентно такому утверждению: $\forall x\ (x < 0 \to x^2 > 0)$.

Ограничительные кванторы

- Пример 11

$$\forall x < 0\ (x^2 > 0) \equiv \forall x\ (x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$$

Заметим, что ограничение универсальной квантификации сводится к универсальной квантификации условного высказывания.

Ограничительные кванторы

- Пример 12 Выяснить, что означает утверждение $\forall y \neq 0\ (y^3 \neq 0)$, где областью является множество вещественных чисел.

Ограничительные кванторы

- Пример 13 Выясним, что означает утверждение $\exists z > 0\ (z^2 = 2)$, где областью является множество вещественных чисел.

Утверждение $\exists z > 0\ (z^2 = 2)$ означает: существует вещественное число z со свойством: $z > 0$, для которого имеет место равенство $z^2 = 2$, т.е.

"Существует арифметический квадратный корень из числа 2".

Это утверждение эквивалентно такому утверждению: $\exists z\ (z > 0 \wedge z^2 = 2)$.

Ограничительные кванторы

- Пример 14

$$\exists z > 0\ (z^2 = 2) \equiv \exists z\ (z > 0 \wedge z^2 = 2)$$

Заметим, что ограничение экзистенциальной квантификации сводится к экзистенциальной квантификации конъюнкции.

Логические эквивалентности

Определение 3

Утверждения, содержащие предикаты и кванторы, **логически эквивалентны** тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые логические значения для любых логических значений переменных из области рассуждений.

Если два утверждения S и T, содержащие предикаты и кванторы, логически эквивалентны, то пишут: $S \equiv T$.

Логические эквивалентности

- Пример 15 Показать, что

$$\forall x(P(x) \land Q(x)) \quad \text{и} \quad \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$$

логически эквивалентны при условии что предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ заданы на одной области U.

Следует доказать два утверждения:

- если истинно $\forall x(P(x) \land Q(x))$, то $\forall x P(x) \land \forall x Q(x)$ истинно;
- если $\forall x P(x) \land \forall x Q(x)$ истинно, то $\forall x(P(x) \land Q(x))$ истинно.

Логические эквивалентности

- Пример 15

Докажем, что если истинно $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$, то $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ также истинно.

Предположим, что $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) = \mathrm{T}$. Это означает, что если элемент a принадлежит области U, то $P(a) \wedge Q(a) = \mathrm{T}$. Следовательно, $P(a) = \mathrm{T}$ и $Q(a) = \mathrm{T}$ для любого элемента a из области U.

Значит, $\forall x P(x) = \mathrm{T}$ и $\forall x Q(x) = \mathrm{T}$. Отсюда следует, что $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) = \mathrm{T}$.

Логические эквивалентности

- Пример 15

Докажем, что если истинно $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$, то $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ также истинно.

Предположим, что $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) = \mathrm{T}$. Отсюда следует, что $\forall x P(x) = \mathrm{T}$ и $\forall x Q(x) = \mathrm{T}$. Следовательно, если элемент а принадлежит области U, то $P(a) = \mathrm{T}$ и $Q(a) = \mathrm{T}$. Значит, для всех a из области U имеет место равенство $P(a) \wedge Q(a) = \mathrm{T}$. Отсюда следует, что $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) = \mathrm{T}$.

Доказательство закончено.

Отрицания квантифицированных выражений

- Пример 16

Рассмотрим отрицание утверждения «Каждый студент Вашей группы изучает курс математического анализа». Это утверждение запишем в виде $\forall x P(x)$, где $P(x)$ – утверждение «студент x Вашей группы изучает курс математического анализа», а область состоит из студентов Вашей группы.

Отрицание исходного утверждения:

«Неверно, что каждый студент Вашей группы изучает курс математического анализа».

Отрицания квантифицированных выражений

• Пример 16

Отрицание исходного утверждения:

«Неверно, что каждый студент Вашей группы изучает курс математического анализа».

Это можно сказать по-другому:

«В Вашей группе есть студент, который не изучает курс математического анализа»:

$$\exists x \neg P(x).$$

Отрицания квантифицированных выражений

- Первый закон Де Моргана для кванторов:

$$\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

Доказательство

$\neg\forall x P(x) = \mathrm{T}$ тогда и только тогда, когда $\forall x P(x) = F$.

$\forall x P(x) = F$ тогда и только тогда, когда найдется элемент a из области, для которого $\neg P(a) = \mathrm{T}$.

$\neg P(a) = \mathrm{T}$ тогда и только тогда, когда $\exists x \neg P(x) = \mathrm{T}$.■

Отрицания квантифицированных выражений

- Пример 17 Рассмотрим отрицание утверждения «В Вашей группе есть студент, который изучает курс математического анализа».

Это утверждение запишем в виде $\exists x P(x)$, где $P(x)$ – утверждение «студент x Вашей группы изучает курс математического анализа», а область состоит из студентов Вашей группы.

Отрицание исходного утверждения:

«Неверно, что в Вашей группе есть студент, который изучает курс математического анализа».

Отрицания квантифицированных выражений

- Пример 17

Отрицание исходного утверждения:«Неверно, что в Вашей группе есть студент, который изучает курс математического анализа».

Это можно сказать по-другому:

«В Вашей группе ни один студент не изучает курс математического анализа»:

$$\forall x \neg P(x).$$

Отрицания квантифицированных выражений

- Второй закон Де Моргана для кванторов:

$$\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

Вложенные кванторы

- <u>Пример 18</u>

Записать предложение «Сумма двух положительных чисел – число положительное» в виде логического выражения.

<u>Решение</u>

$\forall x \forall y ((x > 0) \wedge (y > 0) \to (x + y) > 0))$,

где множество целых чисел – область для обеих переменных.

Вложенные кванторы

- <u>Пример 19</u>

Записать определение предела вещественной функции f вещественного аргумента x в точке a из ее области определения.

<u>Решение</u>

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \; (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Вложенные кванторы

<u>Пример 20</u>

Записать на русском языке следующее логическое выражение:

$\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x, y)))$, где

$C(x)$ – «x имеет компьютер», $F(x, y)$ – «x и y – друзья», области для x и y – все студенты первого курса математического факультета.

<u>Решение</u>

Каждый студент первого курса математического факультета имеет компьютер или имеет друга, у которого есть компьютер.

Вложенные кванторы

- <u>Пример 21</u>

Постройте отрицание утверждения

$$\forall x \exists y (xy = 1)$$

так, чтобы отрицания не стояли перед кванторами.

<u>Решение</u>

$$\exists x \forall y (xy \neq 1)$$

Вложенные кванторы

- Пример 22

Постройте отрицание определения предела вещественной функции f вещественного аргумента x в точке a из ее области определения, т.е. отрицание выражения

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\ (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Решение

$$\forall L\ \exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x\ (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon),$$

где множество вещественных чисел – область для всех переменных.

Вложенные кванторы

<u>Пример 23</u>

Пусть $Q(x,y)$ означает «$x+y=0$». Определите логические значения высказываний

$$\exists y \forall x Q(x,y) \quad \text{и} \quad \forall x \exists y Q(x,y),$$

если области переменных x и y – все вещественные числа.

<u>Решение</u>

$\exists y \forall x Q(x,y) = F$, $\forall x \exists y Q(x,y) = T$

Вывод: порядок кванторов в выражениях с вложенными кванторами является существенным.