Формулы тригонометрии

Синус и косинус разности аргументов

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$$

Пример 1

$$\text{\textit{Вычислить}}: \sin 75^\circ$$

$$\sin 75^\circ = \quad \sin(30^\circ + 45^\circ) =$$

$$= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \quad \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \quad \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Пример 2

$$\textit{Вычислить}: \cos 15^\circ$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) =$$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Пример 3

Вычислить : $\sin 48^\circ \cdot \cos 12^\circ + \cos 48^\circ \cdot \sin 12^\circ$

$$\sin 48^\circ \cdot \cos 12^\circ + \cos 48^\circ \cdot \sin 12^\circ =$$

$$= \sin(48^\circ + 12^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пример 4

$$\textit{Вычислить}: \cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right), \textit{если} \quad \cos y = -\frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} \le y \le \pi$$

II

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos y + \sin\frac{\pi}{3}\sin y = \frac{1}{2}\cos y + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{5} = -\frac{3}{10} + \frac{4\sqrt{3}}{10} = \frac{-3+4\sqrt{3}}{10}$$

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

$$\sin^2 y + \frac{9}{25} = 1 \qquad \sin^2 y = \frac{16}{25}$$

$$\sin^2 y = 1 - \frac{9}{25} \qquad \sin y = \frac{4}{5}$$

Тангенс суммы и разности аргументов

$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy}$$

$$tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgx\cdot tgy}$$

Котангенс суммы и разности аргументов

$$ctg(x+y)=\frac{ctgx\cdot ctgy-1}{ctgx+ctgy}$$

$$ctg(x-y)=\frac{ctgx\cdot ctgy+1}{ctgx-ctgy}$$

Пример 1

$$Вычислить: tg75°$$

$$tg75° = tg(30°+45°) = \frac{tg30°+tg45°}{1-tg30°\cdot tg45°} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

Пример 2

$$Вычислить: tg(\frac{\pi}{4}-x), если \cos x=-\frac{3}{5}, \frac{\pi}{2}\le x\le\pi$$

$$tg(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{tg\frac{\pi}{4}-tgx}{1+tg\frac{\pi}{4}\cdot tgx}=\frac{1-tgx}{1+tgx}=\frac{1+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}}=\frac{1\frac{4}{3}}{-\frac{1}{3}}=\frac{7}{3}:(-\frac{1}{3})=-7$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\sin^2 x+\frac{9}{25}=1$$

$$\sin^2 x=1-\frac{9}{25}$$

$$tgx=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{4}{5}:(-\frac{3}{5})=-\frac{4}{3}$$

$$\sin^2 x=\frac{16}{25}$$

$$\sin x=\frac{4}{5}$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$tg\,2x = \frac{2tg\;x}{1 - tg^2\;x}$$

$$ctg\,2x = \frac{ctg^2 x - 1}{2ctgx}$$

Пример 1

Доказать тождество: $1+\sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$

$\mathbf{1+\sin 2x =}$ $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x =$

$= \sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x =$ $\mathbf{(\sin x + \cos x)^2}$

Пример 2

Сократить дробь: $\dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$

$$\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x} =$$

$$= \frac{(\sin x+\cos x)^{\cancel{2}}}{(\cos x-\sin x)\cdot\cancel{(\cos x+\sin x)}} = \frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}$$

Пример 3

Вычислить: $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$

$$\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos(2\cdot\frac{\pi}{8})=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Пример 4

Зная, что $cos x = \frac{3}{5}, x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right)$, *вычислить* $\cos 2x$:

IV

$$cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x + \frac{9}{25} = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\sin^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\sin x = -\frac{4}{5}$$

Формулы понижения степени.

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$$

$$tg^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$ctg^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

Пример 2

$$\textit{Зная, что}\cos x=\frac{-5}{13},x\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right),\textit{вычислите}\cos\frac{x}{2}$$

II

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}=\frac{1-\frac{5}{13}}{2}=\frac{8}{13}:2=\frac{8}{13}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{13}$$

$$\cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{4}{13}}$$

$$\cos\frac{x}{2}=-\frac{2}{\sqrt{13}}$$

Разложение суммы и разности на множители

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$

Формулы представления произведения в виде суммы

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$$