Методы решения логарифмических уравнений.

Метод решения хорош, если с самого начала мы можем предвидеть –
и в последствии подтвердить это, и что, следуя нашему методу, мы достигнем цели.

Лейбниц

Уравнения.

- Линейные
- Квадратные
- Рациональные
- Иррациональные
- Тригонометрические
- Показательные
- Логарифмические

Определение логарифмического уравнения

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим

$$\log_a x = b$$

Где $a > 0$, $a \neq 1$ Оно имеет единственное решение

$x = a^b$ при любом b.

Определение логарифма.

Логарифмом данного числа по данному основанию называется показатель степени, в которую надо возвести это основание, чтобы получить данное число.

$$a^{\log_a x} = x, a\rangle 0, x\rangle 0, a \neq 1$$

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ,

ГДЕ А И В – ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ А > 0, А ≠ 1

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a b^r = r\log_a b$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a - \log_a c$$

$$\log_a a^c = c$$

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a x^{2n} = 2n\log_a |x|, (n \in Z)$$

$$\log_a b = \log_{a^r} b^r$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Основные сведения о логарифмах.

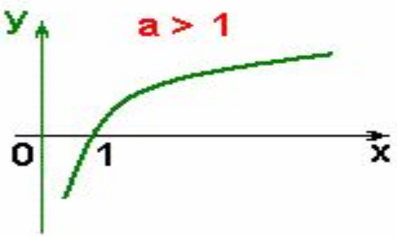
Логарифм

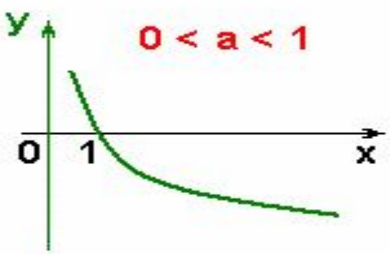
$\log_a x = b$, если $a^b = x$

$\log_a a^b = b$	$a^{\log_a x} = x$

Логарифмическая функция

$y = \log_a x$ $\quad a > 0,\ a \neq 1$





$\lg x = \log_{10} x$	$e^{\ln x} = x$
$\ln x = \log_e x$	$e^{x \ln a} = a^x$
$e = 2{,}71828...$	$\ln e^x = x$

Свойства

1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$

4) $\log_a 1 = 0$ $\qquad$ 5) $\log_a a = 1$

6) $\log_{a^n} x = \dfrac{1}{n} \log_a x$

7) $\log_{a^n} a^m = \dfrac{m}{n}$

8) $\log_{\left(\frac{1}{a}\right)^n} a^m = -\dfrac{m}{n}$

9) $\log_{a^n} \left(\dfrac{1}{a}\right)^m = -\dfrac{m}{n}$

10) $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

Задание 1

1 вариант

1. $3^{\log_3 4} =$
2. $\log_4 4 =$
3. $\log_3 1 =$
4. $\log_{-5} 5 =$
5. $\log_6 2 + \log_6 3 =$
6. $\log_2 32 =$
7. $\log_3 \sqrt{3}$
8. $\log_2 28 - \log_2 7 =$

2 вариант

1. $5^{\log_5 7} =$
2. $\log_4 1 =$
3. $\log_6 6 =$
4. $\log_5 (-2) =$
5. $\log_3 27 =$
6. $\log_2 15 - \log_2 30 =$
7. $\log_7 \frac{1}{7}$
8. $\log_{15} 3 + \log_{15} 5 =$

Методы решения логарифмических уравнений

1. *Решение уравнений по свойствам логарифма.*
2. *Решение уравнений по определению логарифма*
3. *Решение уравнений заменой переменной.*

Пути решения уравнений

1. Выбрать метод решения.
2. Решить уравнение.
3. Проверить найденные корни непосредственной подстановкой в исходное уравнение.

Решение логарифмического уравнения по определению логарифма

1. Решите уравнение: $2^{\log_2(x-17)} = 13$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$2^{\log_2(x-17)} = 13$	$a^{\log_a в} = в$
x – 17 = 13	**Перенесём число 2 в правую часть**
x = 13 +17 = 30	**Сделаем проверку**
$2^{\log_2(30-17)} = 13$	**Посчитаем в скобках**
$2^{\log_2 13} = 13$	$a^{\log_a в} = в$
13=13	**Верно**

Ответ: x = 30

Решение логарифмического уравнения по определению логарифма

2. Решите уравнение: $6^{\log_6(x^2-3)}=1$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$6^{\log_6(x^2-3)}=1$	$a^{\log_a в}=в$
$x^2 - 3 = 1$	Перенесём число 3 в правую часть
$x^2 = 1 + 3$	Приведём подобные
$x^2 = 4$,	Решим неполное квадратное уравнение
$x_1 = 2$, $x_2 = -2$	Сделаем проверку
$6^{\log_6(2^2-3)}=1$ $\quad$ $6^{\log_6((-2)^2-3)}=1$	Подставляем числа
$6^{\log_6(4-3)}=1$ $\quad$ $6^{\log_6(4-3)}=1$	Посчитаем в скобках
$6^{\log_6 1}=1, 1=1$ $\quad$ $6^{\log_6 1}=1, 1=1$	$a^{\log_a в}=в$ Верно

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$

Что надо знать и уметь,
для того, чтобы решить логарифмическое уравнение

1. Знать определение логарифма.
2. Уметь решать линейное и квадратное уравнение.

Задание 2

$1.\ 3^{\log_3(x+20)} = 15$ $\quad$ $1.\ 2^{\log_2(x-12)} = 4$

$2.\ 7^{\log_7(x^2-1)} = 80$ $\quad$ $2.\ 5^{\log_5(x^2-2x)} = 0$

Решение логарифмического уравнения по определению логарифма

3. Решите уравнение: $\lg x = -3$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\lg x = -3$	$\lg 10^b = b$
$\lg x = \lg 10^{-3}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\lg x = \lg \frac{1}{10^3}$	**Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию**
$\frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$	**Сделаем проверку**
$\lg 0{,}001 = -3$	$0{,}001 = 10^{-3}$
$\lg 10^{-3} = -3$	$\lg 10^b = b$
- 3 = - 3	**Верно**

Ответ: x = 0,001

Решение логарифмического уравнения по определению логарифма

4. Решите уравнение: $\log_7(5-x)=3$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\log_7(5-x)=3$	$\log_a a^b = b$
$\log_7(5-x)=\log_7 7^3$	**Возведём 7 в куб**
$\log_7(5-x)=\log_7 343$	**Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию**
5 - x = 343,	**Решим линейное уравнение**
-x = 343 - 5	**Неизвестные оставим в левой части, числа переносим вправо**
- x = 338	**Умножим все части на (-1)**
x = - 338	**Сделаем проверку**

Решение логарифмического уравнения по определению логарифма

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\log_7(5-(-338))=3$	**Подставим**
$\log_7(5+338)=3$	**Посчитаем в скобках**
$\log_7 343=3$	**$343 = 7^3$**
$\log_7 7^3=3$	$\log_a a^b = b$
3 = 3	**Верно**

Ответ: x = - 338

Задание 3

$1. \log_6 x = 2$

$2. \log_2(-1 - x) = 3$

$1. \log_5 x = -2$

$2. \log_3(9 + x) = 4$

Решение логарифмического уравнения по свойствам логарифма

5. Решите уравнение: $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$	$\log_a x+\log_a y=\log_a(x\cdot y)$
$\log_3(x+1)(x+3)=1$	$\log_a a=1$
$\log_3(x+1)(x+3)=\log_3 3$	**Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию**
$(x+1)(x+3)=3$	**Раскроем скобки**
$x^2+3x+x+3=3$	**Приведём подобные**
$x^2+4x+3-3=0$	**Перенесём все слагаемые в лево**
$x^2+4x=0$	**Решим неполное квадратное уравнение**

Решение логарифмического уравнения по свойствам логарифма

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$x^2+4x=0$ $x(x+4)=0$	**Вынесем за скобки общий множитель**
$x=0 \, или$ $x+4=0, x=-4$	**Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю**
$x=0$ $\log_3(0+1)+\log_3(0+3)=1$	**Сделаем проверку**
$\log_3 1+\log_3 3=1$ $0+1=1, 1=1$	$\log_a 1=0, \log_a a=1$
$x=-4$	**Верно**
$\log_3(-4+1)=\log(-3)$	**Посторонний корень**
	Не существует логарифма от отрицательного числа.

Решение логарифмического уравнения по свойствам логарифма

6. Решите уравнение: $\lg(x^2+2x-7)-\lg(x-1)=0$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\lg(x^2+2x-7)-\lg(x-1)=0$	$\log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y}$
$\lg\frac{x^2+2x-7}{x-1}=0$	$\log_a 1=0$
$\lg\frac{x^2+2x-7}{x-1}=\lg 1$	Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию
$\frac{x^2+2x-7}{x-1}=1$	Применим свойство пропорции
$x^2+2x-7=x-1$	Перенесём все слагаемые влево
$x^2+2x-7-x+1=0$	Приведём подобные
$x^2+x-6=0$	Решим квадратное уравнение

Решение логарифмического уравнения по свойствам логарифма

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$x^2+x-6=0$	a = 1, b = 1, c = -6
$D=1^2-4\cdot 1\cdot(-6)=1+24=25$	$D=b^2-4ac$
$x_1=\dfrac{-1-5}{2\cdot 1}=\dfrac{-6}{2}=-3$	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$
$x_2=\dfrac{-1+5}{2\cdot 1}=\dfrac{4}{2}=2$	
$x=2$	Сделаем проверку
$\lg(2^2+2\cdot 2-7)-\lg(2-1)=0$	
$\lg 1-\lg 1=0{,}0=0$	Верно
$x=-3$	Посторонний корень
$\lg(-3-1)=\lg(-4)$	Не существует логарифма от отрицательного числа.

Ответ: x = 2

Задание 4

$$1. \log_3(x-2)+\log_3(x+2)=\log_3(2x-1)$$

$$2. \log_{3,4}(x^2-5x+8)-\log_{3,4}x=0$$

$$1. \log_{0,4}(x+2)+\log_{0,4}(x+3)=\log_{0,4}(1-x)$$

$$2. \log_{23}(2x-1)-\log_{23}x=0$$

Введение новой переменной

$$A\log_a^2 f(x) + B\log_a f(x) + C = 0,$$

где а > *0,* а ≠ *1,* А*,* В*,* С – действительные числа.

Пусть $t = log_a f(x)$, $t \in R$.

Уравнение примет вид $t^2 + Bt + C = 0$.

Решив его, найдём x из подстановки $t = \log_a f(x)$.

Учитывая область определения, выберем только те значения x, которые удовлетворяют неравенству $f(x) > 0$.

Решение логарифмического уравнения введением новой переменной

7. Решите уравнение: $\log_3^2 - \log_3 x - 2 = 0$

Решение уравнения:	Пояснения и применяемые формулы:
$\log_3^2 - \log_3 x - 2 = 0$	**Обозначим:** $\log_3 x = t$
$t^2 - t - 2 = 0$	**Решим квадратное уравнение**
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$	$D = b^2 - 4ac$
$t_1 = \frac{1-3}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$ $t_2 = \frac{1+3}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$	$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
$\log_3 x = -1$ $\log_3 x = 2$	$\log_a a^b = b$
$\log_3 x = \log_3 3^{-1}$ $\log_3 x = \log_3 3^2$ $x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ $x = 3^2 = 9$	**Левая и правая часть уравнения приведена к логарифму по одному основанию**

Ответ: $x_1 = 1/3$, $x_2 = 9$.

Задание 5

$1.\ 2\log_5^2 x + 5\log_5 x + 2 = 0$

$2.\ \log_{\frac{1}{2}}^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0$

$1.\ 3\log_4^2 x - 7\log_4 x + 2 = 0$

$2.\ \log_5^2 x + \log_5 x - 6 = 0$

Задание 6

1. $4^{\log_4(x+7)} = 11$
2. $\log_3(5x-1) = 2$
3. $\log_5(x-1) + \log(x-2) = \log(x+2)$
4. $\log_2^2 x - 3\log_2 x - 4 = 0$
5. $\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} x = 4$

1. $2^{\log_2(x-15)} = 4$
2. $\log_4(5+2x) = 3$
3. $\lg^2 x + \lg x + 6 = 0$
4. $\log_{23}(2x-1) - \log_{23} x = 0$
5. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

Решение логарифмического уравнения приведением к одному основанию

8. Решите уравнение: $3\log_x 16 - 4\log_{16} x = 2\log_2 x$

Приведём все логарифмы к основанию 2 по свойству логарифма:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

$$\log_x 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 x} = \frac{\log_2 2^4}{\log_2 x} = \frac{4\log_2 2}{\log_2 x} = \frac{4}{\log_2 x}$$

$$\log_{16} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 16} = \frac{\log_2 x}{\log_2 2^4} = \frac{\log_2 x}{4\log_2 2} = \frac{\log_2 x}{4}$$

Подставим в исходное уравнение полученные результаты:

$$3\frac{4}{\log_2 x} - 4\frac{\log_2 x}{4} = 2\log_2 x$$

$$\frac{12}{\log_2 x} - \log_2 x = 2\log_2 x$$

Решение логарифмического уравнения приведением к одному основанию

$$\frac{12}{\log_2 x} = 2\log_2 x + \log_2 x$$

Приведём подобные

$$\frac{12}{\log_2 x} = 3\log_2 x$$

Умножим обе части уравнения на

$$\log_2 x = 4$$

$$3\log_2^2 x = 12$$

$$\log_2^2 x = 4$$

Разделим обе части уравнения на

12

Получили уравнение вида: $x^2 = a$

$$\log_2 x = 2$$

$$\log_2 x = \log_2 2^2$$

$$x = 2^2 = 4$$

$$\log_2 x = -2$$

$$\log_2 x = \log_2 2^{-2}$$

$$x = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = 0{,}25$

Методы решения логарифмических уравнений

1. *Решение уравнений по свойствам логарифма.*
2. *Решение уравнений по определению логарифма*
3. *Решение уравнений заменой переменной.*
4. *Приведение обоих частей уравнения к логарифму по одному основанию.*

Закрепление

$$2\log_5 x + 2\log_x 5 = 5$$

$$\log_x 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 x} = \frac{1}{\log_5 x}$$

$$2\log_5 x + 2\frac{2}{\log_5 x} = 5$$

$$2\log_5^2 x + 2 = 5\log_5 x$$

$$2\log_5^2 x - 5\log_5 x + 2 = 0 \qquad \log_5 x = t$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 25 - 16 = 9$$

$$t_1 = \frac{5-3}{2\cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$t_2 = \frac{5+3}{2\cdot 2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\log_5 x = \frac{1}{2}$$

$$\log_5 x = \log_5 5^{\frac{1}{2}}$$

$$x = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$$\log_5 x = 2$$

$$\log_5 x = \log_5 5^2$$

$$x = 5^2 = 25$$

Ответ: $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 =$ 25

Гимнастика для глаз

- Сильно зажмурьте глаза, откройте глаза и посмотрите на предмет перед Вами (повторите 5 раз).

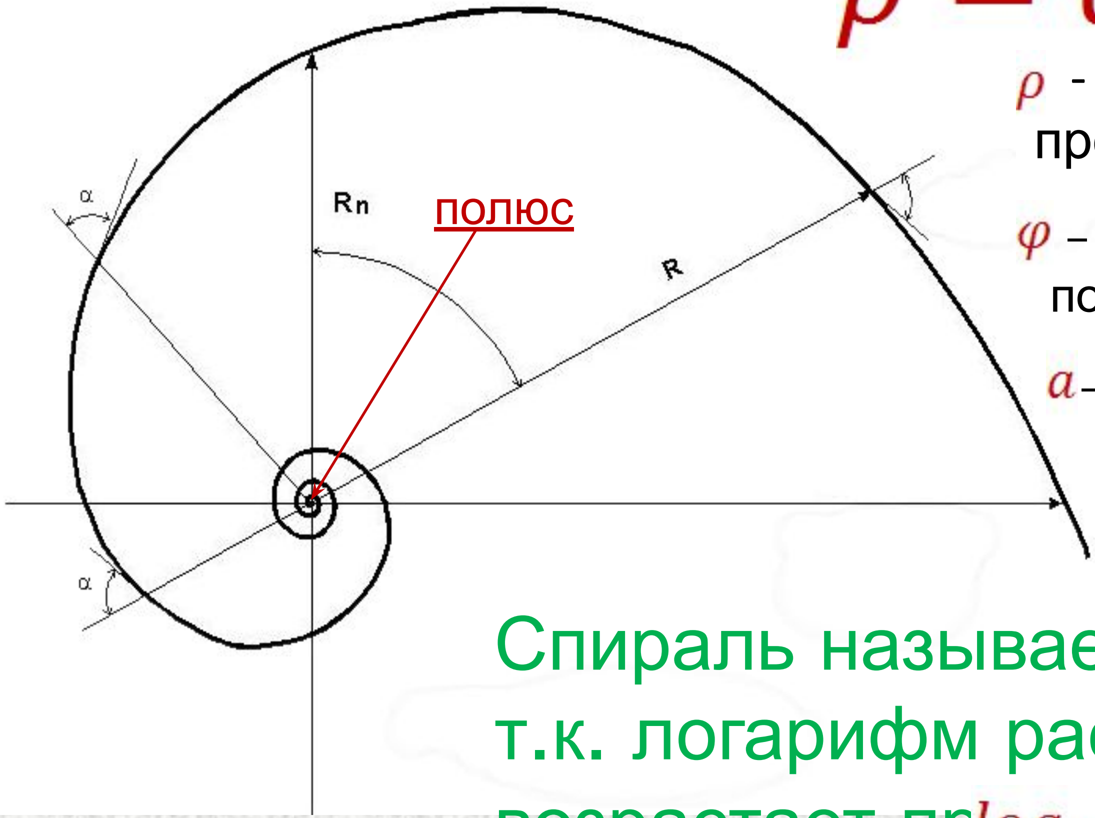
- Закройте глаза, откройте глаза, посмотрите направо, посмотрите налево (повторите 5 раз).

- Сильно зажмурьте глаза, откройте глаза и посмотрите на предмет вдали от вас (повторите 5 раз).

Логарифмическая спираль

Уравнение логарифмической спирали

$$\rho = a^{\varphi}, \text{где } a > 0$$



ρ - расстояние от полюса до произвольной точки на спирали

φ – угол поворота относительно полюса

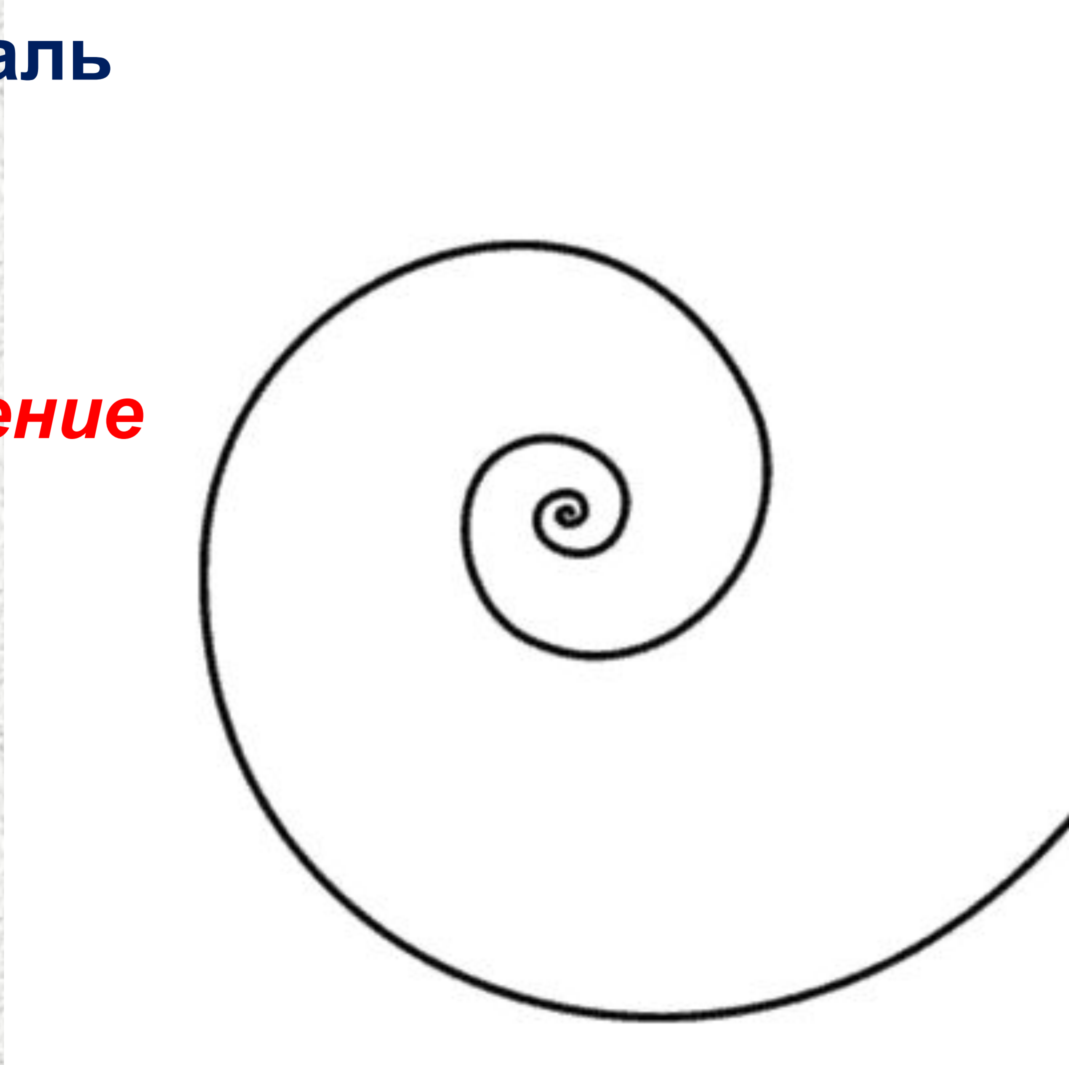
a – постоянная

или $$\varphi = log_a\rho$$

Спираль называется логарифмической, т.к. логарифм расстояния ($log_a\rho$) возрастает пропорционально углу поворота φ

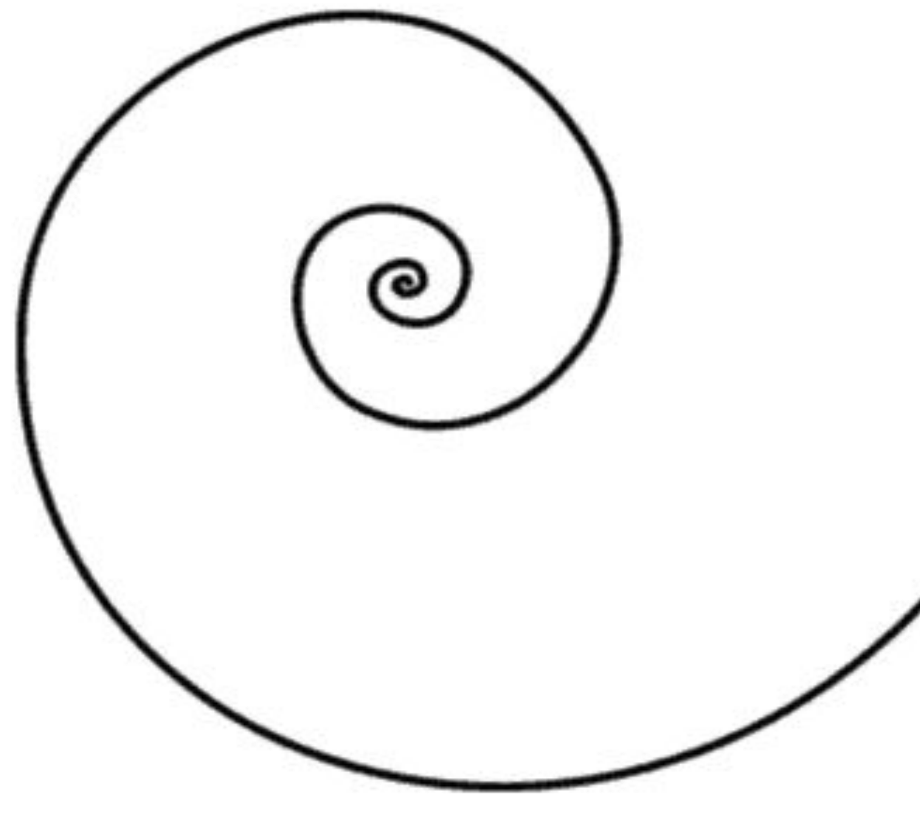
Свойство:

Если вращать спираль вокруг полюса по часовой стрелке, то можно наблюдать кажущееся *растяжение* спирали.



Свойство:

Если вращать спираль вокруг полюса против часовой стрелки, то можно наблюдать кажущееся ***сжатие*** **спирали.**



Логарифмы в природе

Спирали широко проявляют себя в живой природе. Спирально закручиваются усики растений, по спирали происходит рост тканей в стволах деревьев.

В подсолнухе семечки расположены по дугам, близким к **логарифмической спирали**

Рога животных растут лишь с одного конца. Этот рост осуществляется по **логарифмической спирали**. Например, рога баранов, коз, антилоп и других рогатых животных.

Раковины морских животных могут расти лишь в одном направлении. Чтобы не слишком вытягиваться в длину, им приходится скручиваться, причем каждый следующий виток подобен предыдущему. Поэтому раковины многих моллюсков, улиток, закручены по логарифмической спирали.

По логарифмической спирали формируется тело циклона

Всем спасибо за работу на уроке!

Удачи в освоении математики