

Метод математической ИНДУКЦИИ



Утверждения



Общие

Все граждане России
имеют право на образование.

Во всяком параллелограмме
диагонали в точке пересечения
делятся пополам.

Все числа, оканчивающиеся
нулём, делятся на 5.

Частные

Петров имеет право на
образование.

В параллелограмме ABCD
диагонали в точке пересечения
делятся пополам.

140 делится на 5.



Дедукция –

переход от общих утверждений к частным.

Пример.

Все граждане России имеют право на образование.

Петров – гражданин России.

Петров имеет право на образование.



Индукция –

переход от частных утверждений к общим.

Пример.

140 делится на 5.

Все числа, оканчивающиеся нулём, делятся на 5.

140 делится на 5.

Все трёхзначные числа делятся на 5.

Знаменитый математик XVII в. П.Ферма
проверив, что числа



$$2^{2^0} + 1 = 3$$

$$2^{2^1} + 1 = 5$$

$$2^{2^2} + 1 = 17$$

$$2^{2^3} + 1 = 257$$

$$2^{2^4} + 1 = 65537$$

простые, сделал по индукции
предположение, что для всех
 $n=1,2,3,\dots$ числа вида

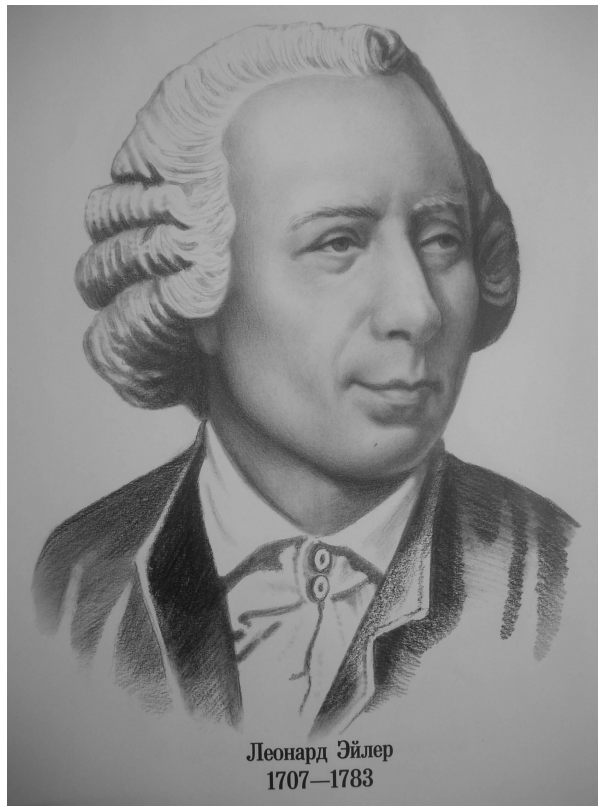
$$2^{2^n} + 1$$

простые.

В XVIII веке Л.Эйлер нашел, что при $n=5$

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

составное число.





Индукция

```
graph TD; A[Индукция] --> B[Полная]; A --> C[Неполная]
```

Полная

Неполная

Требуется установить, что каждое натуральное чётное число n в пределах $4 < n < 20$ представимо в виде суммы двух простых чисел.

Для этого возьмём все такие числа и выпишем соответствующие разложения:

$4=2+2$; $6=3+3$; $8=5+3$; $10=7+3$; $12=7+5$; $14=7+7$; $16=11+5$;
 $18=13+5$; $20=13+7$.

Эти девять равенств показывают, что каждое из интересующих нас чисел действительно представляется в виде суммы двух простых слагаемых.



Задача.

Перед нами последовательность нечетных чисел натурального ряда.

$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots$

Чему равна сумма n первых членов этой последовательности?



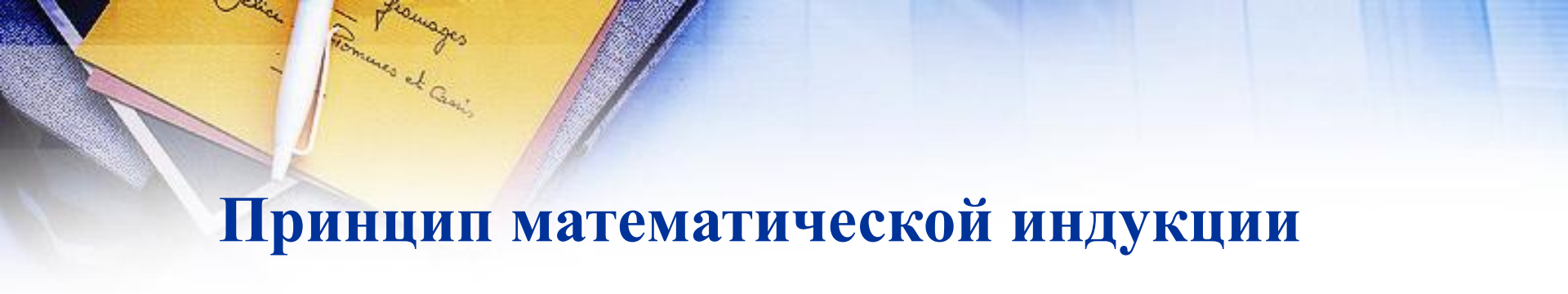
Решение:

Рассмотрим частные случаи:

- $1 = 1^2$
- $1 + 3 = 4 = 2^2$
- $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
- $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
- $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2 \dots$

Общий вывод: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

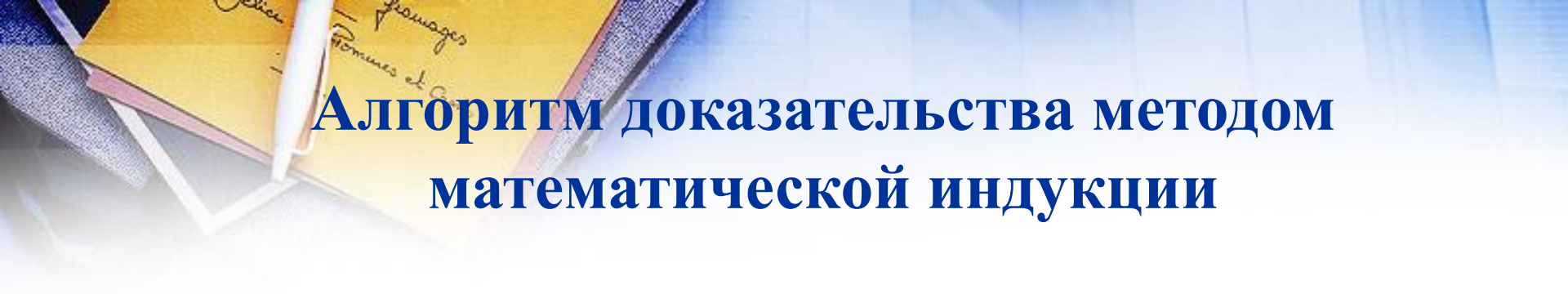
Как же узнать, справедливо ли это утверждение вообще?



Принцип математической индукции

Утверждение $P(n)$ справедливо для всякого натурального n , если:

1. Оно справедливо для $n=1$ или для наименьшего из натуральных чисел при котором закономерность имеет смысл.
2. Из справедливости утверждения для какого либо произвольного натурально $n=k$ следует его справедливость для $n=k+1$.



Алгоритм доказательства методом математической индукции

1. Проверяют справедливость гипотезы для наименьшего из натуральных чисел при котором гипотеза имеет смысл (базис индукции).
2. Сделав предположение, что гипотеза верна для некоторого значения k , стремятся доказать справедливость ее для $k+1$ (индукционный шаг).
3. Если такое доказательство удалось довести до конца, то, на основе принципа математической индукции можно утверждать, что высказанная гипотеза справедлива для любого натурального числа n .

Суть доказательства
методом математической индукции:

1. **базис** проверить верность утверждения при $n = 1$
2. **индукционный шаг**
 - допустить, что утверждение верно при $n = k$
 - доказать, что утверждение верно при $n = k + 1$

Докажите, что $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.



Доказать, что $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$.

Доказательство:

1. Имеем $n=1=1^2$. Следовательно, утверждение верно при $n=1$.
2. Пусть k -любое натуральное число и пусть утверждение справедливо для $n=k$, т.е.
 $1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$.

Докажем, что тогда утверждение справедливо и для следующего натурального числа $n=k+1$, т.е. что $1+3+5+\dots+(2k+1)=(k+1)^2$.

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2.$$

Итак, утверждение $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ истинно для любого натурального n .

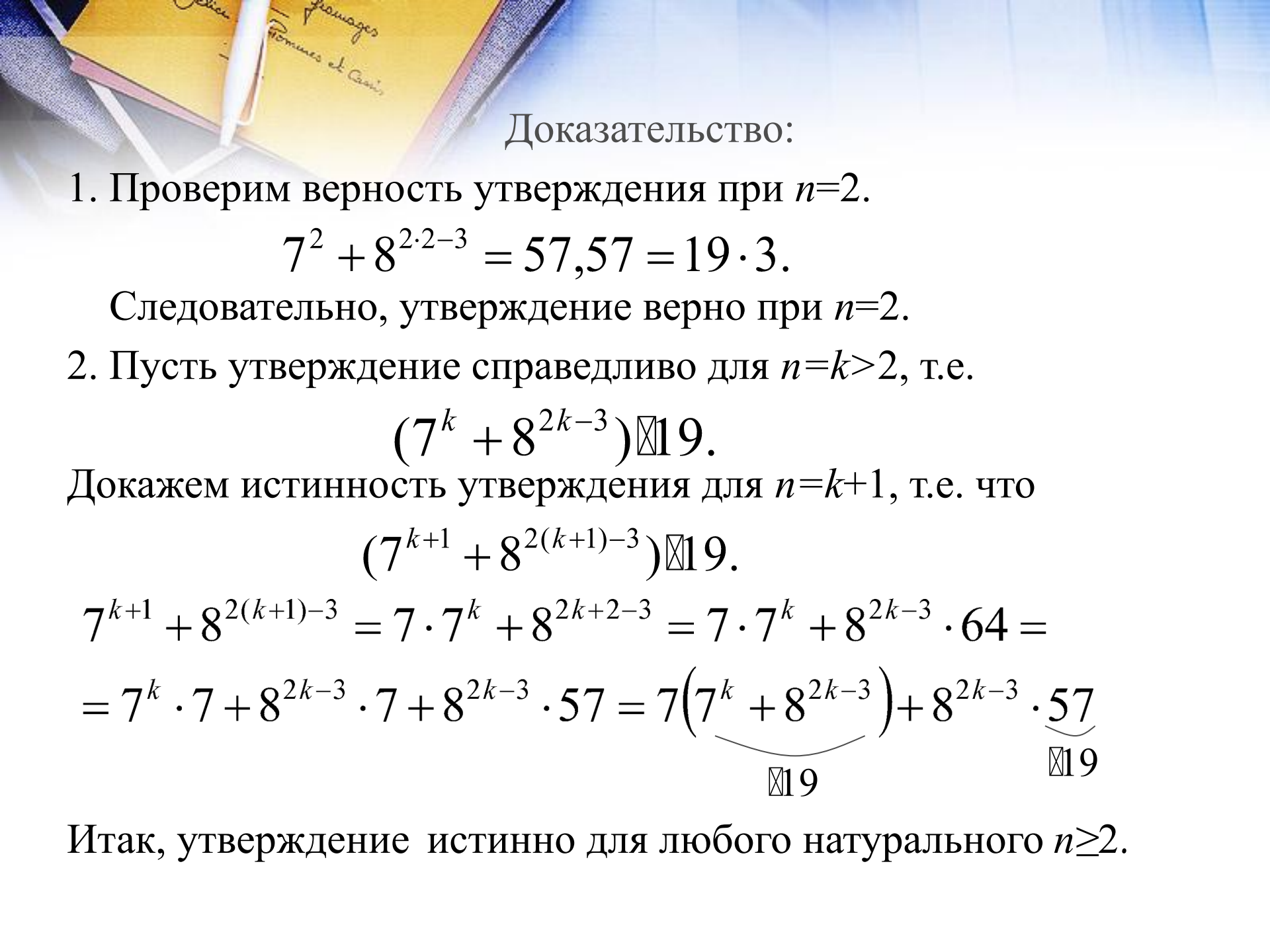


Задача

Доказать, что

$$(7^n + 8^{2n-3}) \equiv 19$$

при $n \geq 2$.



Доказательство:

1. Проверим верность утверждения при $n=2$.

$$7^2 + 8^{2 \cdot 2 - 3} = 57, 57 = 19 \cdot 3.$$

Следовательно, утверждение верно при $n=2$.

2. Пусть утверждение справедливо для $n=k>2$, т.е.

$$(7^k + 8^{2k-3}) \equiv 19.$$

Докажем истинность утверждения для $n=k+1$, т.е. что

$$(7^{k+1} + 8^{2(k+1)-3}) \equiv 19.$$

$$\begin{aligned} 7^{k+1} + 8^{2(k+1)-3} &= 7 \cdot 7^k + 8^{2k+2-3} = 7 \cdot 7^k + 8^{2k-3} \cdot 64 = \\ &= 7^k \cdot 7 + 8^{2k-3} \cdot 7 + 8^{2k-3} \cdot 57 = 7 \underbrace{(7^k + 8^{2k-3})}_{\equiv 19} + 8^{2k-3} \cdot \underbrace{57}_{\equiv 19} \end{aligned}$$

Итак, утверждение истинно для любого натурального $n \geq 2$.



Задача

Доказать, что для любого натурального числа n истинно утверждение

$$(8^n + 6) \not\equiv 7$$



Задача

Доказать, что сумма n первых чисел
натурального ряда равна

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

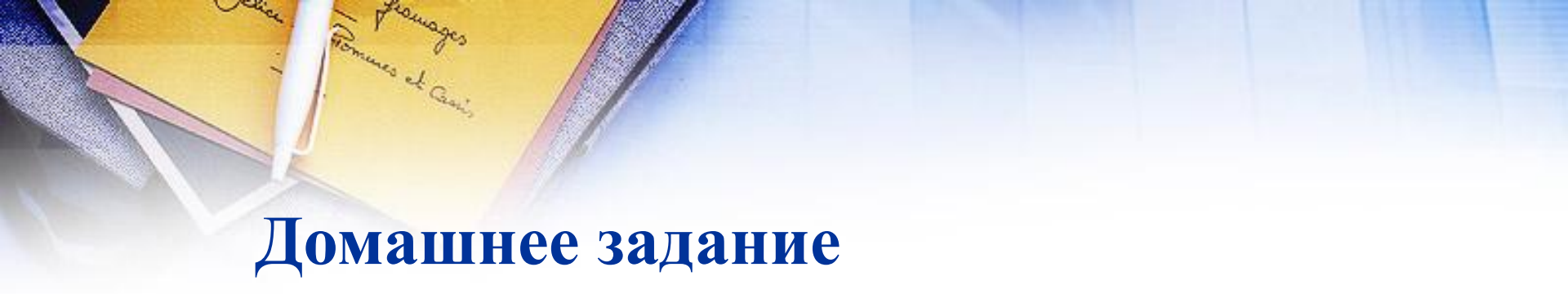


Метод математической индукции
позволяет в поисках общего закона
испытывать возникающие при этом
гипотезы, отбрасывать ложные и
утверждать истинные.



«Понимание и умение правильно применять принцип математической индукции, является хорошим критерием логической зрелости, которая совершенно необходима математику».

А.Н. Колмогоров



Домашнее задание

1. Доказать, что сумма квадратов чисел натурального ряда от 1 до n , равна

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Докажите, что при любом натуральном n верно утверждение

$$(7^n - 1) \div 6$$