Лекция 11

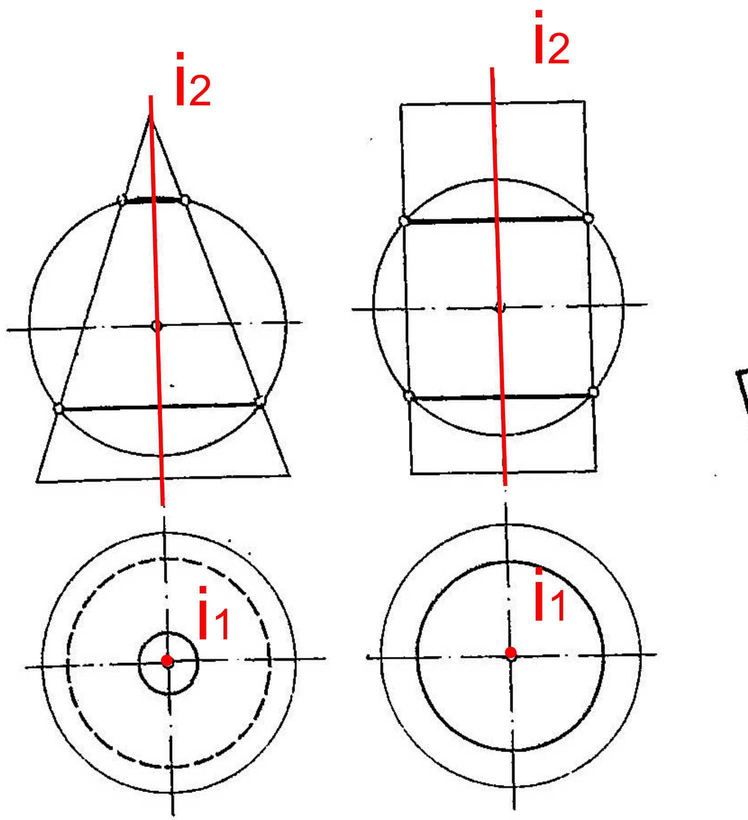
- Взаимное пересечение кривых поверхностей . Частные случаи пересечения поверхностей второго порядка.
- Метод концентрических сфер.
- Метод эксцентрических сфер.

Частные случаи пересечения поверхностей второго порядка

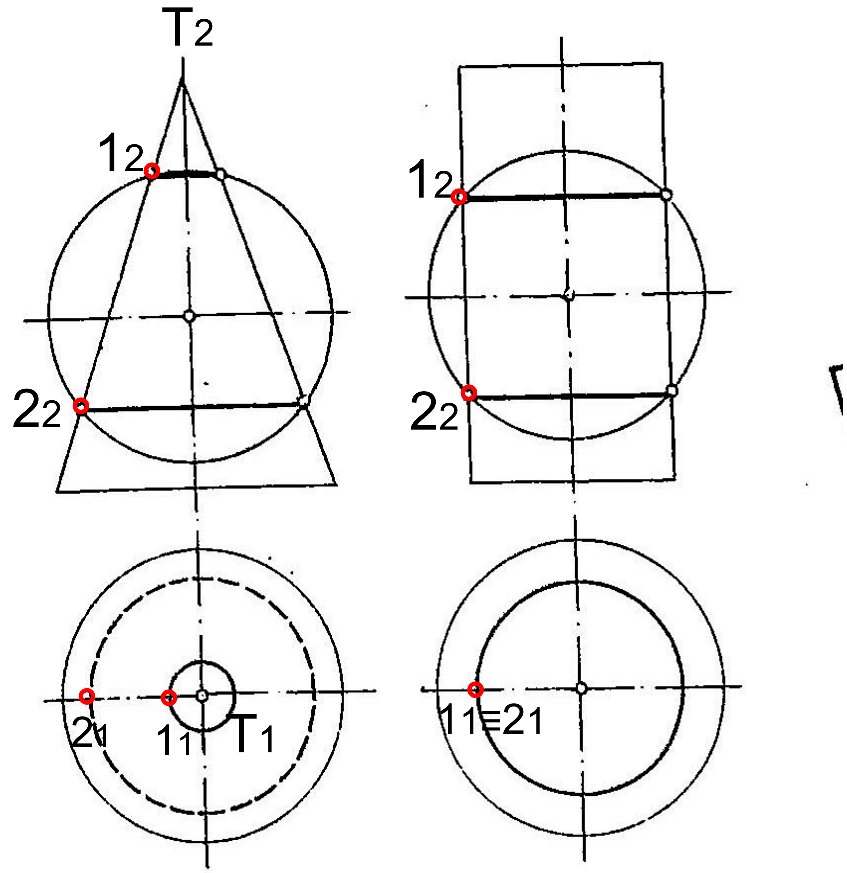
- При пересечении поверхностей второго порядка линией пересечения в общем случае является пространственная кривая 4-го порядка. Эта кривая пересекается плоскостью в четырех точках (действительных и мнимых)
- Порядок линии пересечения равен произведению порядков пересекающихся поверхностей.
- Кривая четвертого порядка может распадаться на две кривые второго порядка

Некоторые частные случаи взаимного пересечения поверхностей второго порядка, когда линиями их пересечения являются кривые второго порядка

- Две поверхности вращения заданы одной осью и главными меридианами. Такие поверхности называются соосными.
- Рассмотрим пересечение 2-х поверхностей вращения, одна из которых – сфера. Оси двух пересекающихся поверхностей вращения совпадают.



- Точки пересечения главных меридианов сферы и тела вращения 1 и 2 при вращении вокруг оси описывают параллели, которые принадлежат обеим поверхностям.
- Две соосные поверхности вращения пересекаются по параллелям, при этом если оси поверхностей параллельны плоскости проекций, то параллели проецируются на эту плоскость прямыми линиями, перпендикулярными проекции оси.



Пересечение поверхностей вращения методом концентрических сфер-посредников

Условия применимости метода концентрических сфер-посредников:

1. Обе пересекающиеся поверхности являются поверхностями вращения.
2. Оси поверхностей пересекаются
3. Поверхности имеют общую плоскость симметрии, параллельную одной из плоскостей проекций.

Определение рабочей зоны сфер-посредников

- Центр сфер выбирается в месте пересечения осей искомых поверхностей вращения
- Минимальный радиус выбирается так, чтобы сфера касалась обеих поверхностей, или касалась одной и пересекала другую
- Максимальный радиус равен наибольшему расстоянию от центра сферы до точки наложенных сечений главных меридианов искомых поверхностей

Метод концентрических сфер
Определение минимальной сферы

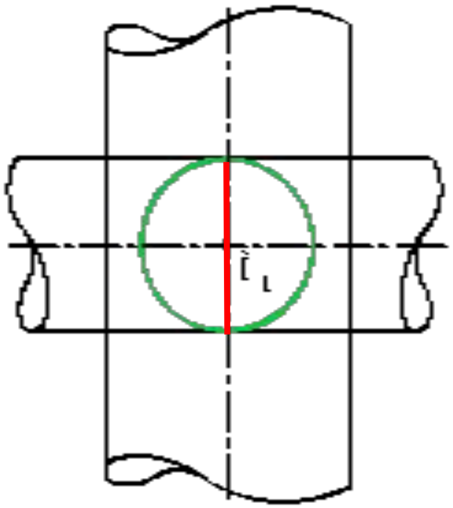


Рис.1

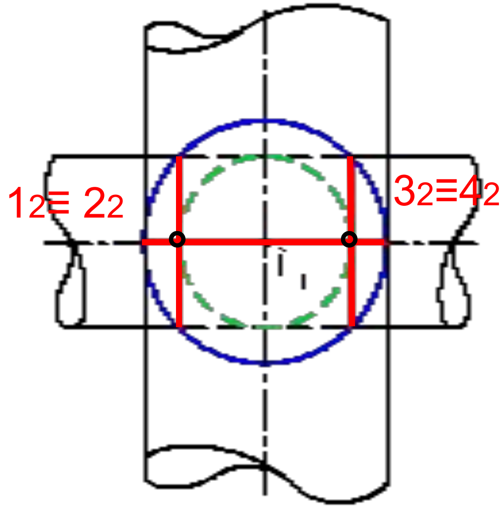


Рис. 2

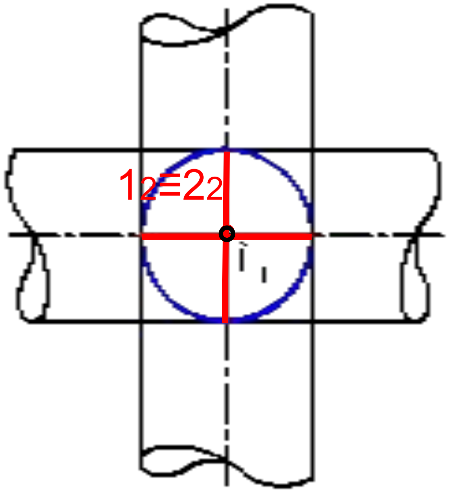


Рис. 3

Рис. 1 – сфера касается только одной поверхности – решения нет, т.к. с друг

поверхностью сфера не имеет общих параллелей

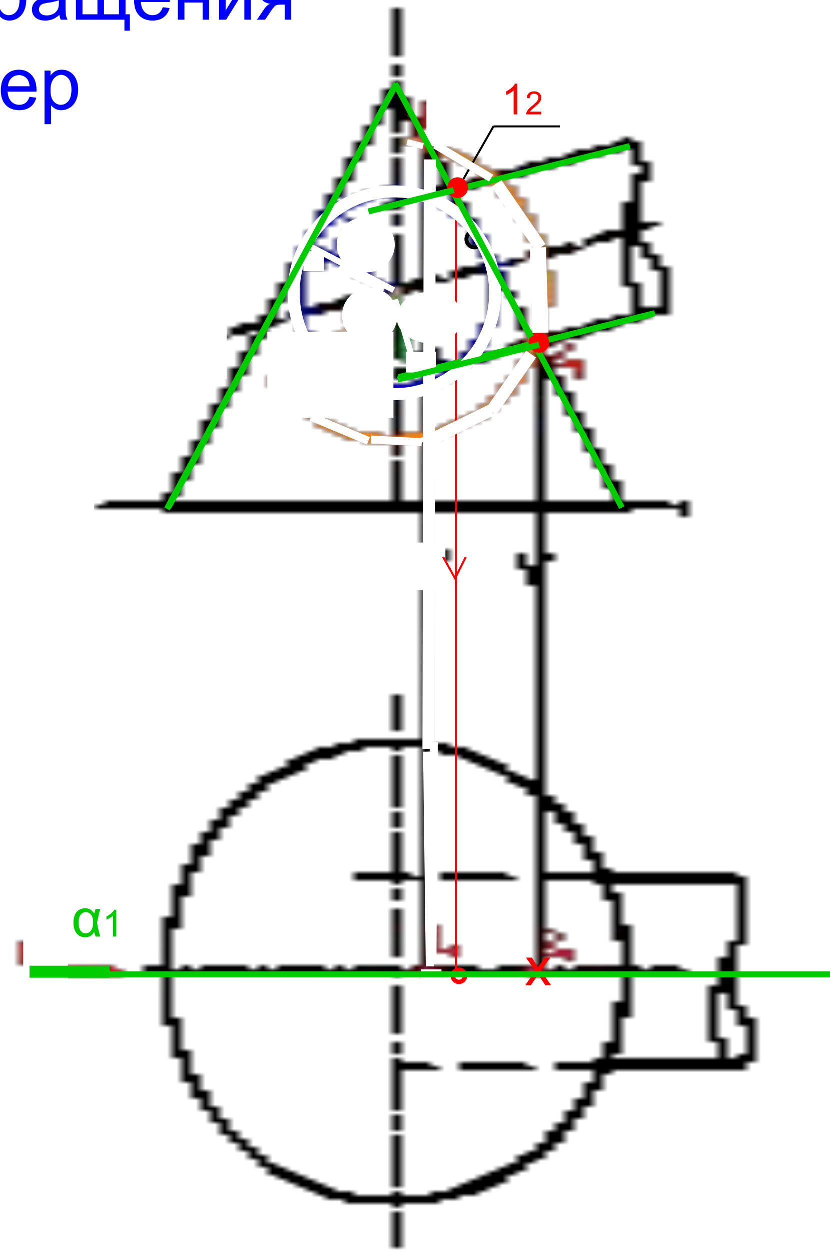
Рис. 2 – сфера касается большей поверхности по окружности и пересекает меньшую по двум окружностям: получаем две пары общих точек (1…4)

Рис. 3 – сфера касается обеих поверхностей одинаковой величины по двум окружностям – получаем одну пару общих точек (1-2).

Пересечение поверхностей вращения методом концентрических сфер

Задача: Определить линию пересечения конуса и цилиндра

Решение: Рассекаем поверхности плоскостью α ⊥П1, проходящей по плоскости симметрии поверхностей (по главным меридианам). При пересечении очерков поверхностей получаем фронтальные проекции точек 1_2 и 2_2. Находим горизонтальные проекции этих точек с учетом видимости.

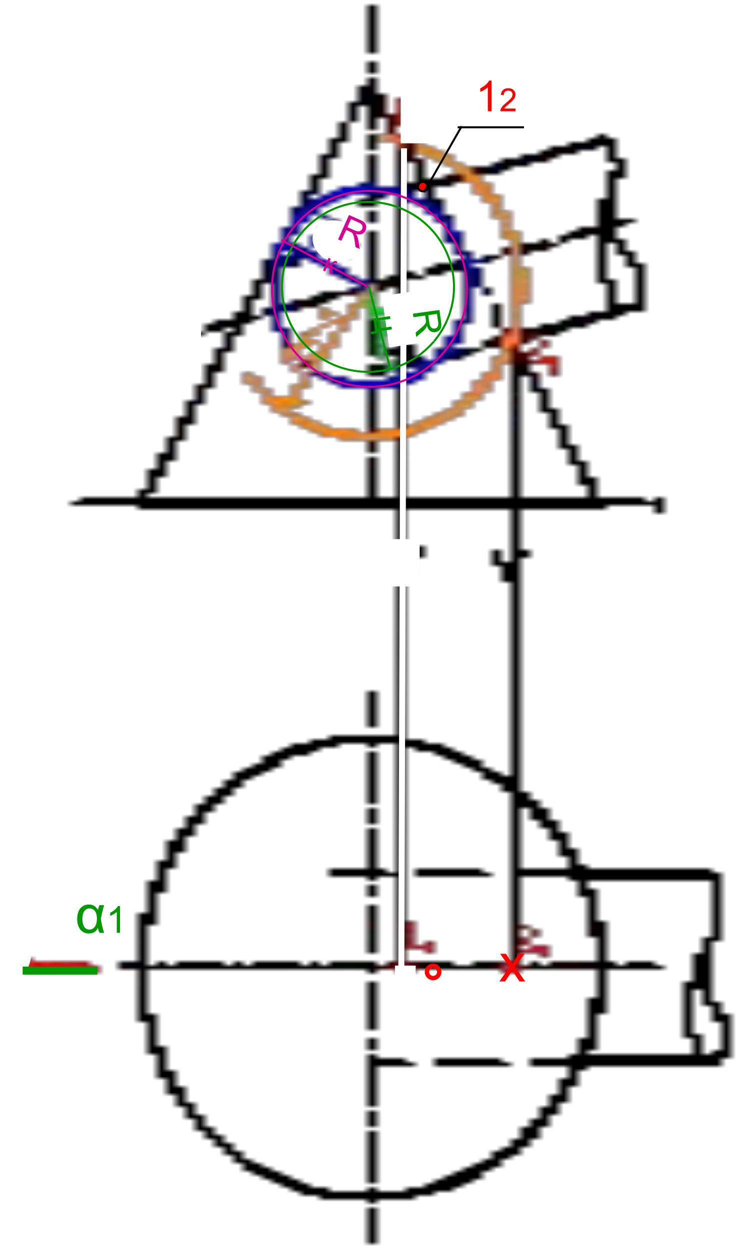


Определяем радиус минимальной сферы (должна коснуться обеих поверхностей или коснуться одной и пересечь другую). Сфера радиуса Rц, касательная к цилиндру, не имеет общих параллелей с конусом.

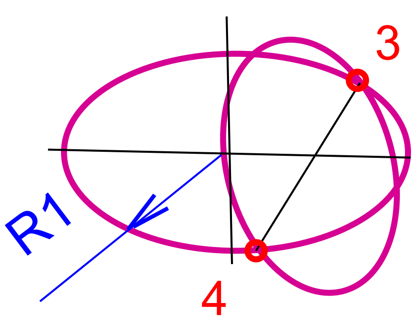
Сфера радиуса Rк, касается конуса и пересекает цилиндр. Т.о. она и является минимальной.

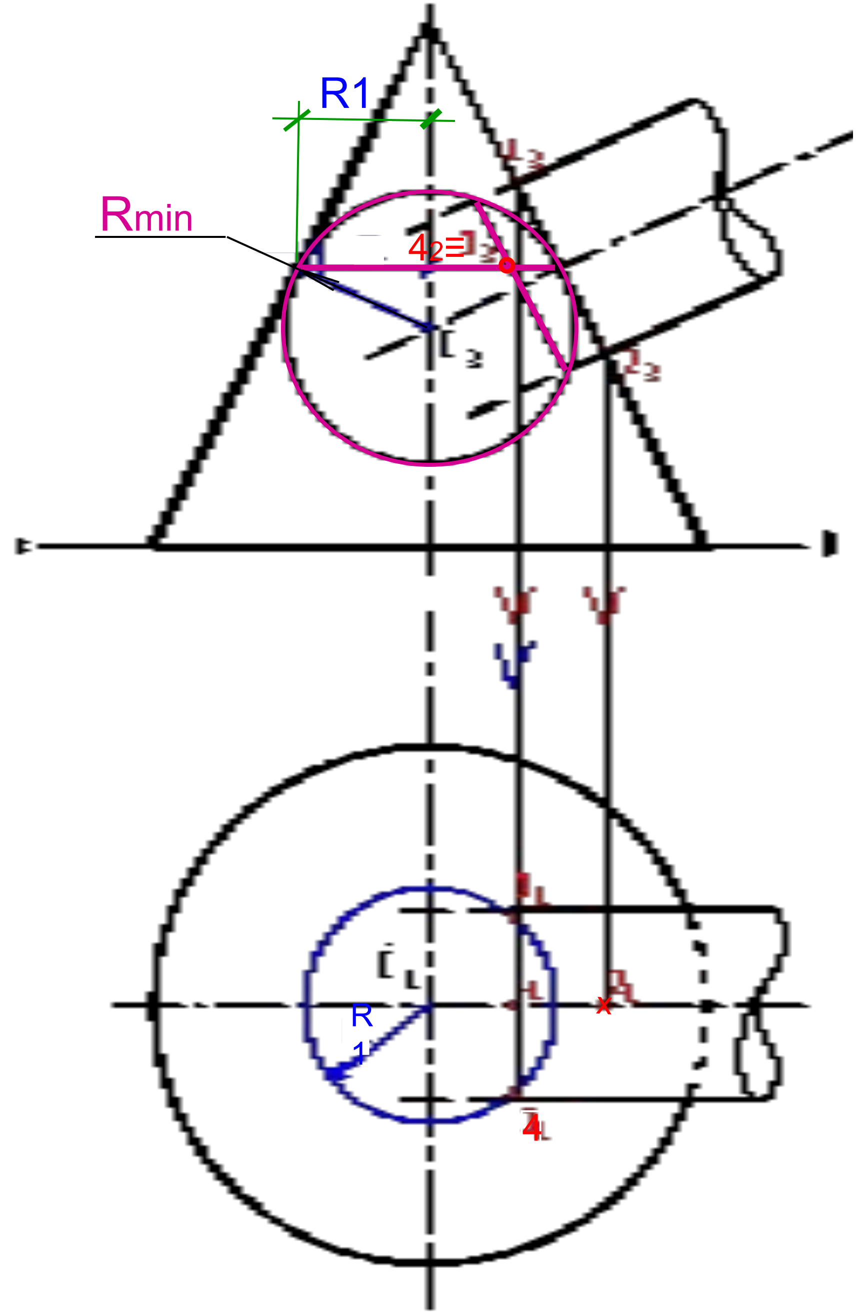
Определяем радиус максимальной сферы.

Это сфера, проходящая через наиболее удаленную (·) 2 накладки сечений главных меридианов.

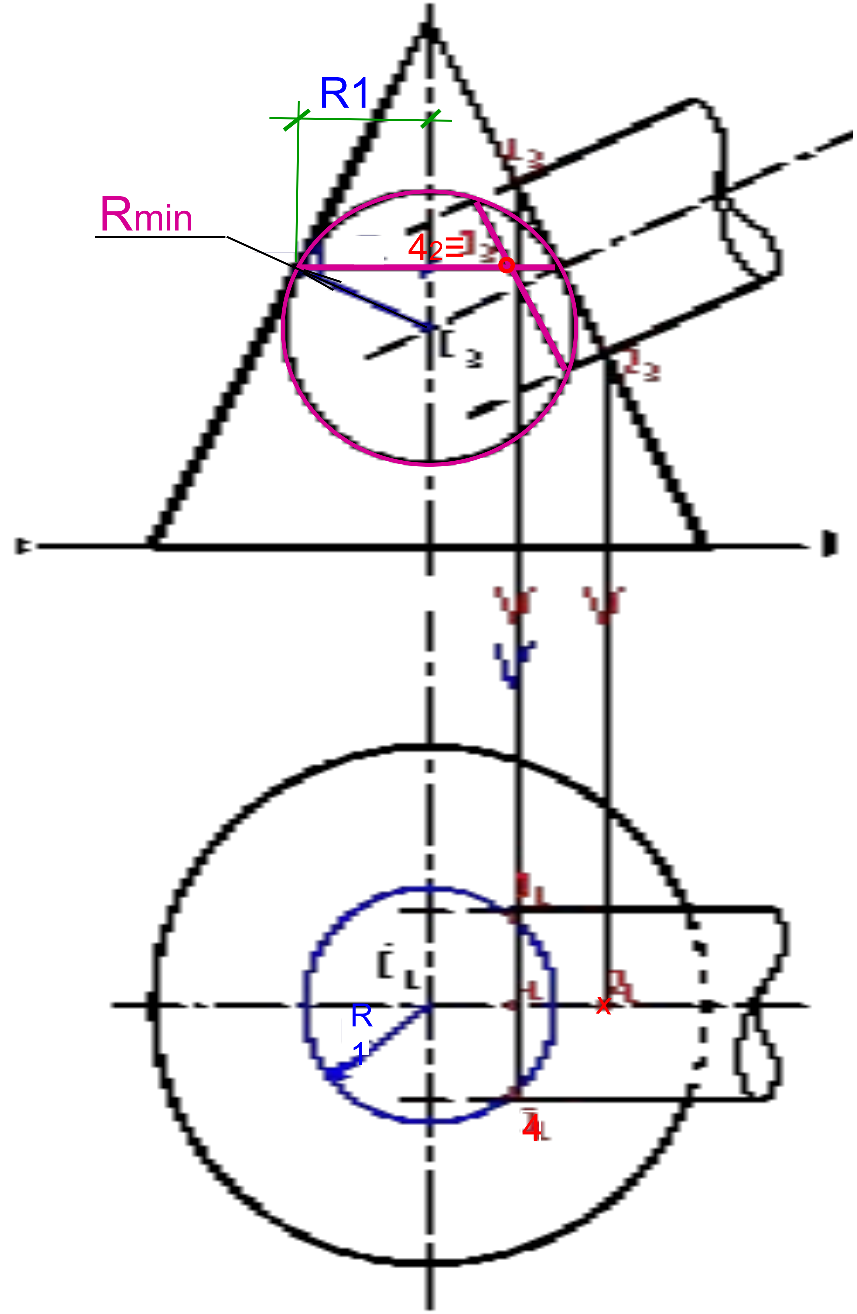


Минимальная сфера, вписанная в конус, касается конуса по окружности радиуса R1 и пересекает цилиндр по окружности, перпендикулярной оси цилиндра. При пересечении построенных параллелей (окружностей) получаем точки 3 и 4 (3_2 и 4_2).

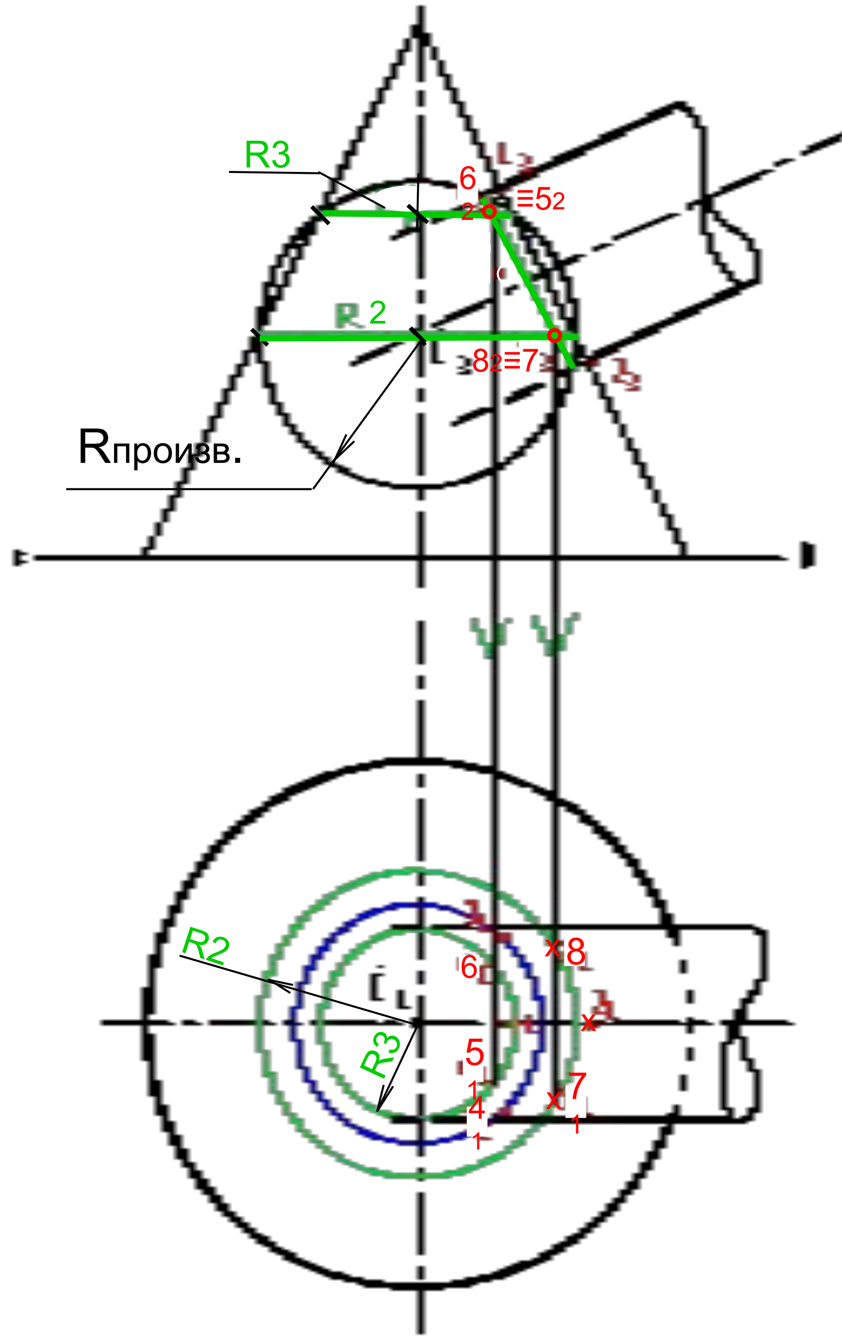




На плоскости П1 находим горизонтальные проекции 31 и 41 по линии связи на окружности радиуса R1, принадлежащей поверхности конуса. Данная окружность параллельна П1 и проецируется без искажения. Определяем видимость горизонтальных проекций точек: 31 и 41 видимы, т.к. находятся в верхней части цилиндра (это видно на П2- выше оси цилиндра)

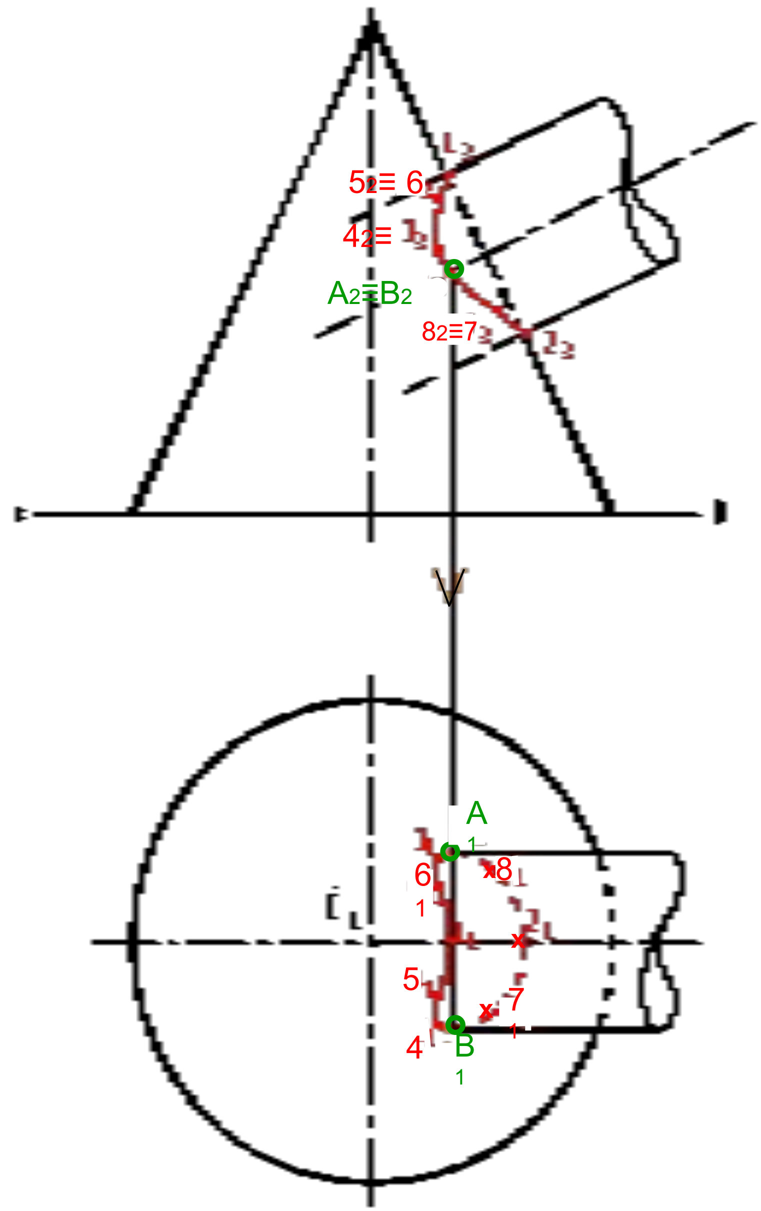


Задаем сферу произвольного радиуса, больше минимальной, но меньше максимальной. Она рассекает конус по двум окружностям радиусами R2 и R3, и цилиндр по одной. Окружности, пересекаясь, дают (..)5,6,7,8 принадлежащие одновременно трем поверхностям: искомым и сфере-посреднику. На П1 строим горизонтальные проекции точек 5_1 - 8_1, как лежащие на поверхности конуса (т.е. на окружностях радиусами R3 и R2 соответственно) с учетом видимости поверхностей.



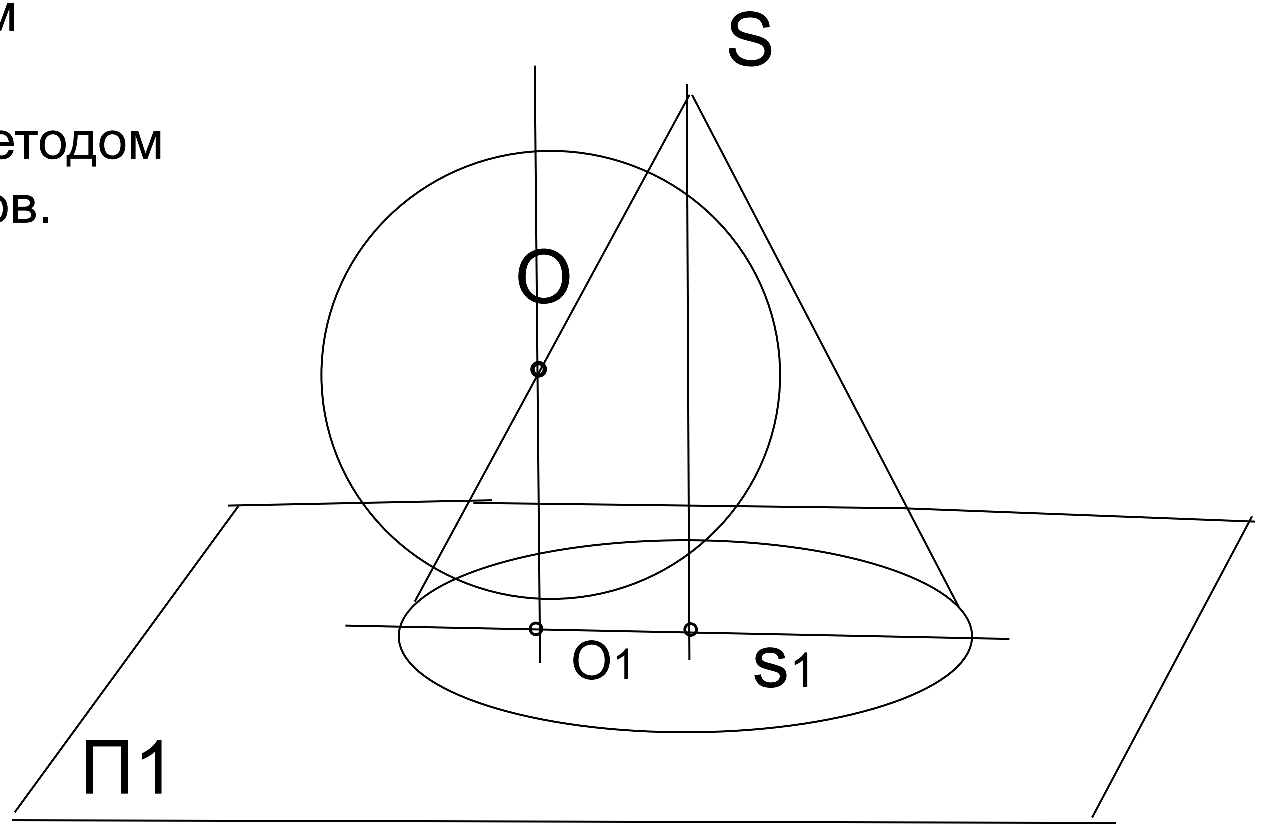
Соединяем построенные точки между собой с учетом видимости.

Линия пересечения поверхностей проходит через (..) А и В, лежащих на очерковых образующих цилиндра – границе видимости на П1.



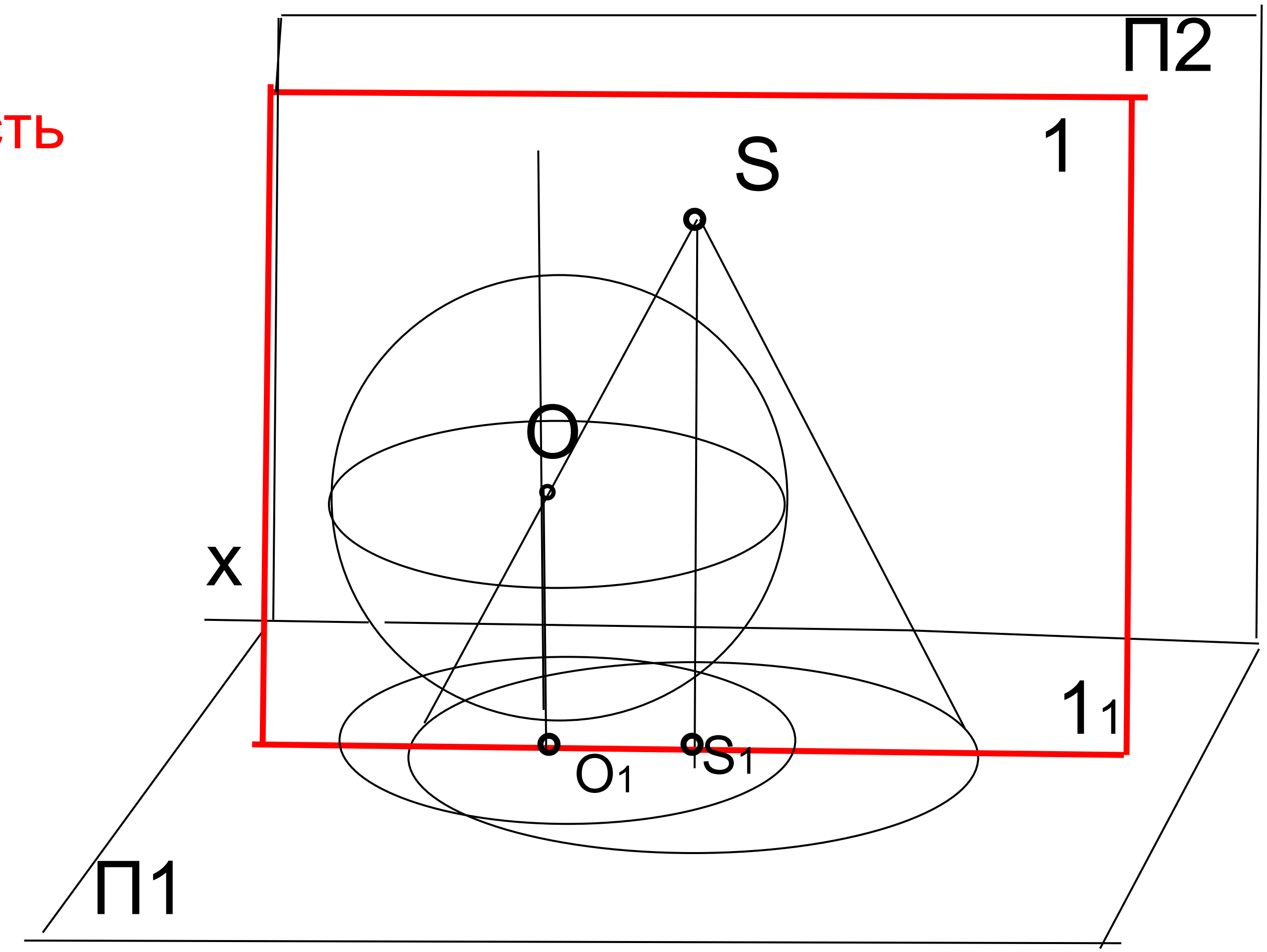
Пересечение прямого кругового конуса с вершиной в точке S и сферы с центром в точке O:

Данную задачу можно решить и методом плоскостей – посредников, и методом сфер- посредников.



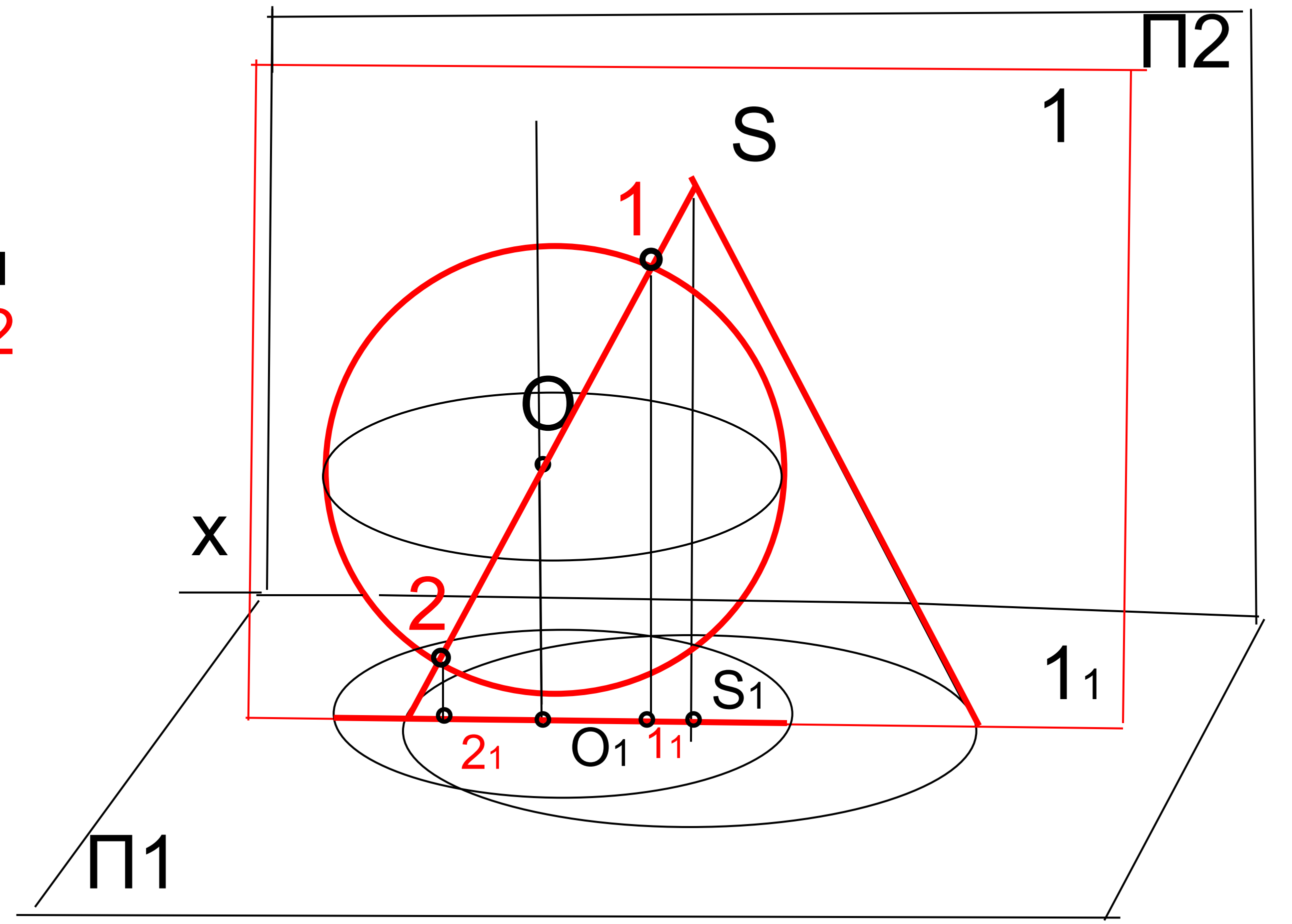
Рассмотрим метод плоскостей-посредников на примере данной задачи в аксонометрии

Первую плоскость –посредник проведем через главные меридианы поверхностей, параллельно плоскости проекций П2



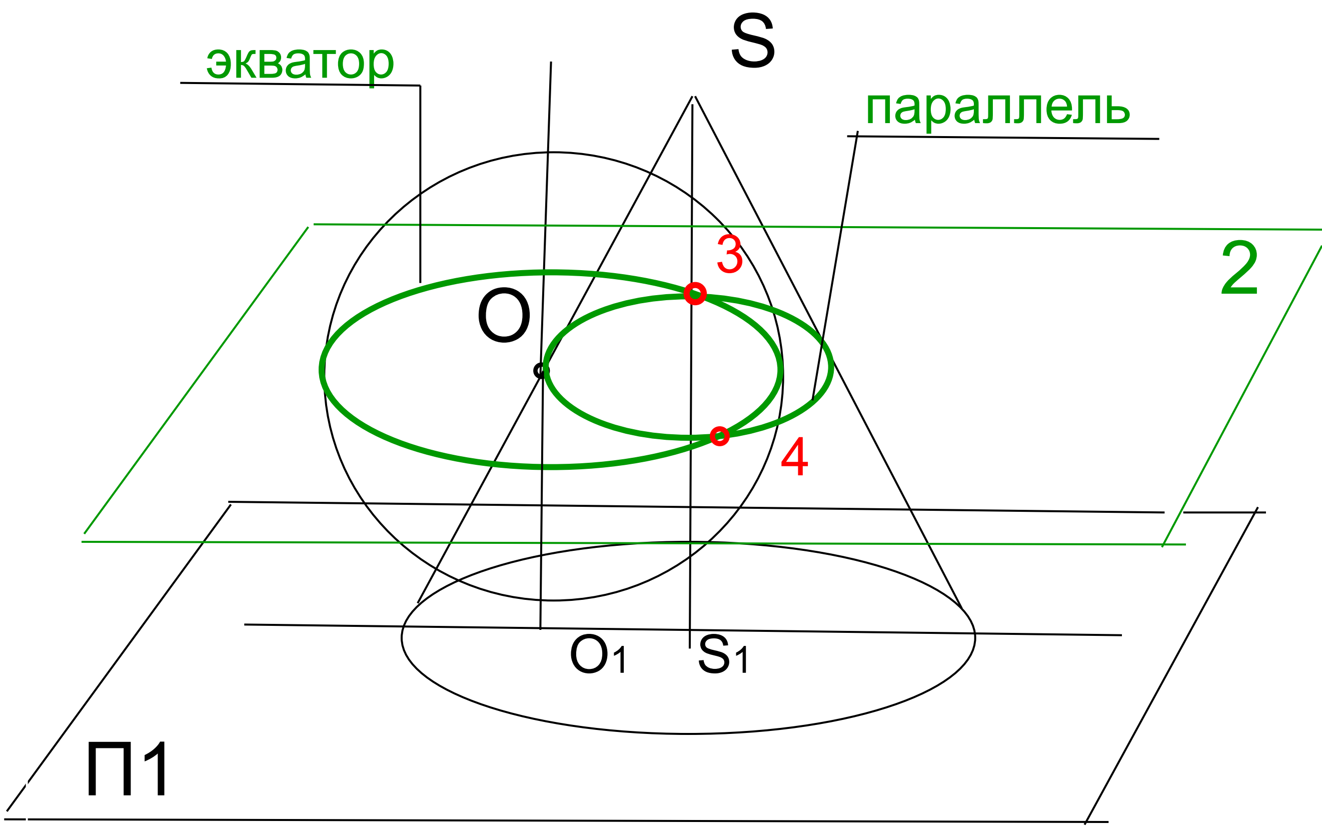
- главный меридиан сферы- очерковая окружность, главный меридиан конуса- очерковые образующие (треугольник)

- Найдем пересечение полученных сечений: получим общие точки 1 и 2



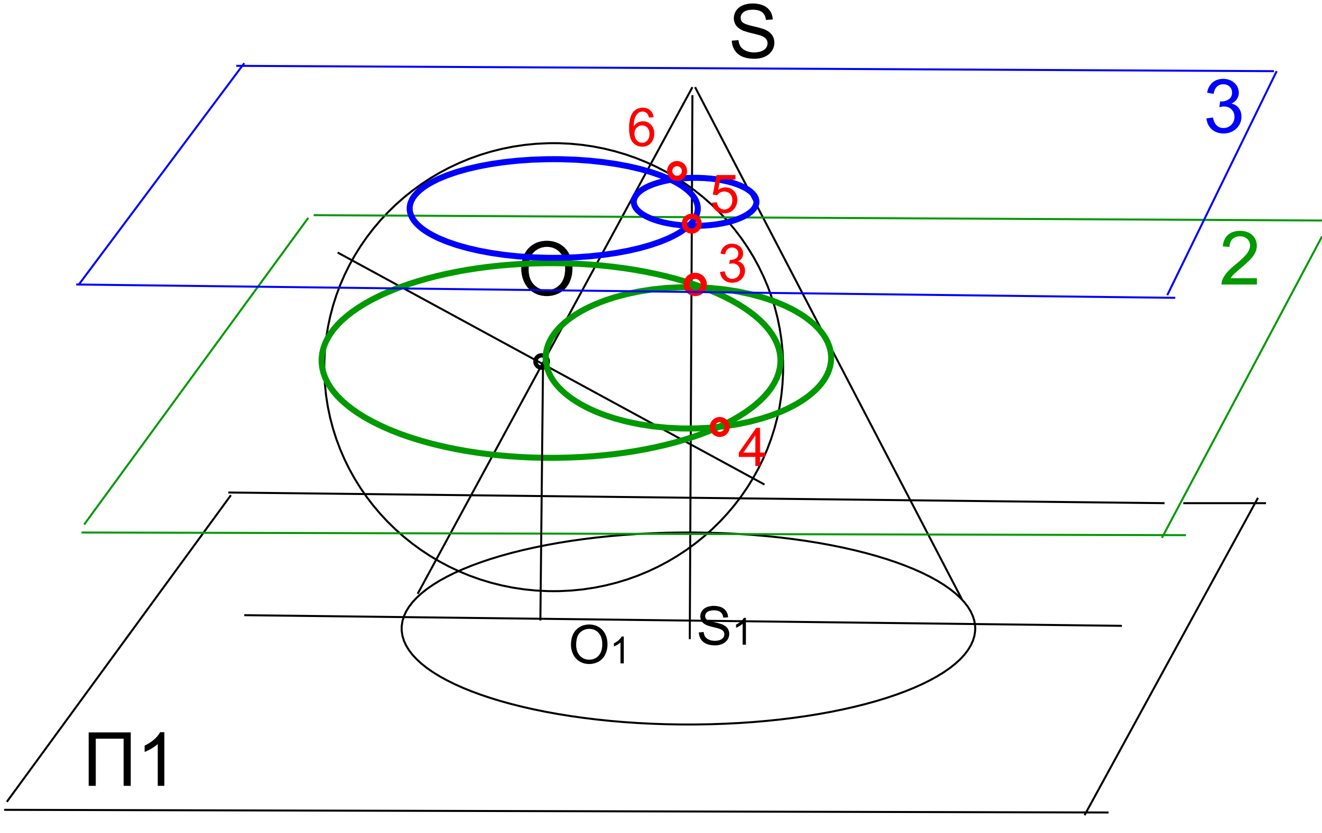
Далее будем рассекать обе поверхности горизонтальными плоскостями-посредниками

- Например, взяв плоскость 2, параллельную плоскости П1 и проходящую через экватор сферы, в сечении по сфере и конусу получим окружности. Точки 3 и 4- общие точки полученных сечений



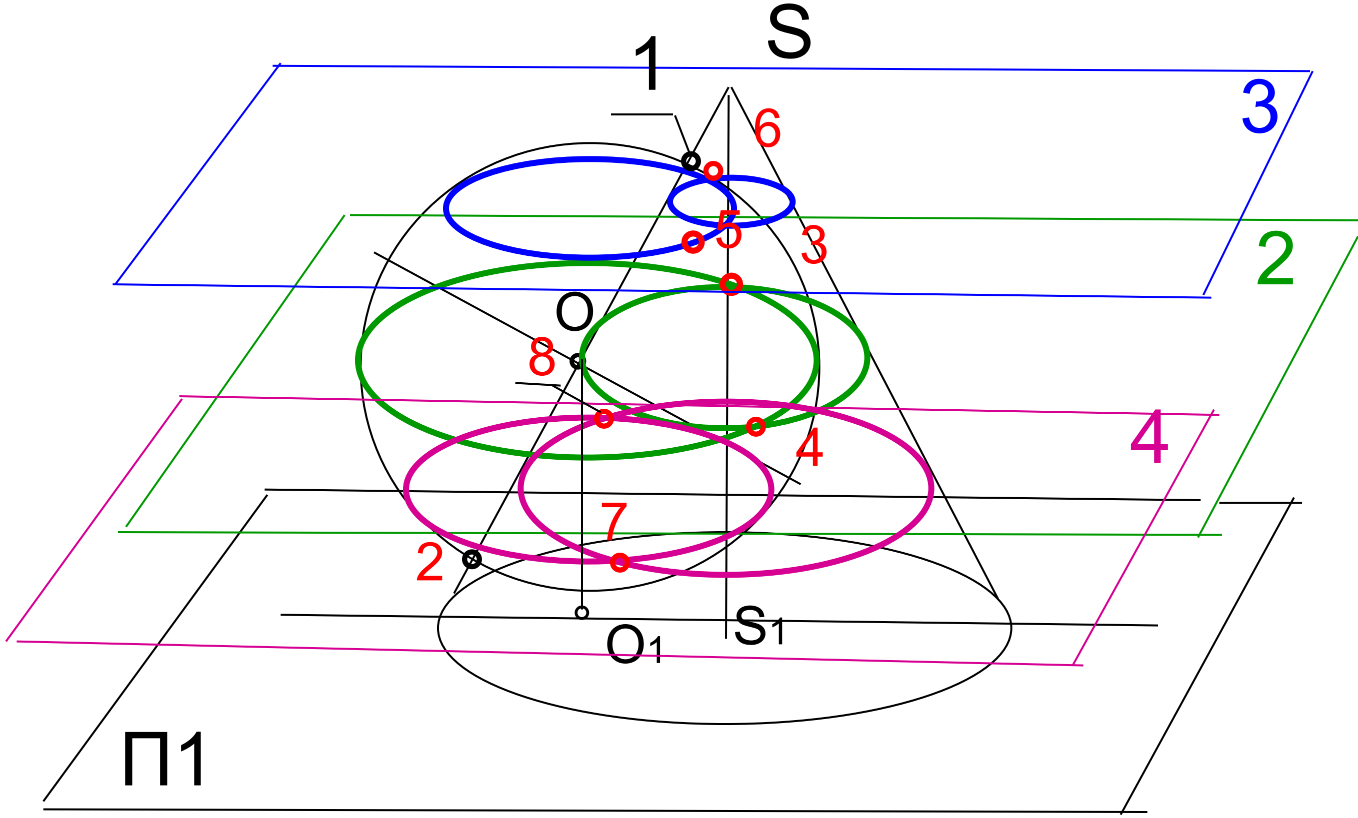
Повторим операцию с горизонтальными плоскостями-посредниками, взяв плоскость 3 выше плоскости №2

- получим окружности - параллели. Точки 5 и 6- общие точки полученных сечений

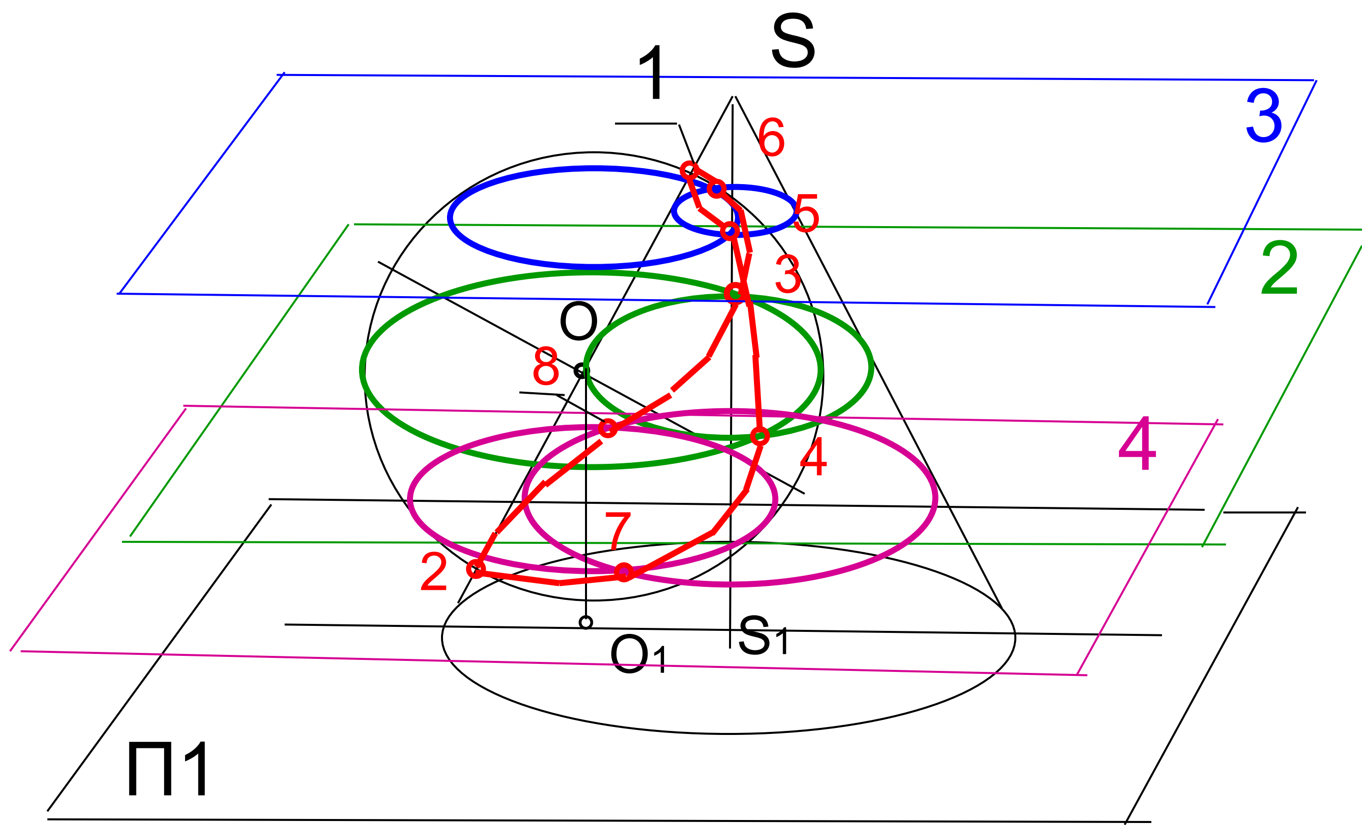


Повторим операцию с горизонтальными плоскостями-посредниками, взяв плоскость 4 ниже плоскости №2

- получим окружности - параллели. Точки 7 и 8- общие точки полученных сечений



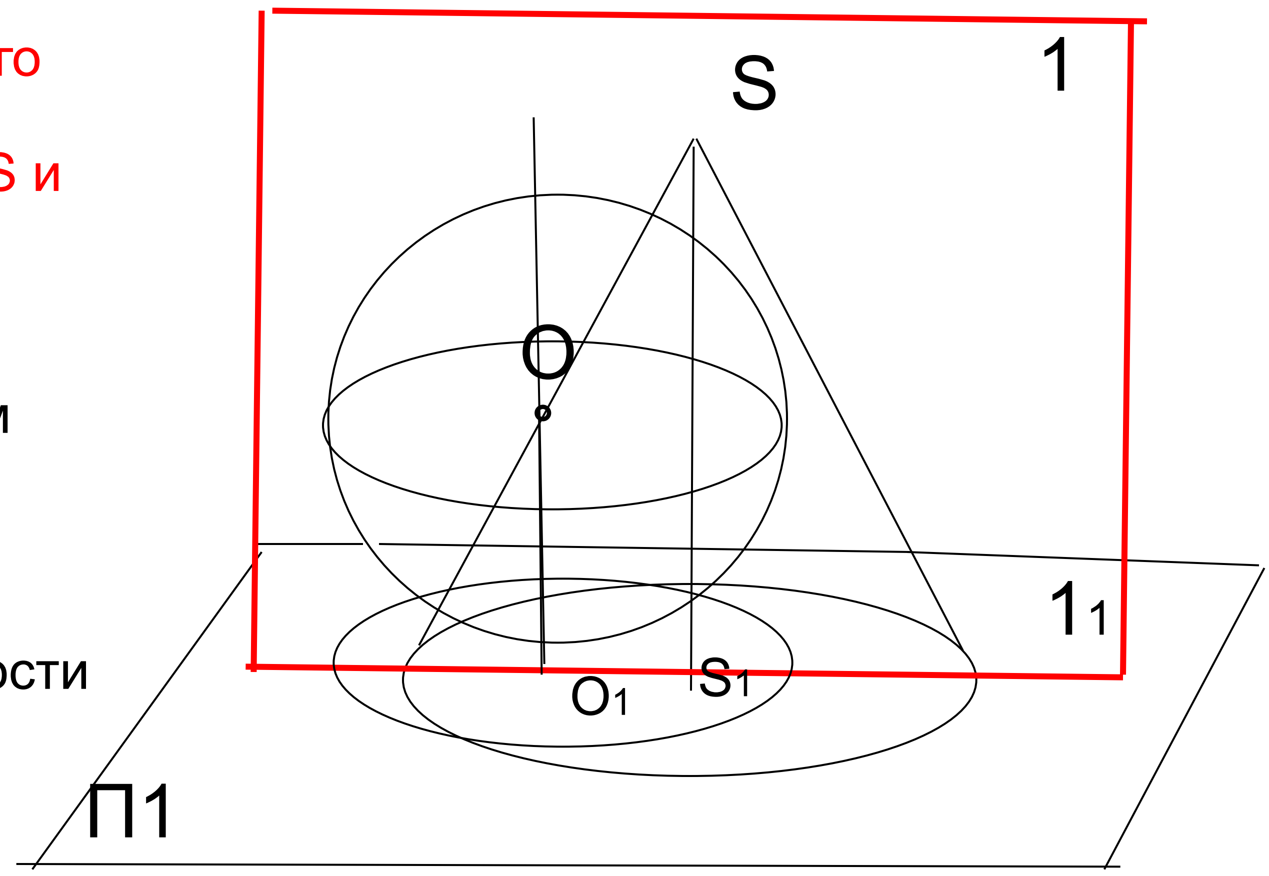
Соединим найденные точки и получим линию пересечения двух искомых поверхностей



Рассмотрим решение задачи методом концентрических сфер-посредников

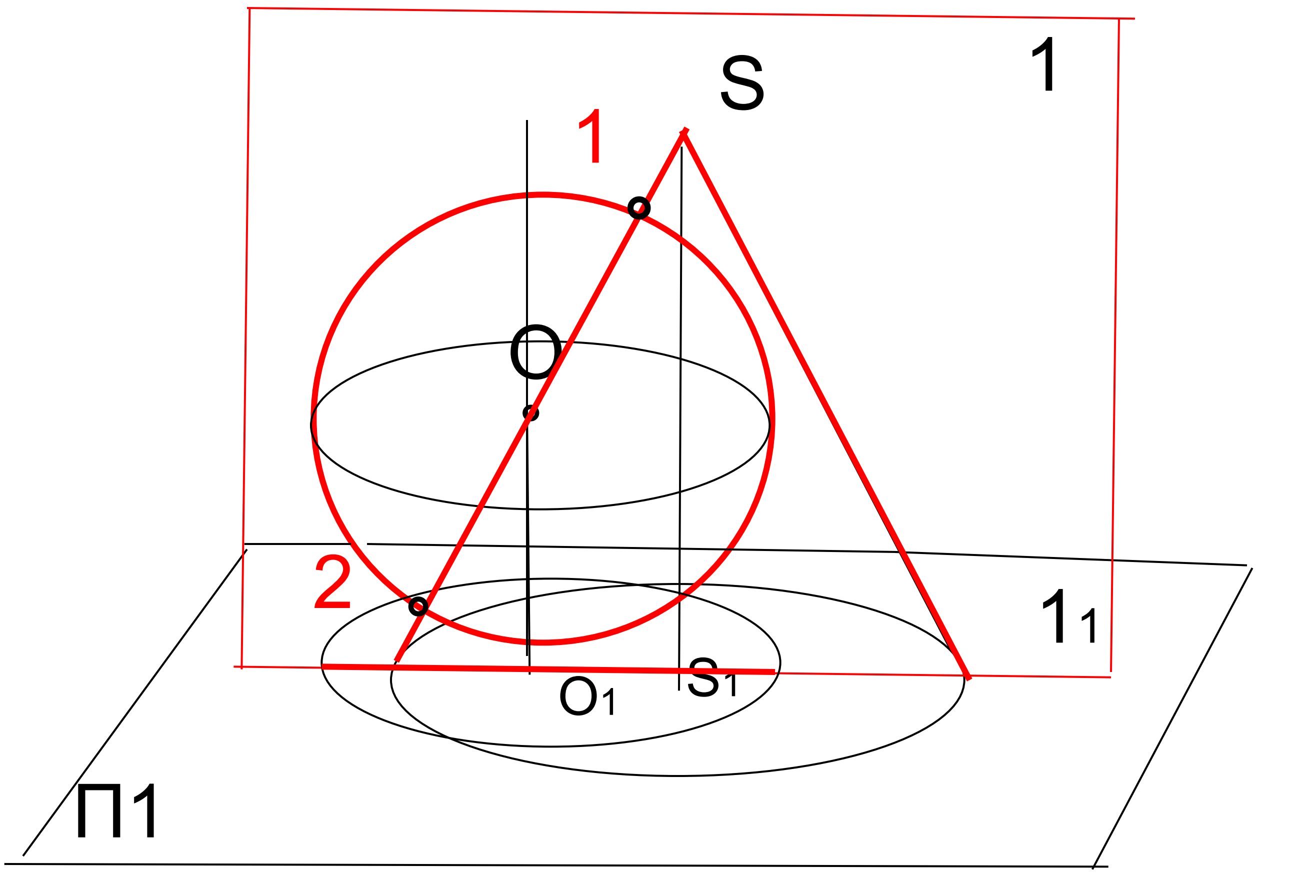
Пересечение прямого кругового конуса с вершиной в точке S и сферы с центром в точке O:

Первую плоскость – посредник проведем через главные меридианы поверхностей, параллельно плоскости проекций П2

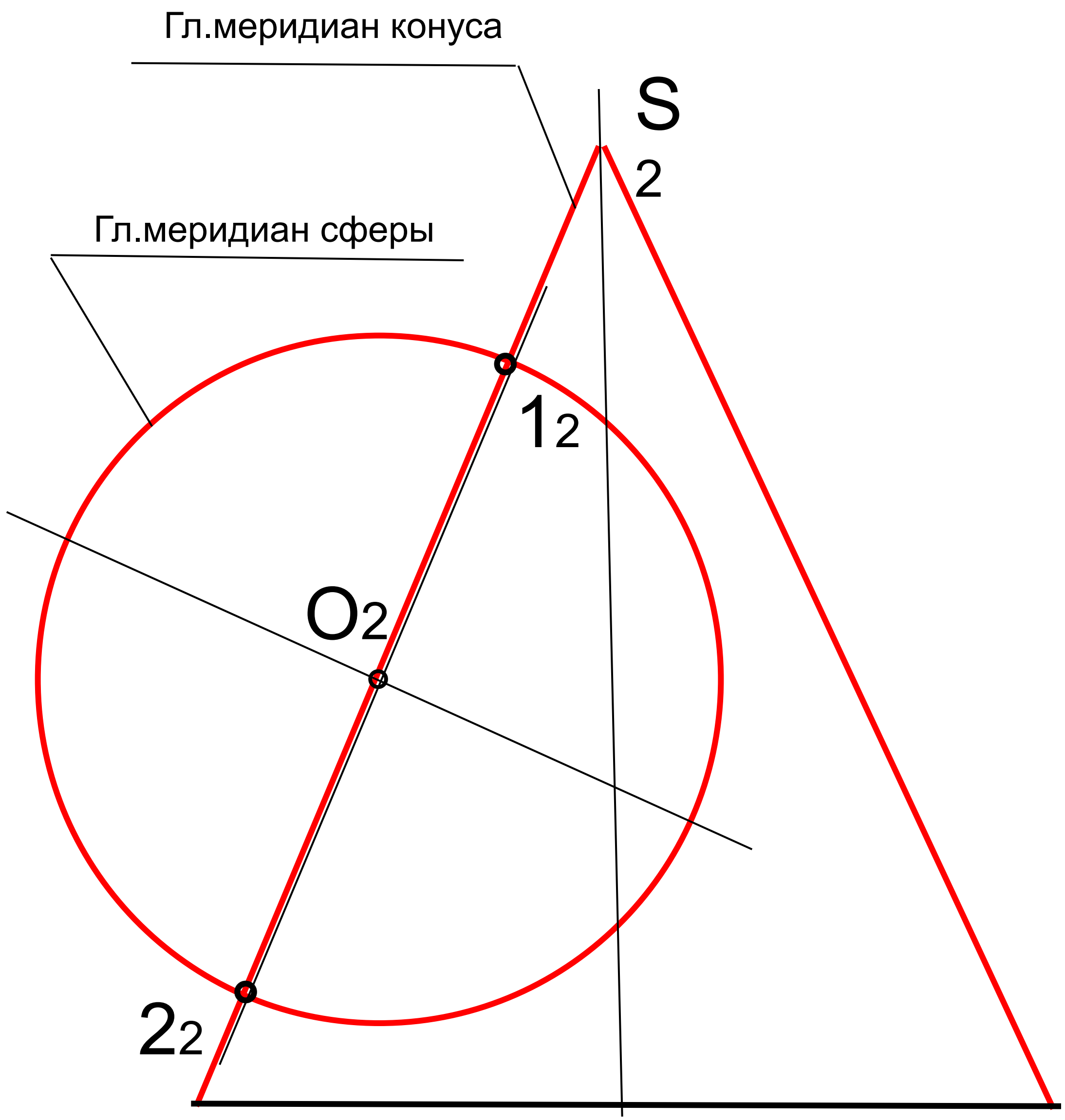


главный меридиан сферы- очерковая окружность, главный меридиан конуса- очерковые образующие

- Получим общие точки 1 и 2

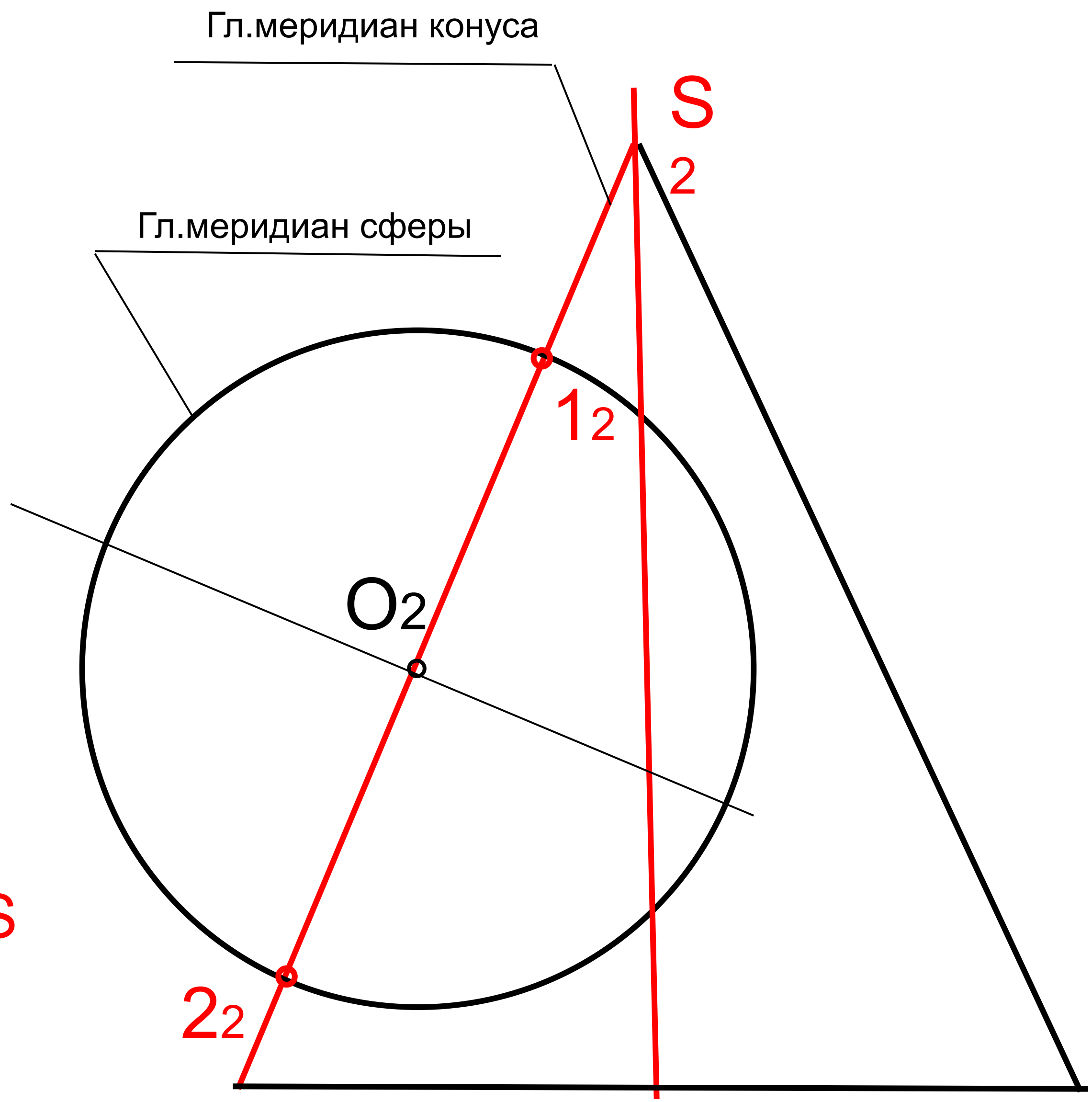


- На эпюре рассмотрим решение задачи на плоскости П2:
- Проекции точек 1_2 и 2_2 получим при проведении плоскости-посредника через главные меридианы поверхностей по плоскости симметрии конуса и сферы.



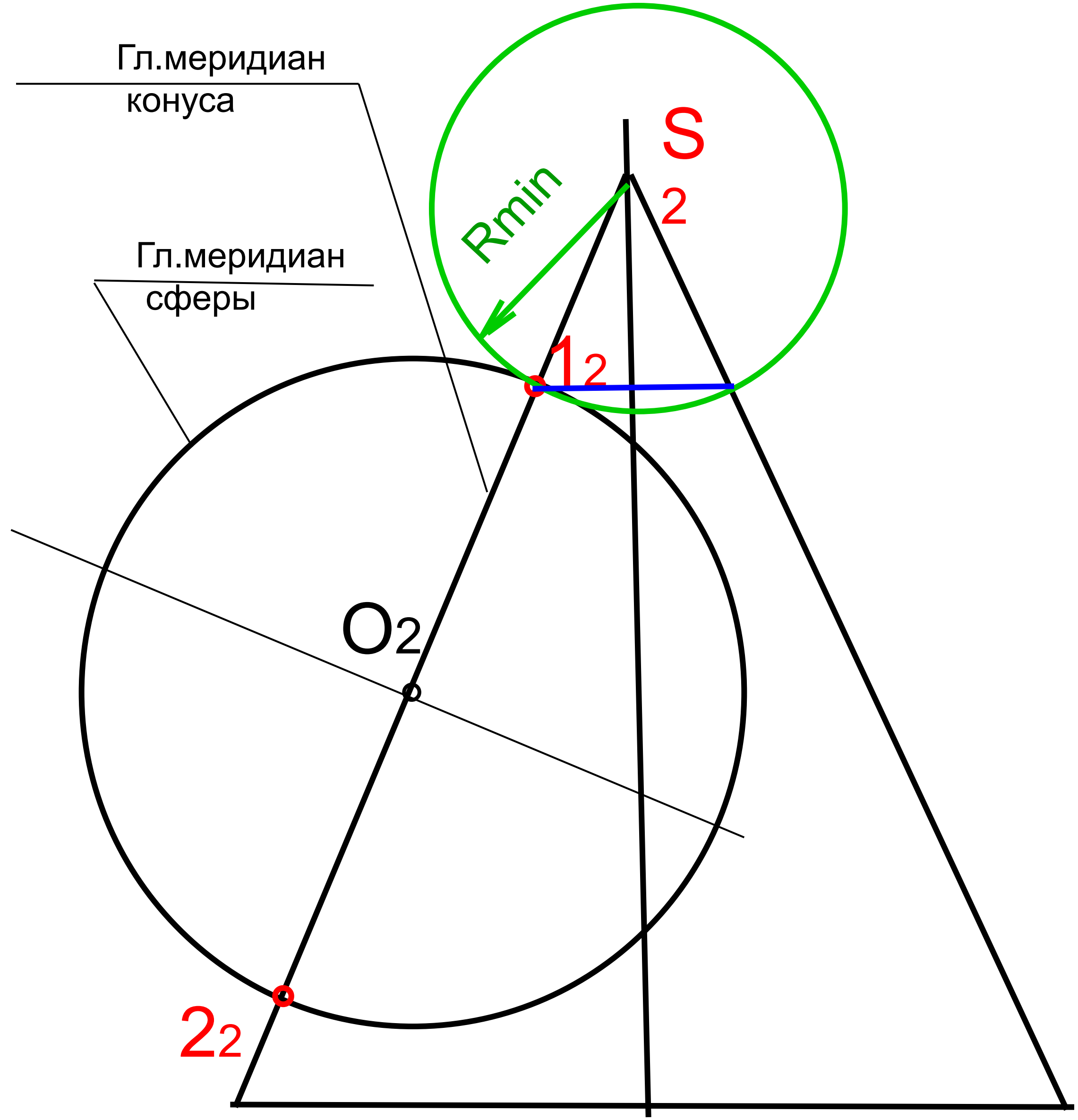
Т.к. обе поверхности являются поверхностями вращения, они соосны и оси обеих поверхностей параллельны П2- можем применить метод концентрических сфер-посредников.

Центр сфер- в точке пересечения осей- (.)S

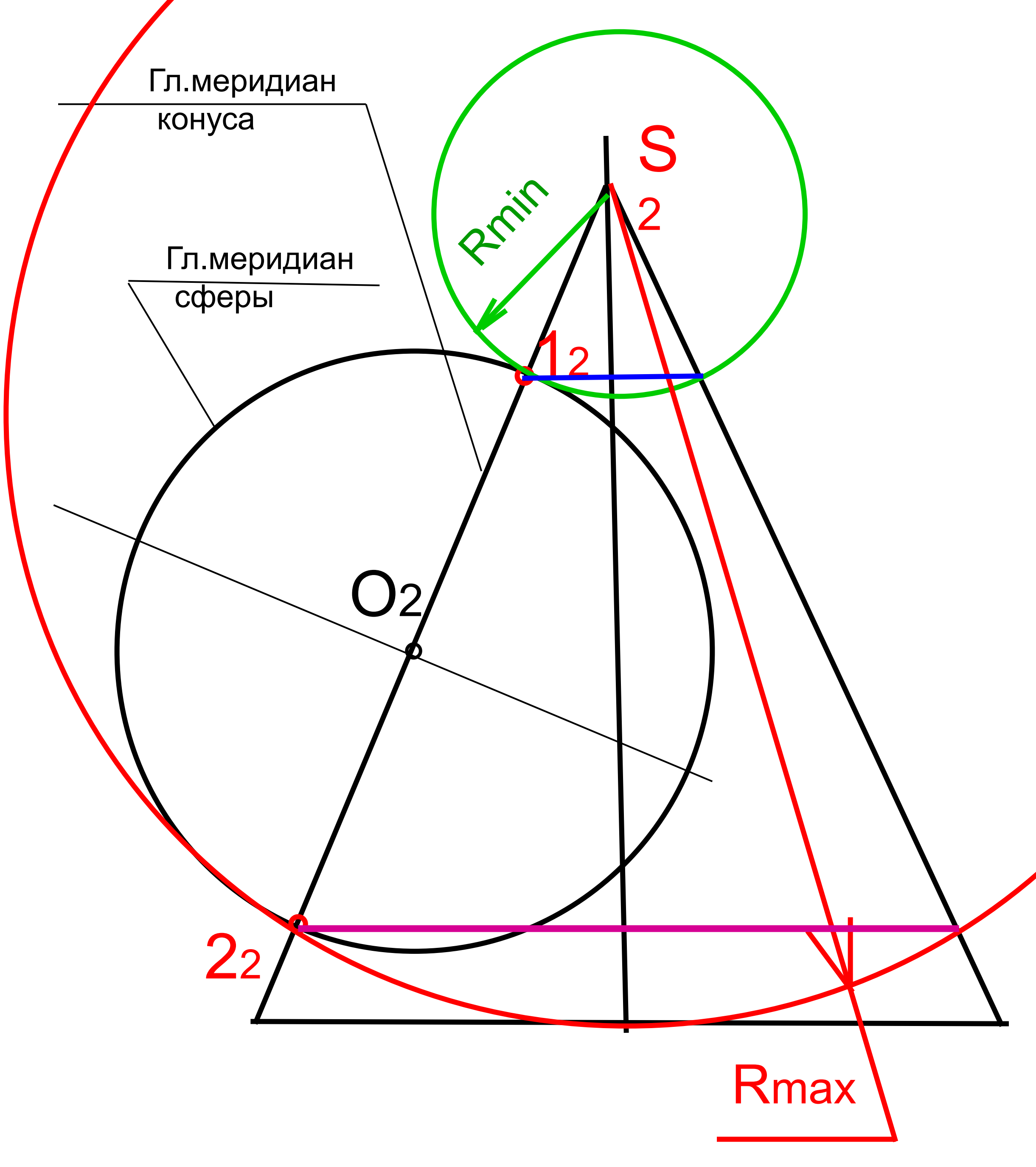


Выбираем зону действия сфер-посредников.

R min – расстояние от (.)S_2 до 1_2: сфера-посредник коснулась искомой сферы в точке 1 и пересекла конус по окружности. В результате получим общую точку 1



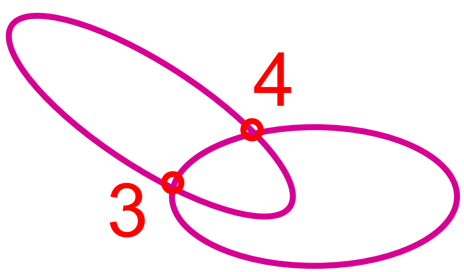
R_{max} –расстояние от центра сферы-посредника до самой дальней точки накладки главных меридианов обеих поверхностей, т.е. от (.)S_2 до (.)2_2: сфера-посредник коснулась искомой сферы в (.)2 и пересекла конус по окружности. В результате получим общую точку 2

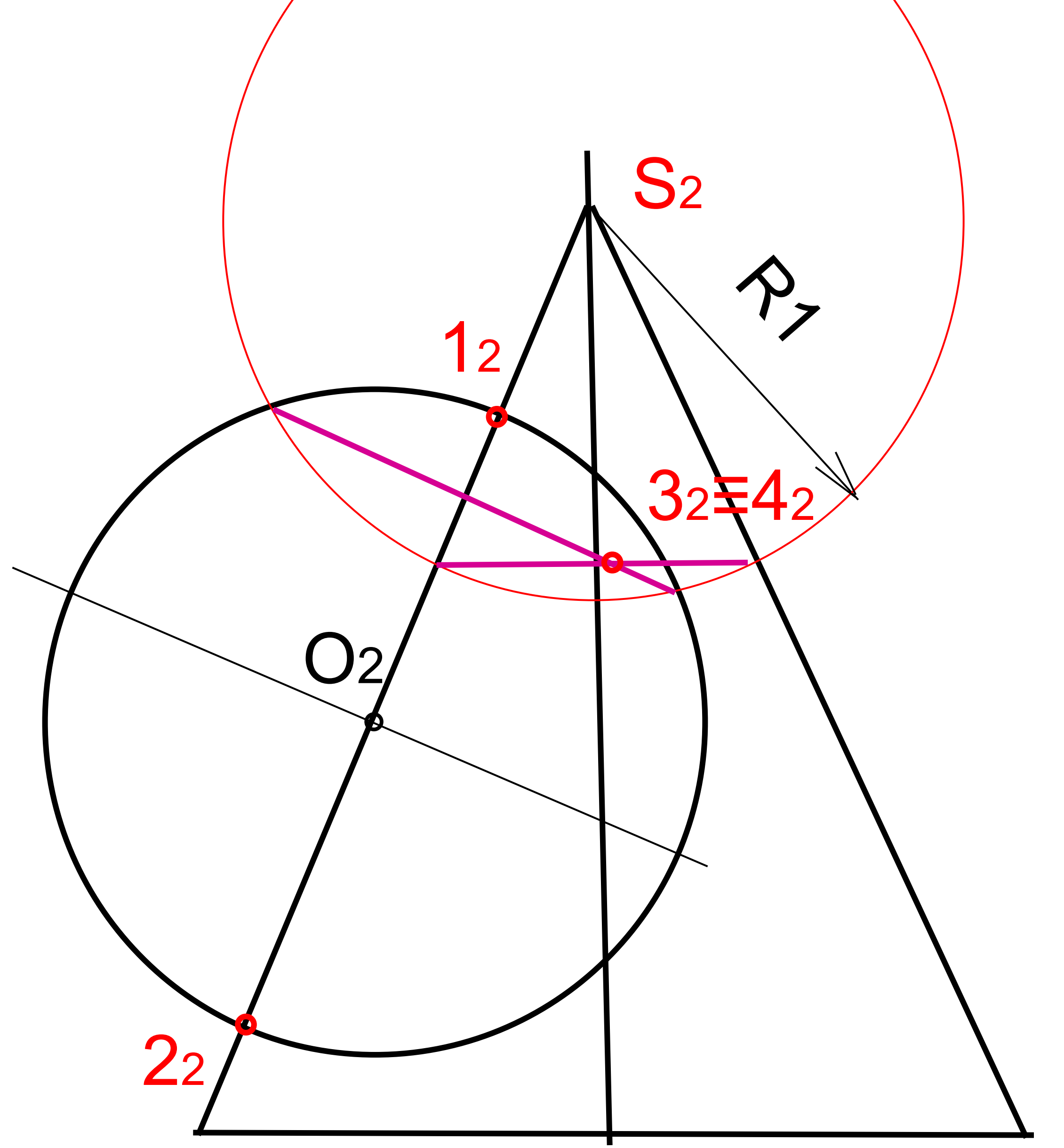


Вводим произвольную сферу – посредник радиуса R1.

Строим сечения сферы – посредника с существующими поверхностями.

Определяем общие точки 3 и 4, на пересечении полученных сечений

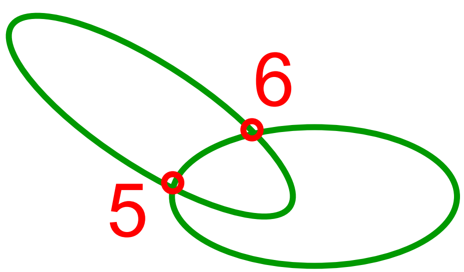


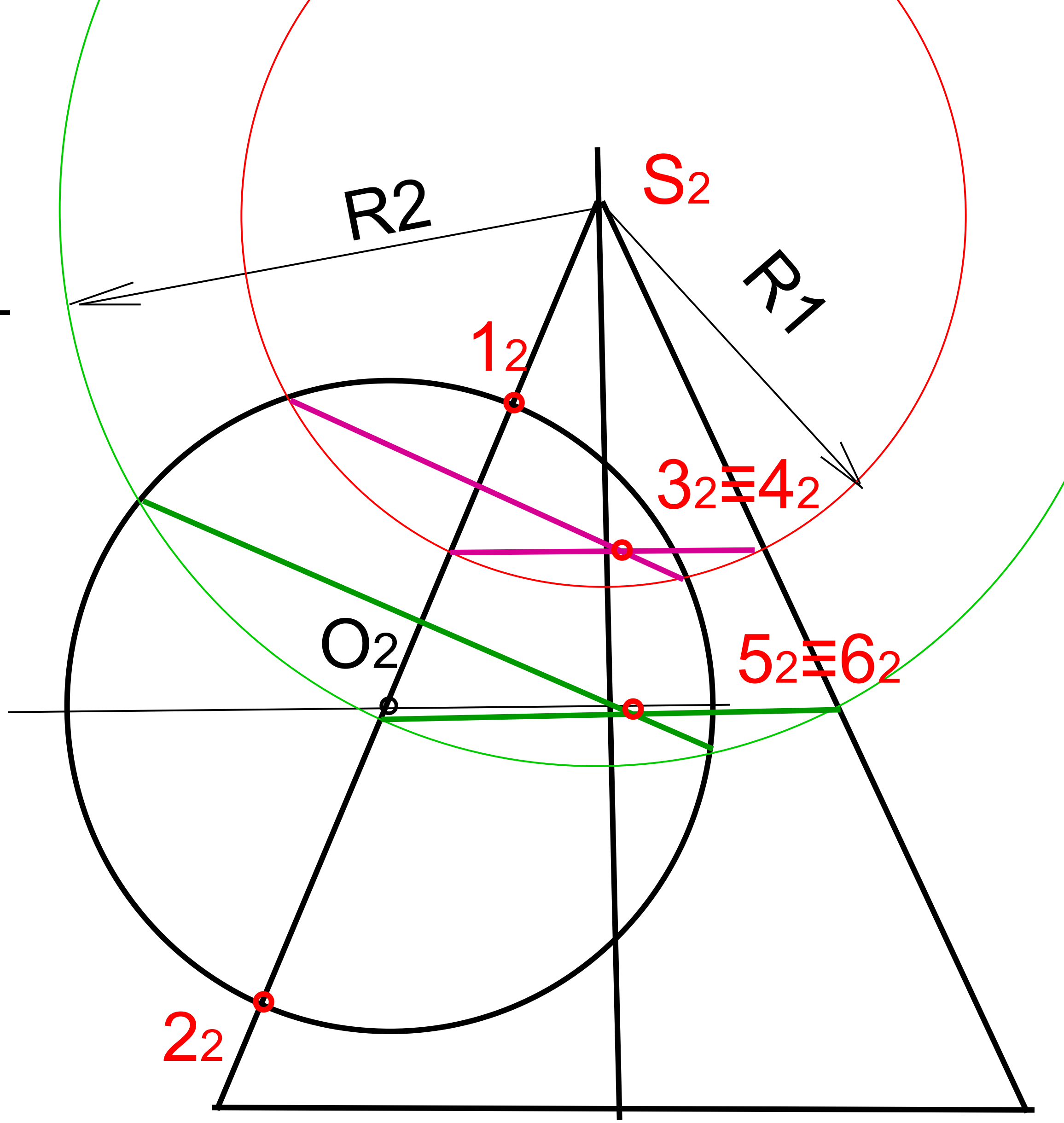


Вводим произвольную сферу – посредник радиуса R2.

Строим сечения сферы – посредника с существующими поверхностями.

Определяем общие точки 5 и 6, на пересечении полученных сечений

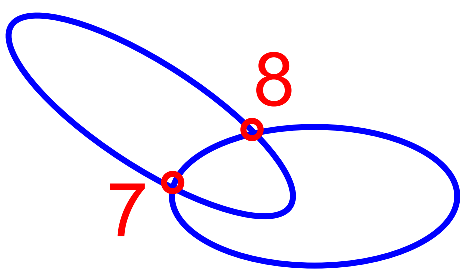


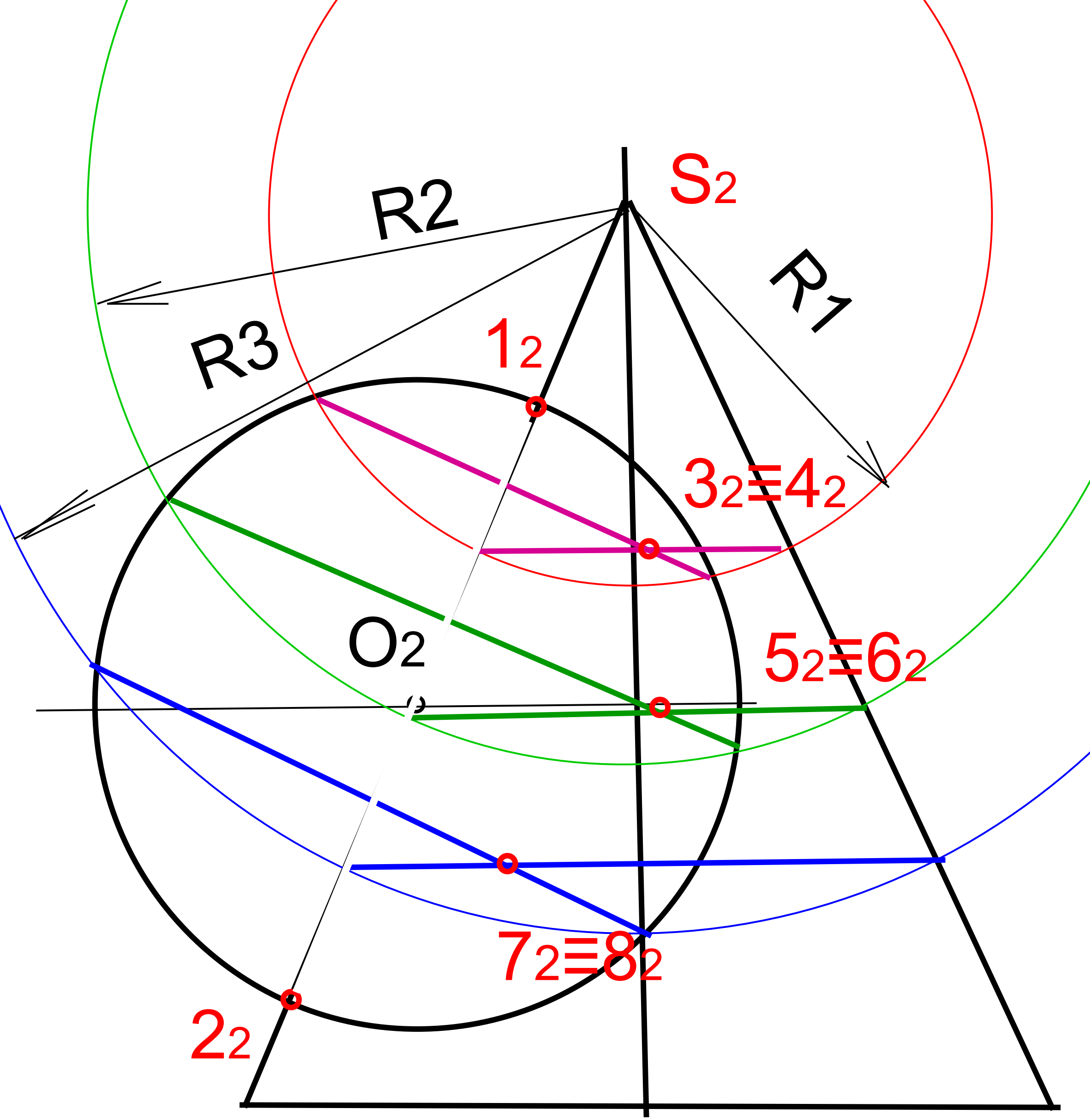


Вводим произвольную сферу – посредник радиуса R3.

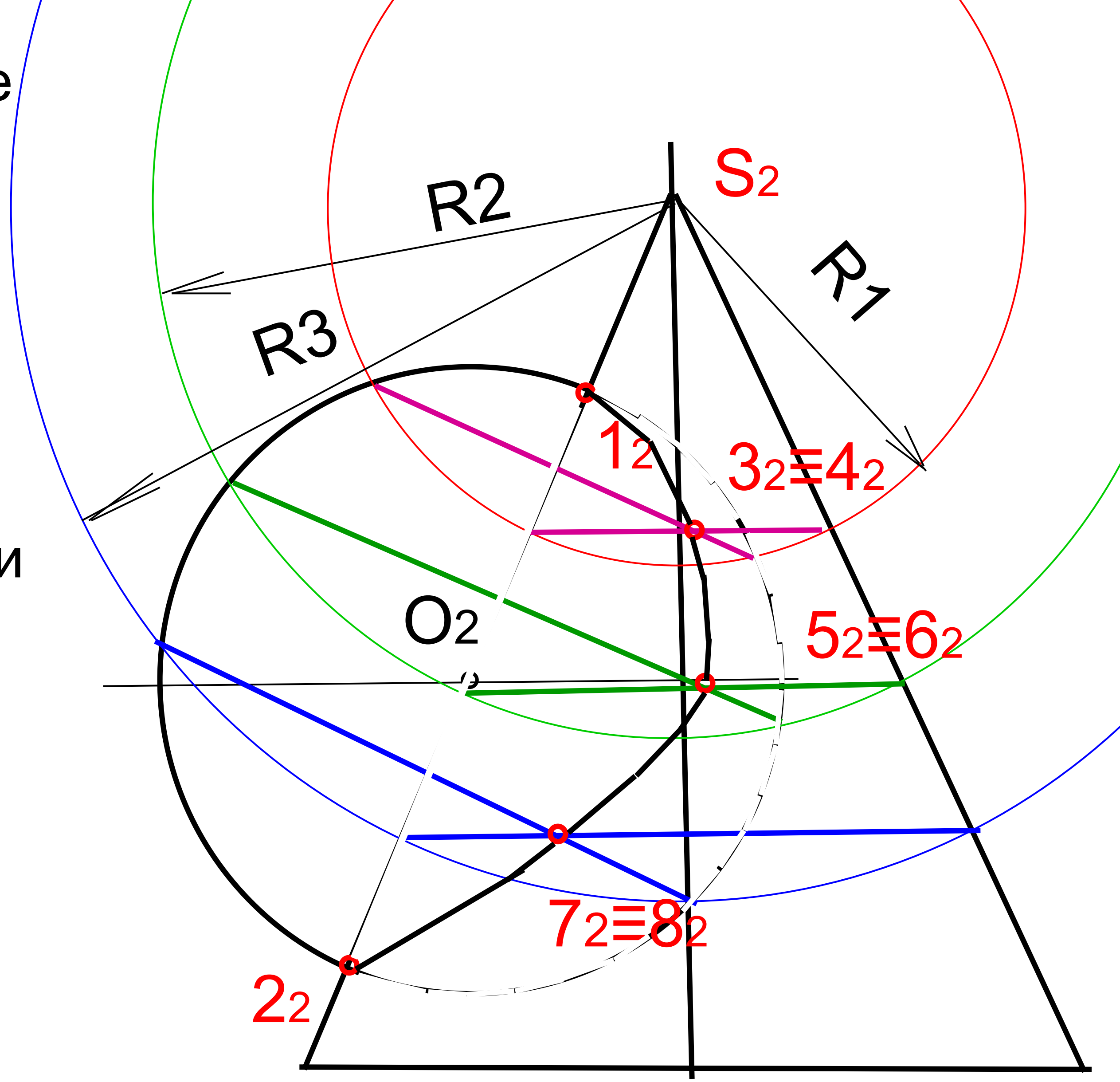
Строим сечения сферы – посредника с существующими поверхностями.

Определяем общие точки 7 и 8, на пересечении полученных сечений

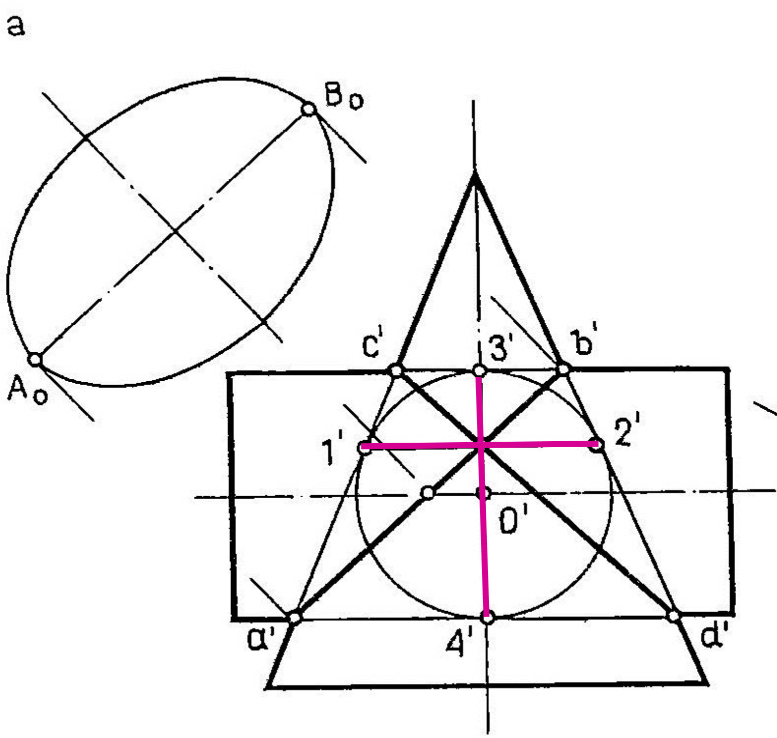


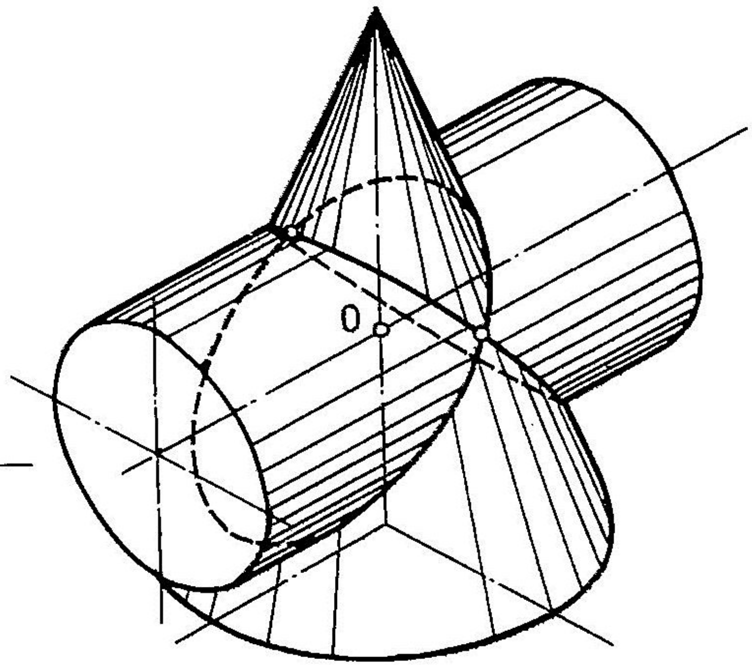


Соединим найденные точки 1-8, принадлежащие обеим искомым поверхностям. Получим линию пересечения (перехода) сферы и конуса.



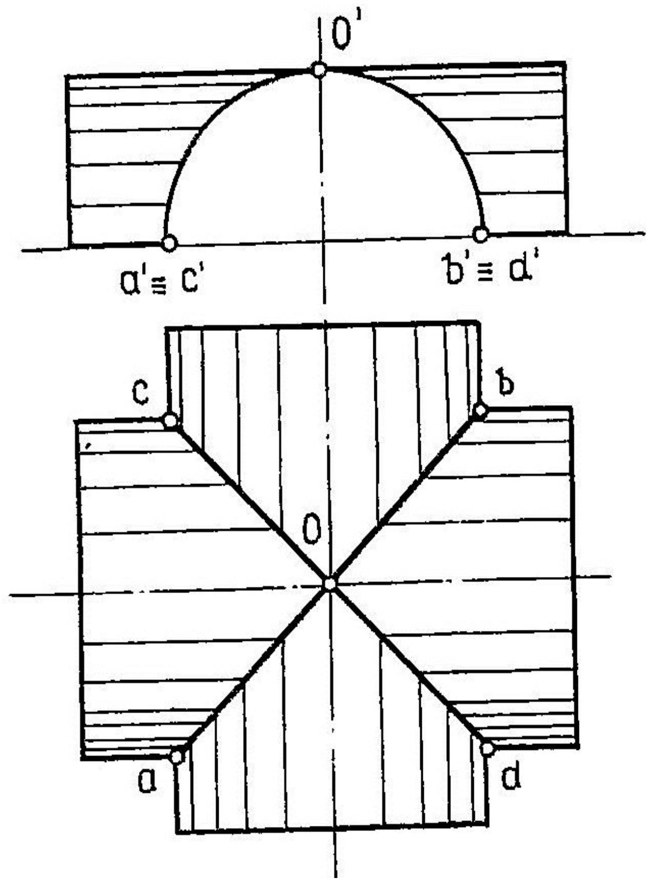
Поверхности конуса и цилиндра с общей фронтальной плоскостью симметрии касаются сферы по линиям 1-2 и 3-4. Линии пересечения поверхностей представляют собой эллипсы, плоскости которых перпендикулярны П2. Теорема Монжа: Если две поверхности второго порядка описаны вокруг третьей поверхности второго порядка или вписаны в нее, то они пересекаются по двум плоским кривым второго порядка

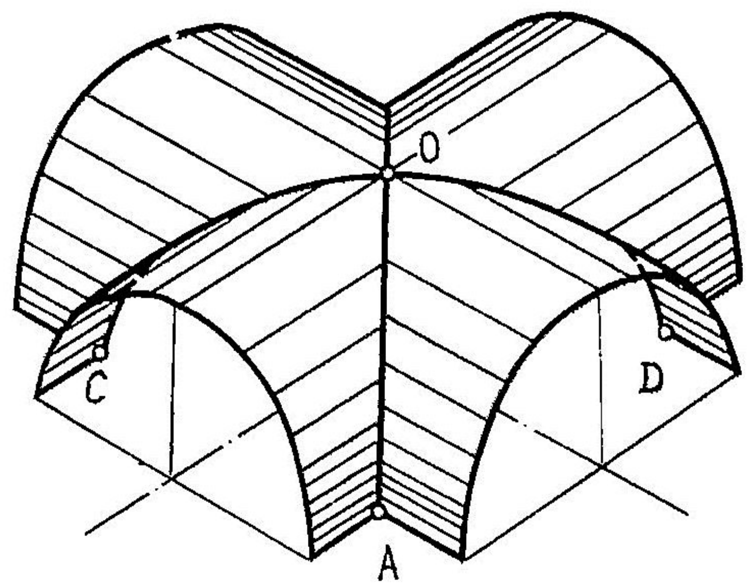




Эта закономерность имеет важное значение при проектировании различных архитектурных форм и пространственных конструкций, например сводов.

Пересечение двух цилиндров- крестовый свод



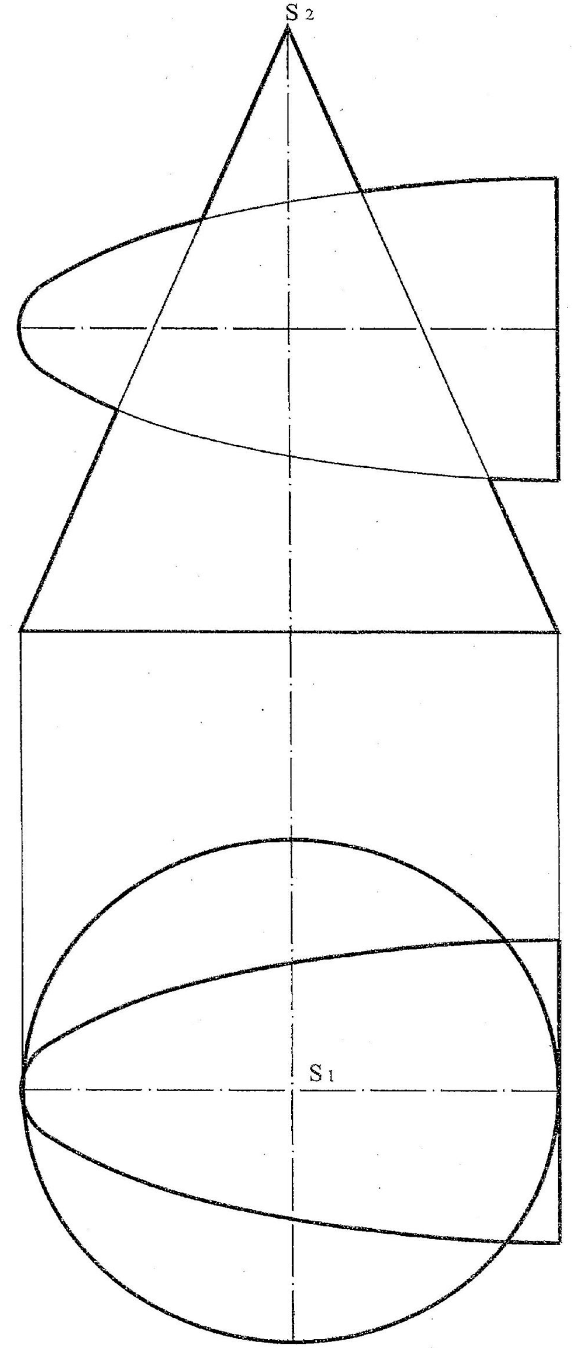


Задача 10.11 стр.60

Построить проекции линии пересечения конуса вращения с параболоидом вращения методом концентрических сфер-посредников.

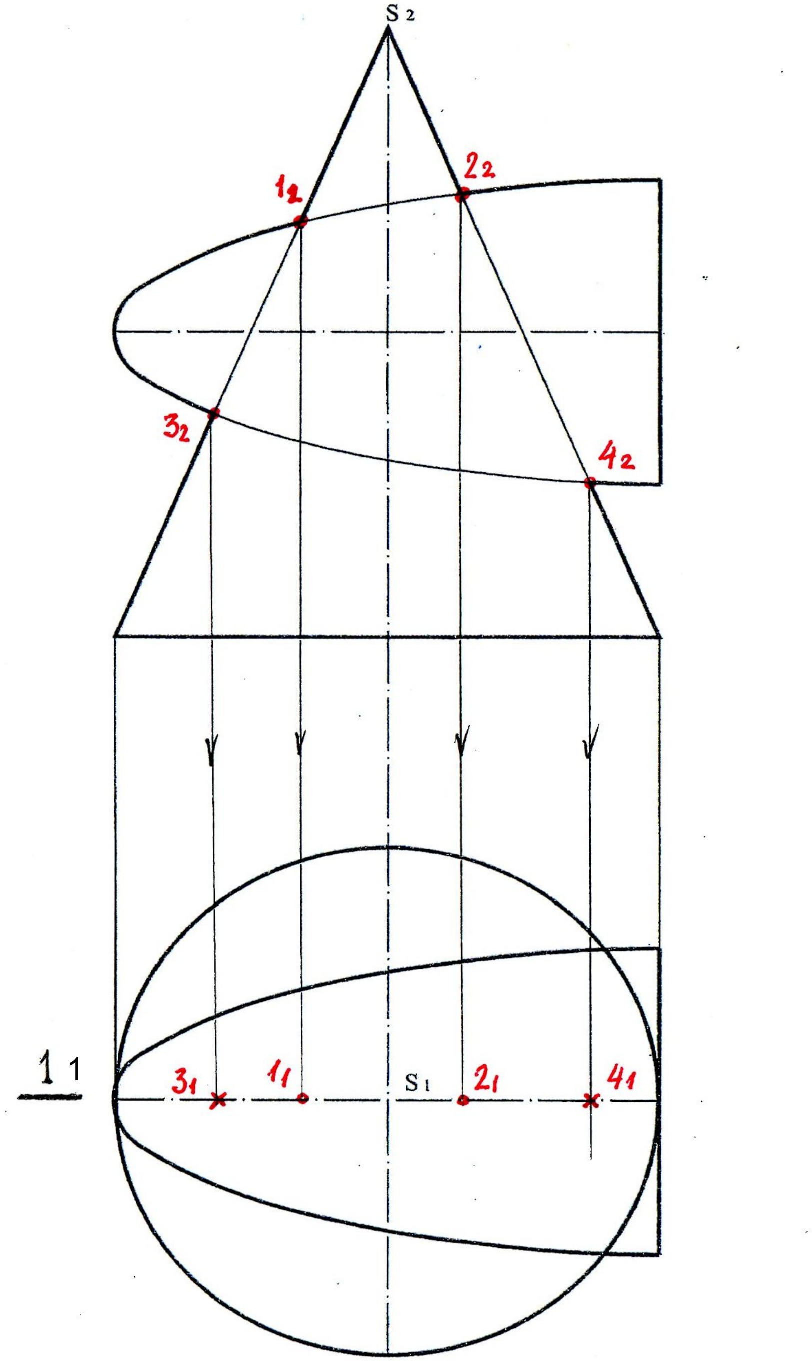
Решение:

1. Для определения линии пересечения двух искомых поверхностей применим метод плоскостей-посредников.



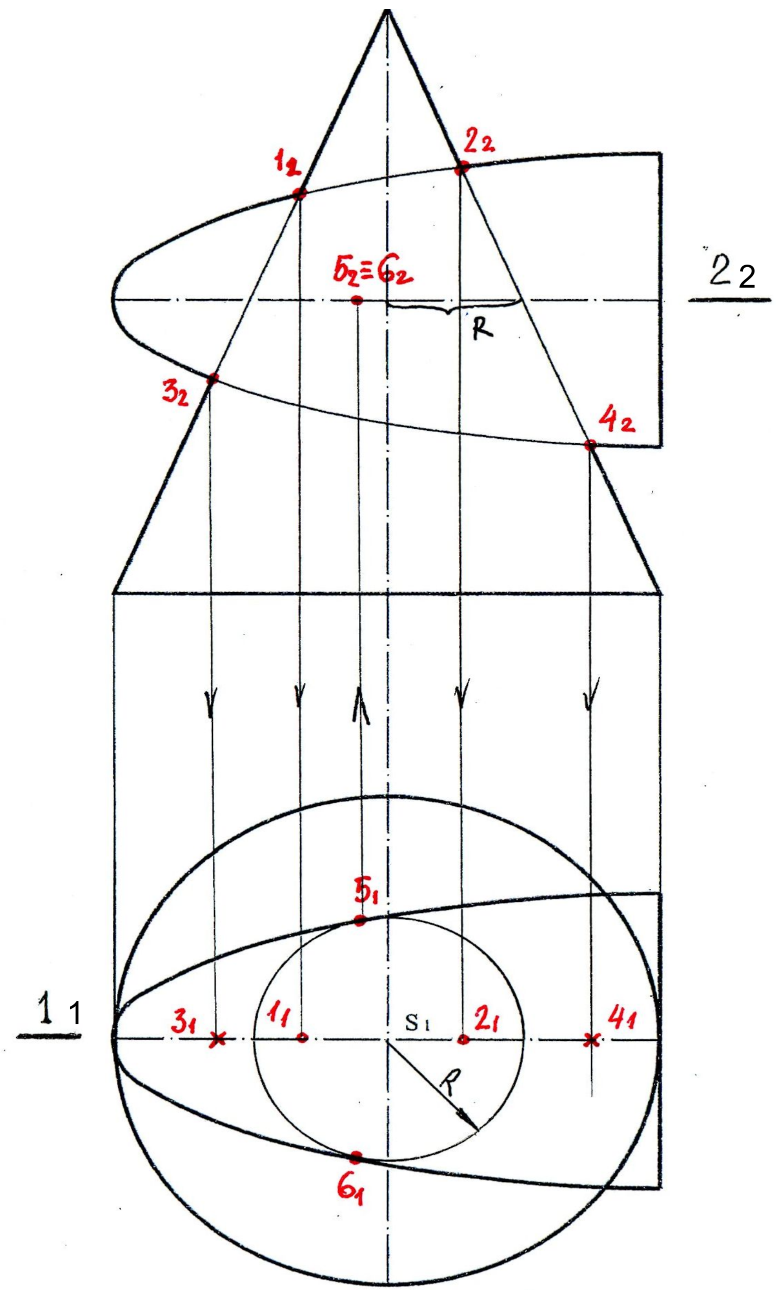
1-ую плоскость-посредник проведем через плоскость симметрии поверхностей (по главным меридианам).

В сечении конуса получим треугольник, в сечении параболоида вращения – параболу. Накладка двух сечений определяет проекции точек на П2 : $1_2 \ldots 4_2$. Строим их горизонтальные проекции $1_1 \ldots 4_1$



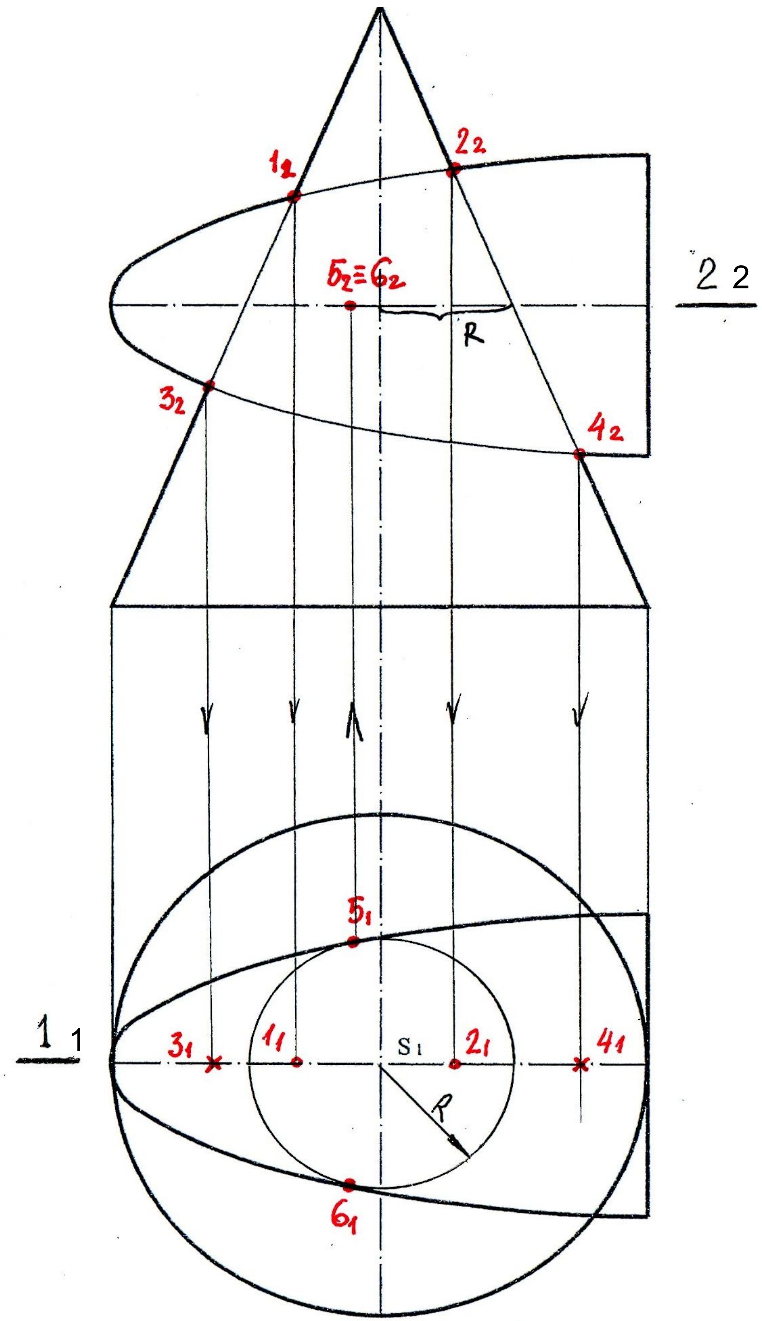
2. Проверяем, можно ли еще взять вертикальные плоскости-посредники, параллельные П2. В сечении по конусу получим гиперболу, по параболоиду вращения -параболу. Обе кривые требуют времени для построения. Вывод: больше вертикальные плоскости использовать нельзя.

3. Возьмем горизонтальную плоскость-посредник 2. В сечении по конусу получим окружность радиусом R. По параболоиду – параболу, совпадающую с очерком параболоида на П1. Находим точки пересечения двух полученных сечений- в этом случае – точки касания 5_1 и 6_1. Строим фронтальные проекции этих точек 5_2 и 6_2.



4. Проверяем, можно ли еще использовать горизонтальные плоскости - посредники. В сечении по конусу получаем окружности, а в сечении по параболоиду – параболы, построение которых занимает много времени. Вывод: кроме плоскости 2 больше использовать горизонтальные плоскости не целесообразно.

Найденного количества общих точек недостаточно, чтобы построить линию перехода двух искомых поверхностей

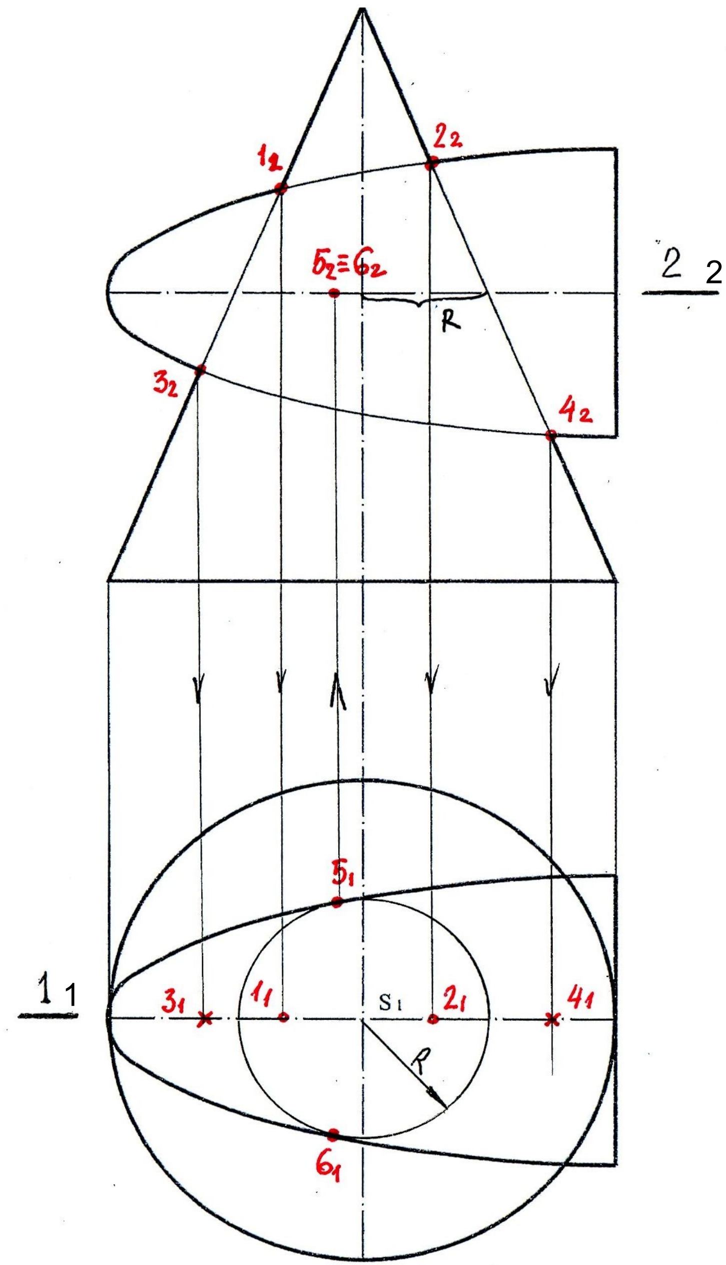


5. Проверяем возможность применения метода концентрических сфер-посредников:

- Обе пересекающиеся поверхности являются поверхностями вращения.
- Оси поверхностей пересекаются
- Поверхности имеют общую плоскость симметрии, параллельную одной из плоскостей проекций.

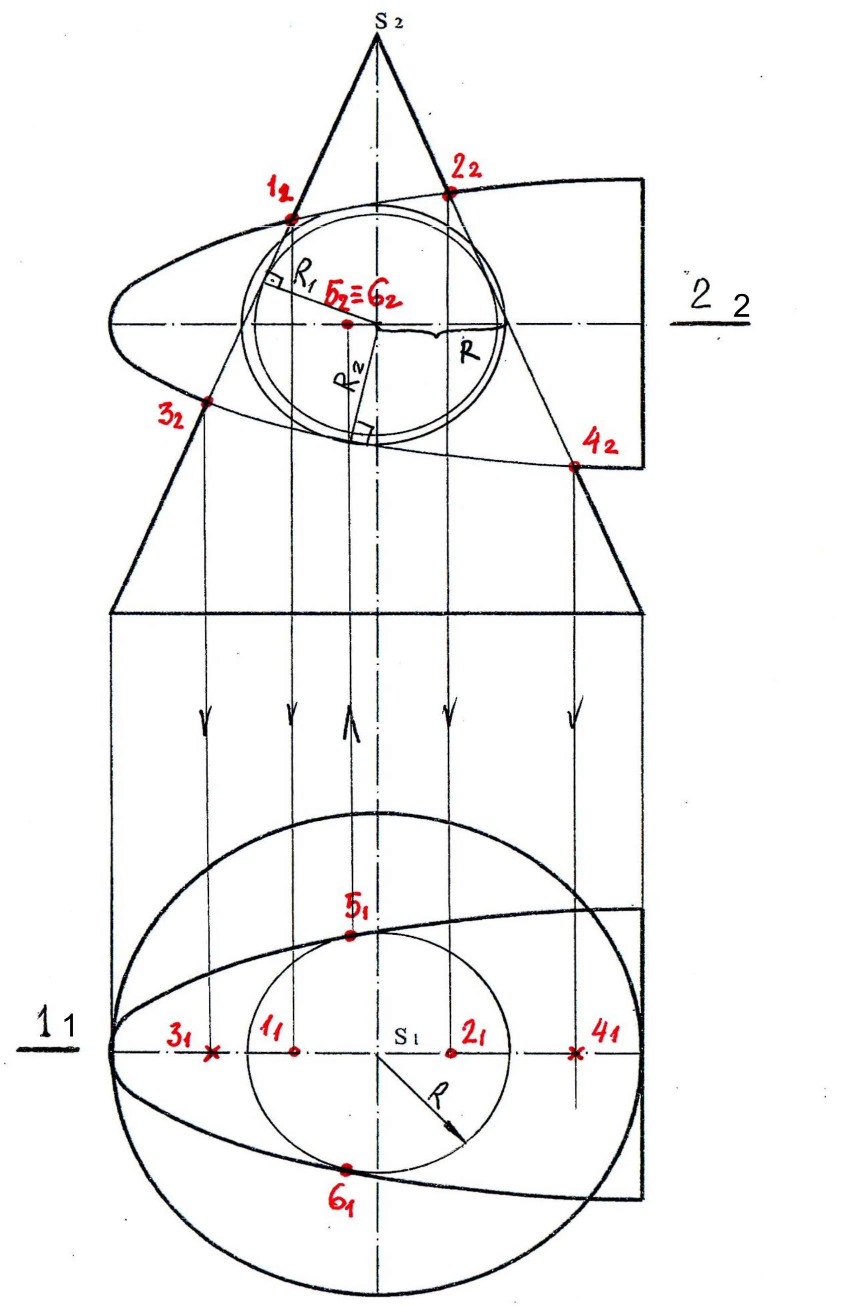
Вывод: можно применить метод сфер-посредников

Центр сфер- точка пересечения осей поверхностей

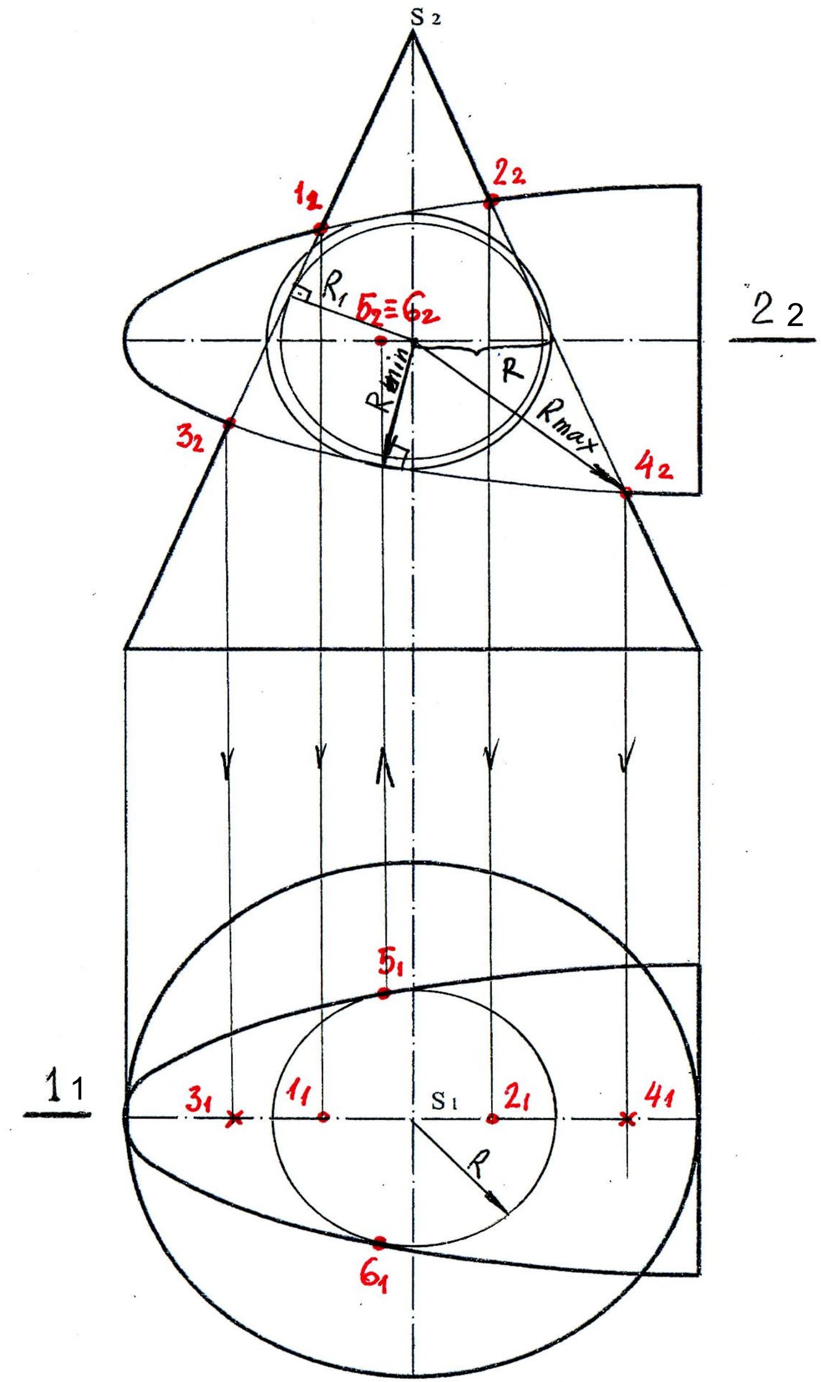


6. Определяем минимальный радиус сферы:

- проводим касательно к конусу сферу радиусом R1. Данная сфера находится внутри параболоида, следовательно не имеет с ним общих точек.
- Проводим сферу касательно к параболоиду радиусом R2. Данная сфера пересекает поверхность конуса.
- Вывод: Минимальный радиус = R2

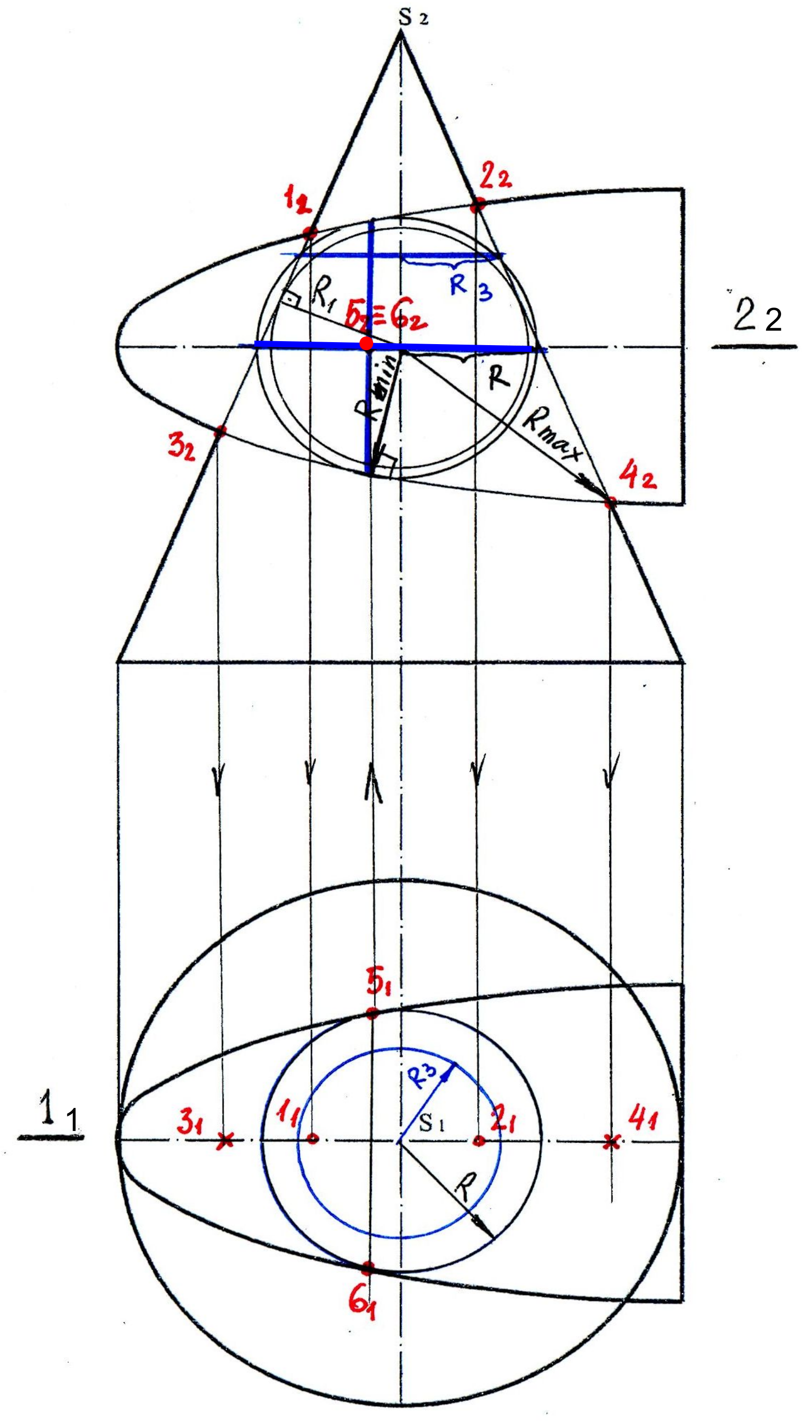


7. Определяем максимальный радиус сфер – посредников. Он равен наибольшему расстоянию от центра сферы до точек накладки главных меридианов. R max = расстоянию до точки 4_2

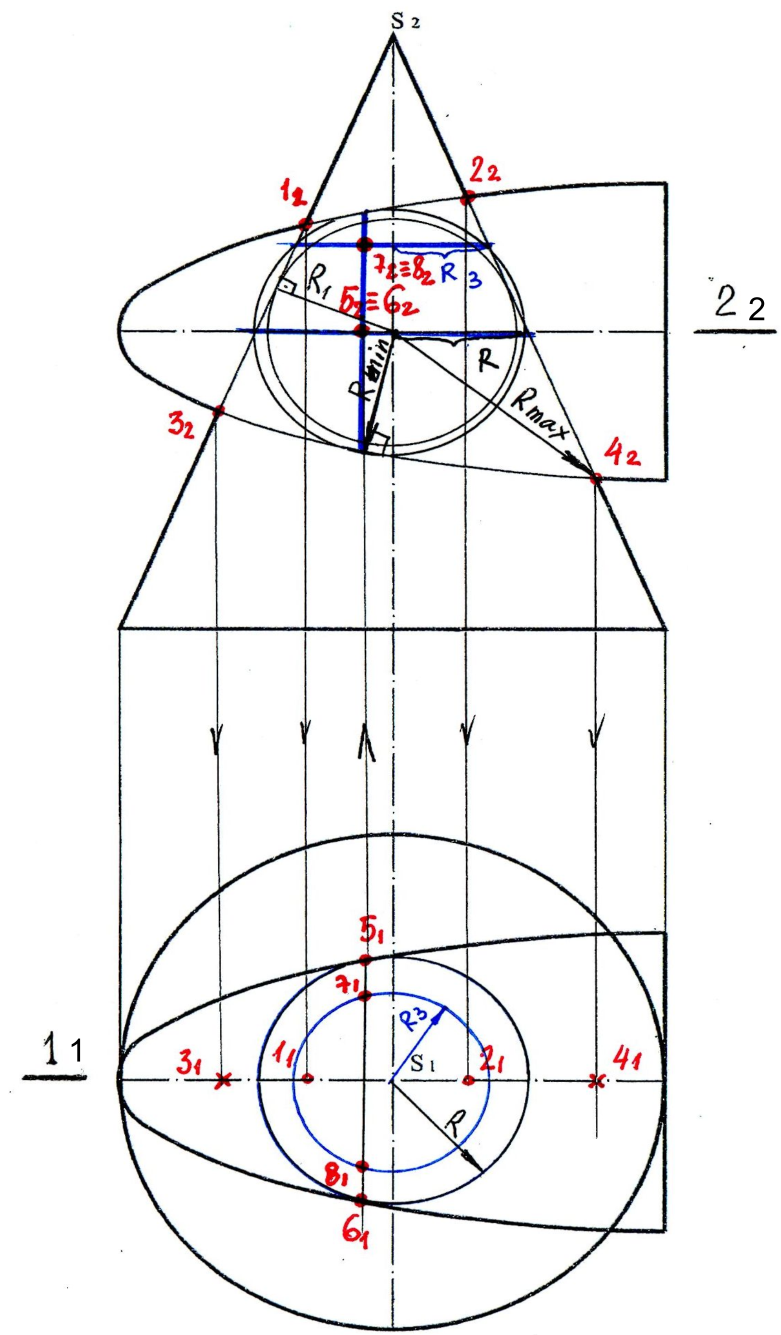


8. Т.к. минимальная сфера является соосной с искомыми поверхностями, определяем общие параллели сферы с конусом и параболоидом. На П2 они проецируются в прямые, перпендикулярные осям поверхностей, проведенные в точках пересечения очерков соответствующих поверхностей со сферой. Получили две параллели по конусу и одну- по параболоиду.

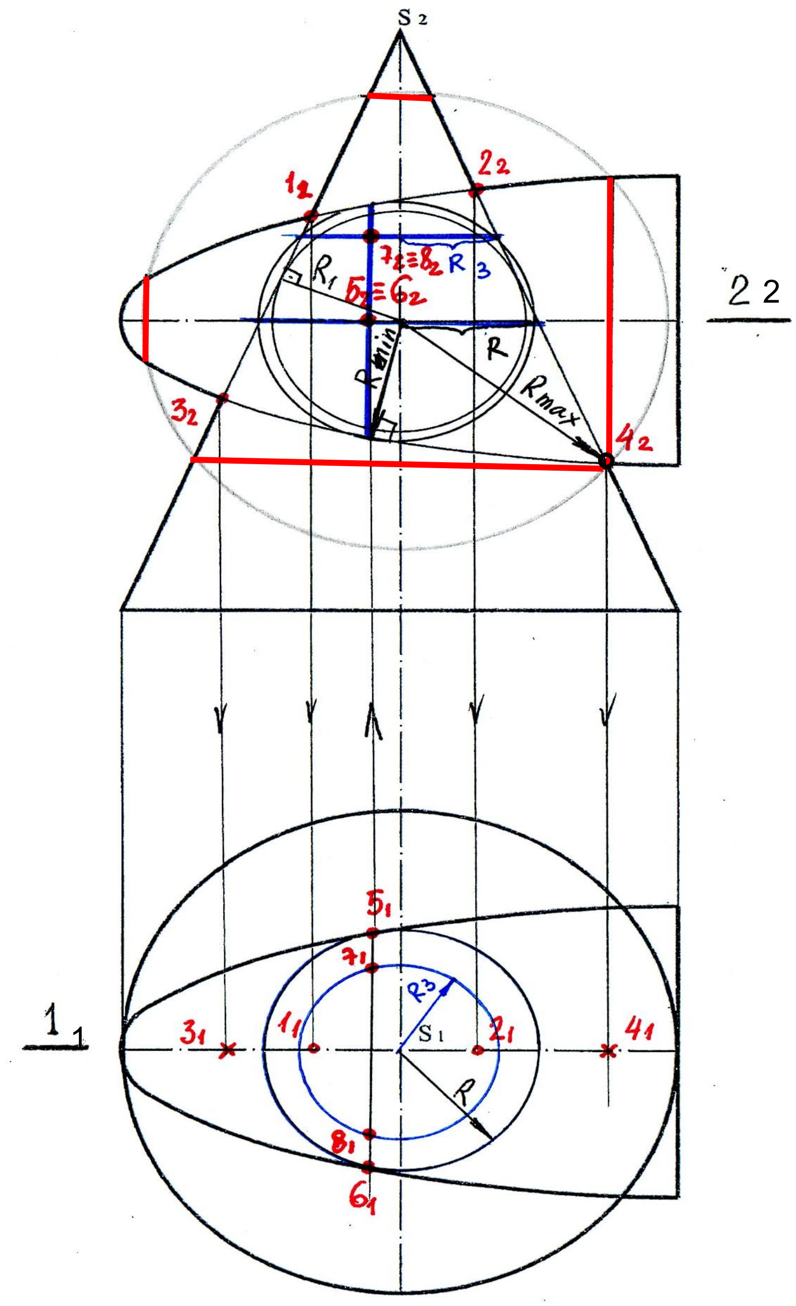
Находим общие точки пересечения полученных параллелей: 5_2 и 6_2. Эти точки мы уже определили раньше методом плоскостей-посредников, когда использовали плоскость 2.



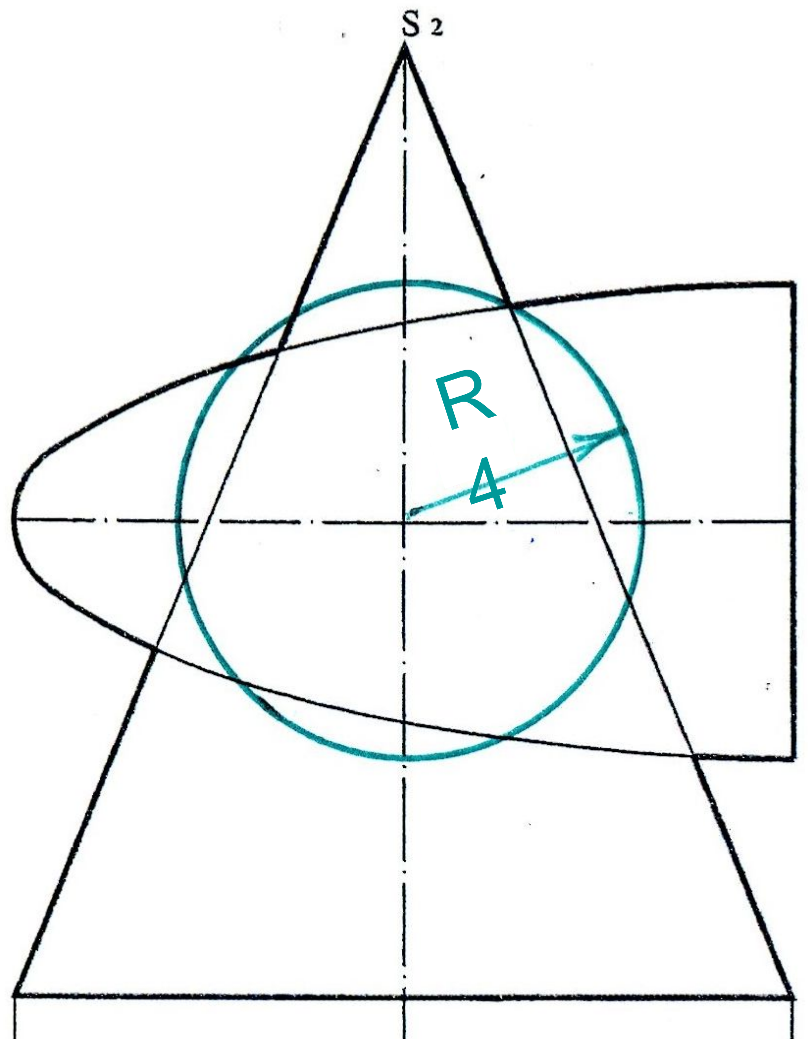
Точки 7 и 8: фиксируем фронтальную проекцию 7_2 и 8_2 на пересечении верхней параллели конуса и параллели параболоида. Затем строим горизонтальные проекции этих точек. Т.к. точки 7 и 8 принадлежат одновременно и конусу и параболоиду, на П1 их проще строить как лежащие на параллели конуса . Измеряем на П2 радиус R3 от оси до очерковой образующей конуса и строим на П1 проекцию окружности, на которой по линиям связи находим 7_1 и 8_1.



9.Сфера максимального радиуса пересекает параболоид по двум параллелям и конус по двум параллелям. В результате находим одну точку 4 (точку касания двух окружностей). Мы ранее нашли (.)4 с помощью плоскости-посредника 1.

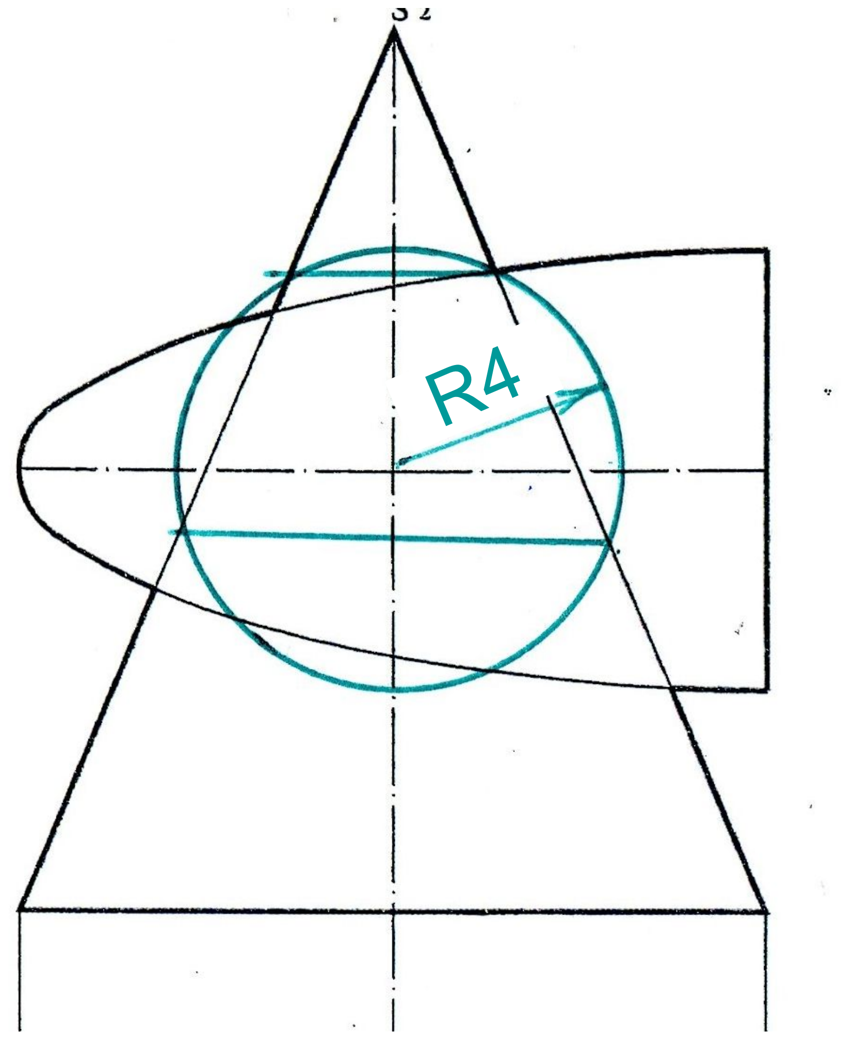


Рассмотрим отдельно пример с использованием сферы-посредника произвольного радиуса. Для определения промежуточных точек линии перехода в пределах «рабочей зоны» сфер-посредников (между минимальной и максимальной) построим сферу произвольного радиуса R4



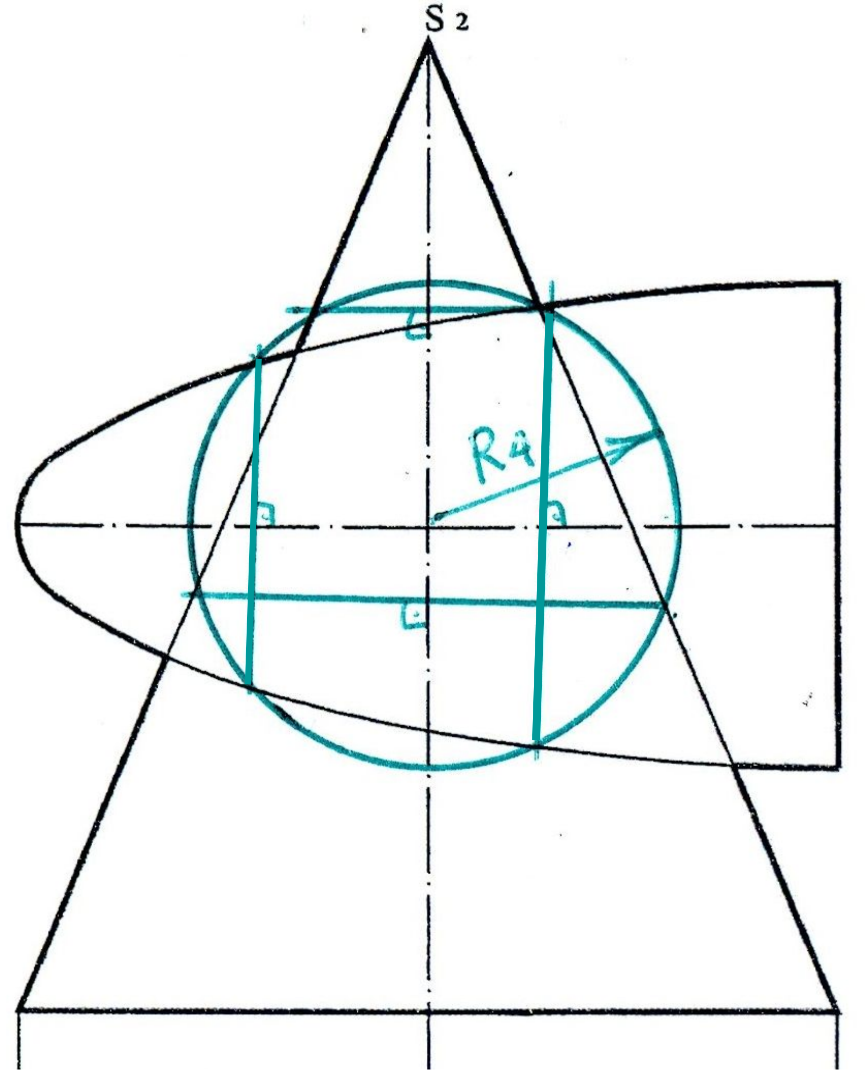
Определяем общие параллели сферы посредника и конуса.

На П2 окружности проецируются в прямые, перпендикулярные оси конуса, проведенные в точках пересечения очерков конуса со сферой. Получили две параллели по конусу



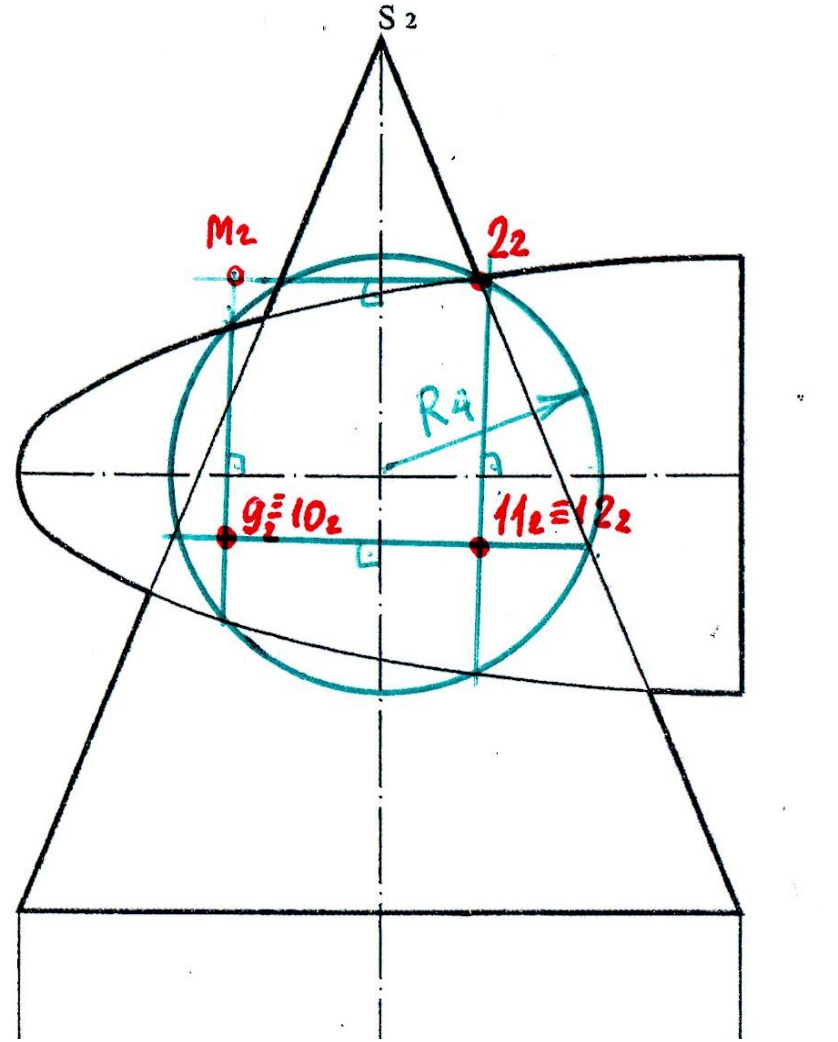
Определяем общие параллели сферы-посредника и параболоида вращения.

На П2 окружности проецируются в прямые, перпендикулярные оси параболоида, проведенные в точках пересечения очерков параболоида со сферой. Получили две параллели по параболоиду

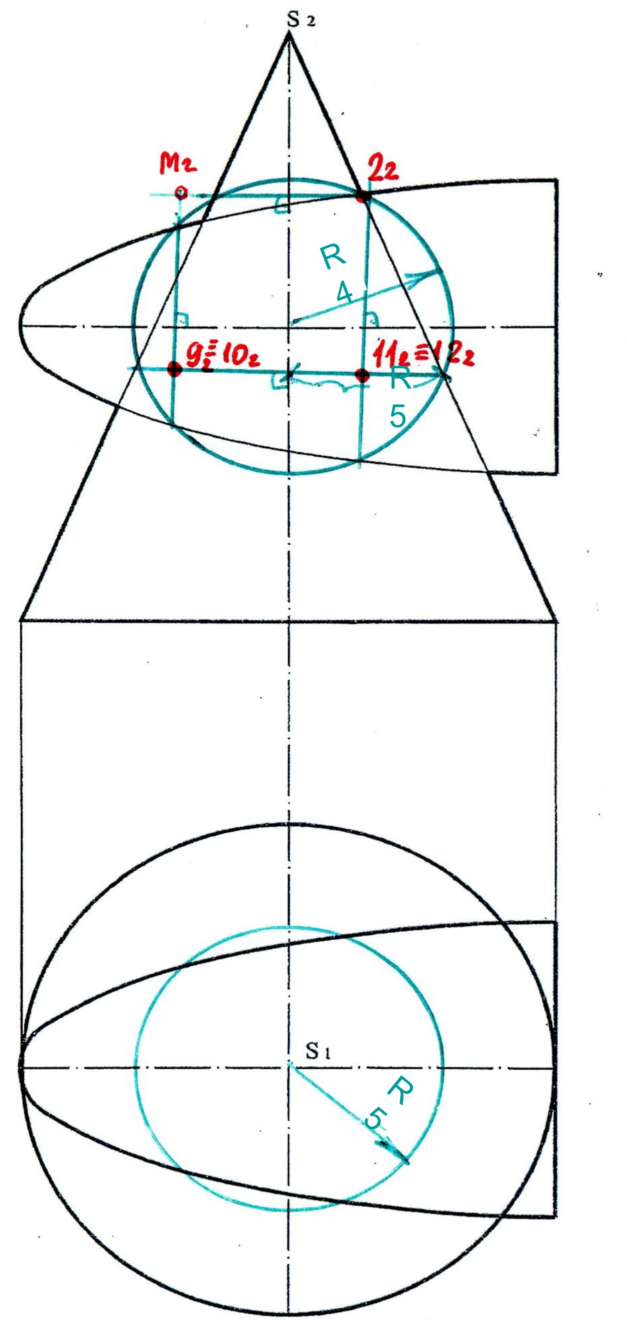


Находим фронтальные проекции точек пересечения полученных параллелей

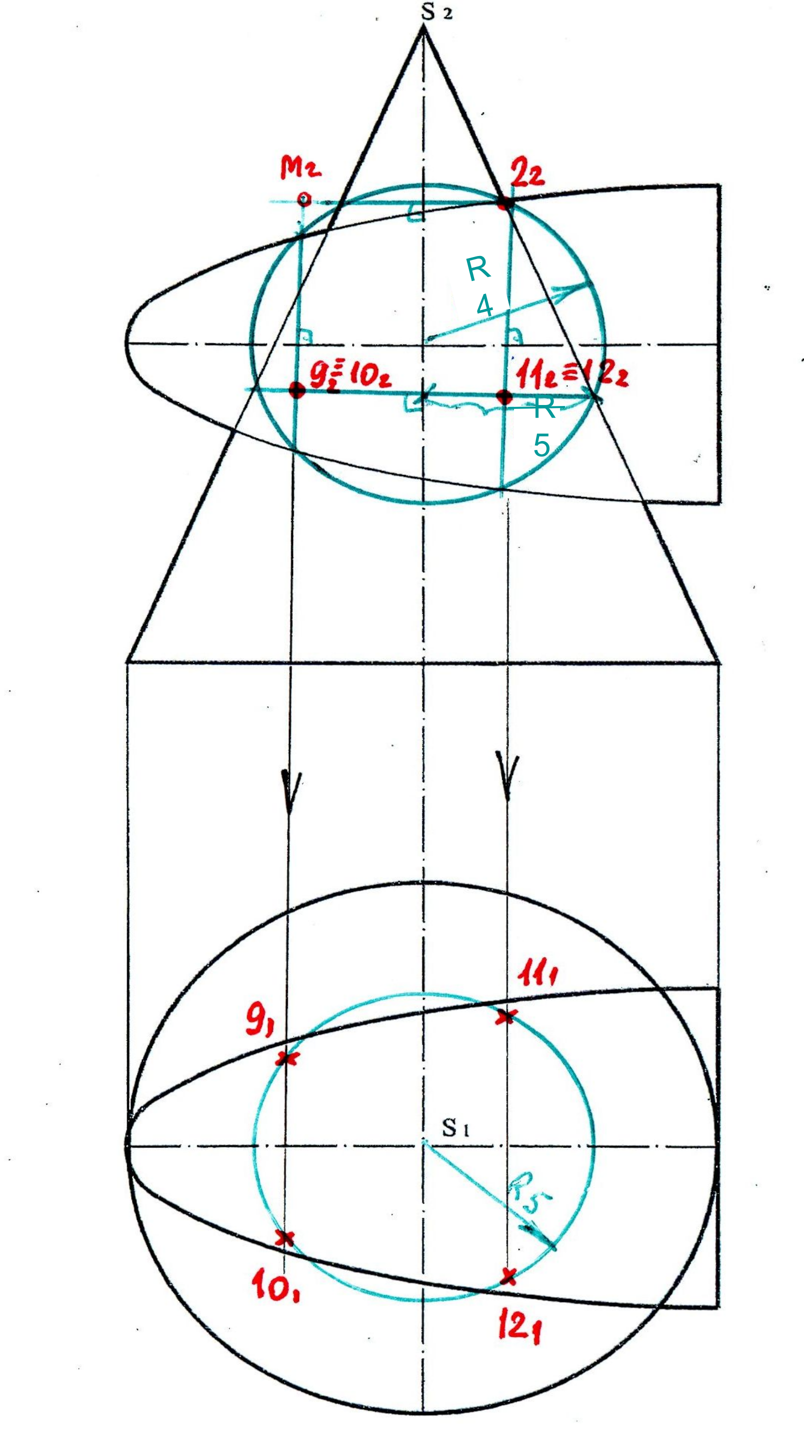
$9_2 \equiv 10_2$, $11_2 \equiv 12_2$, (.)2_2 – точка касания (подтвердили ранее найденную точку с помощью плоскости-посредника 1) и M_2- мнимая точка



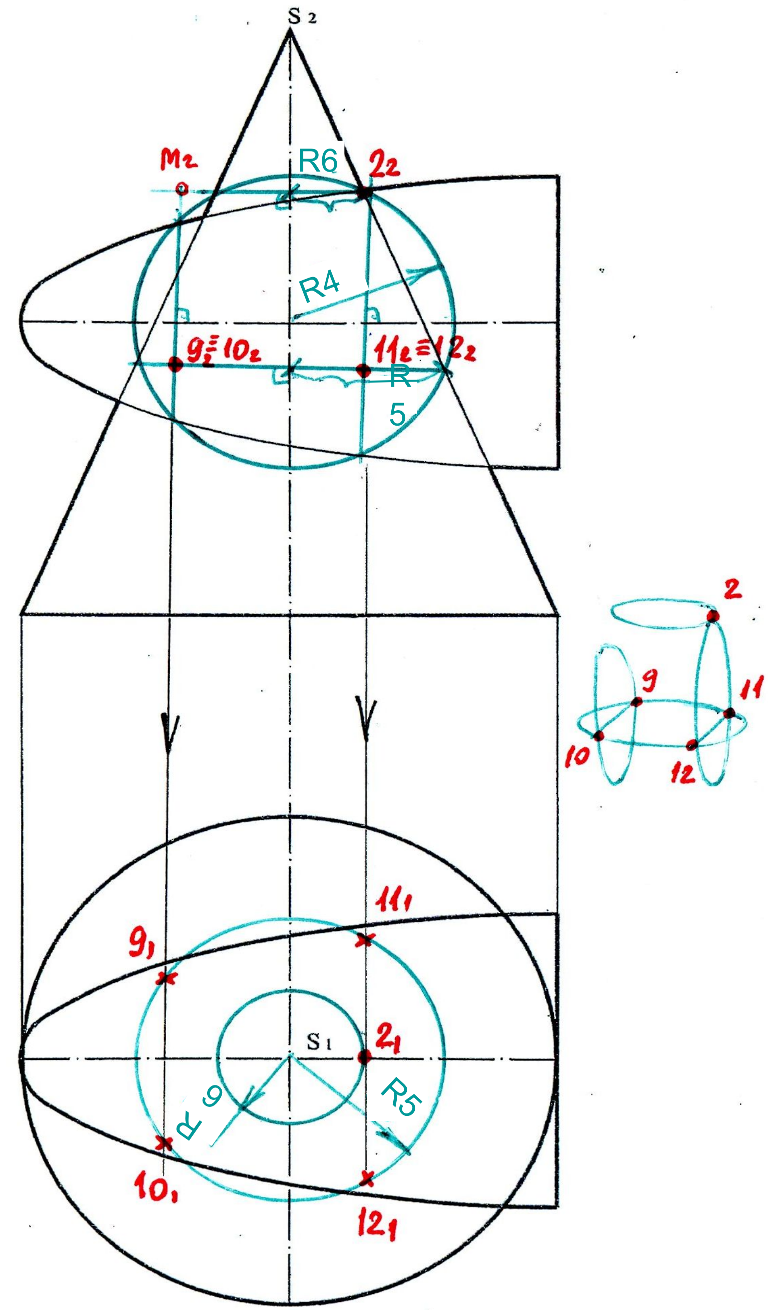
Для определения горизонтальных проекций найденных точек построим на П1 окружность радиусом R5, на которой лежат точки 9 , 10, 11 , 12.



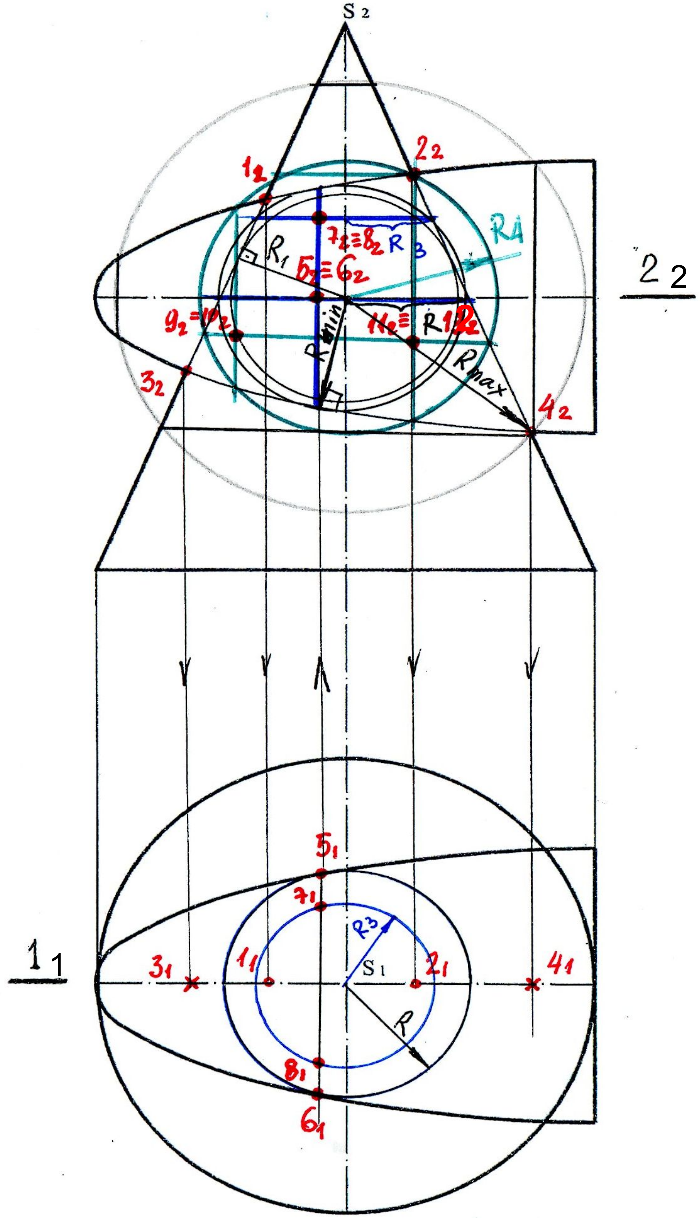
- Строим горизонтальные проекции 9_1 , 10_1, 11_1 , 12_1.
- Т.к. точки 9…12 находятся в нижней части параболоида, на П1 их проекции будут невидимы.

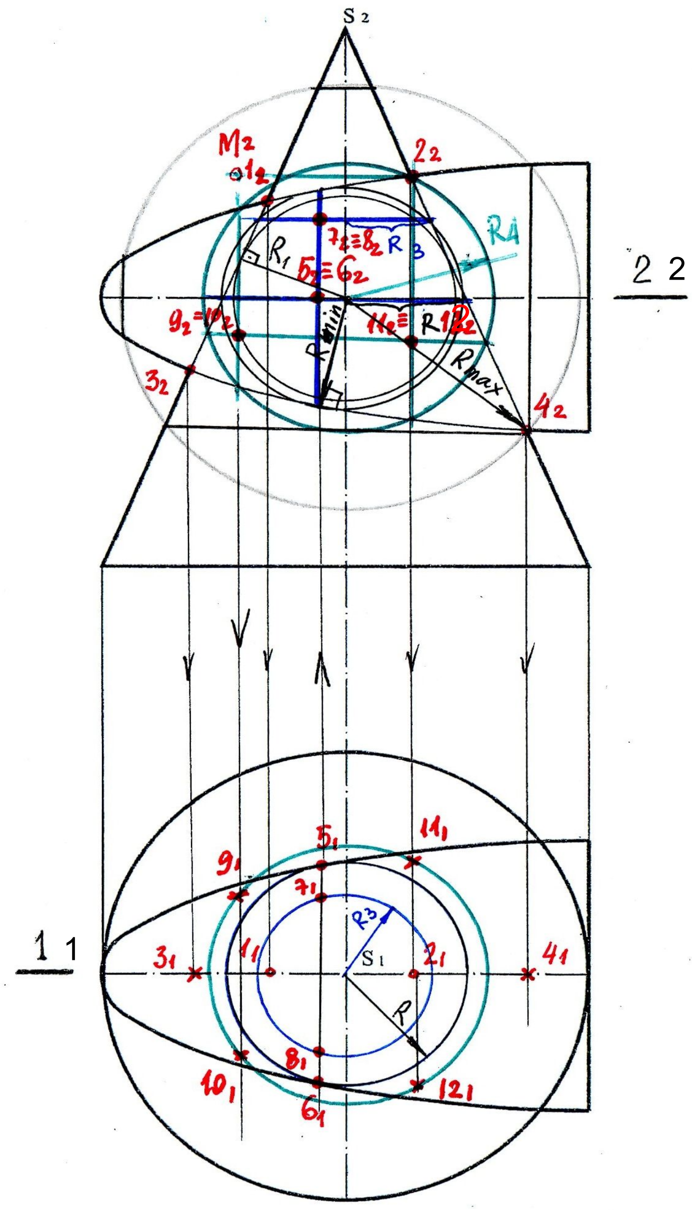


• Таким образом, в результате применения промежуточной сферы-посредника радиусом R4, были найдены пять точек: 2, 9…12



Вернемся к первоначальному чертежу



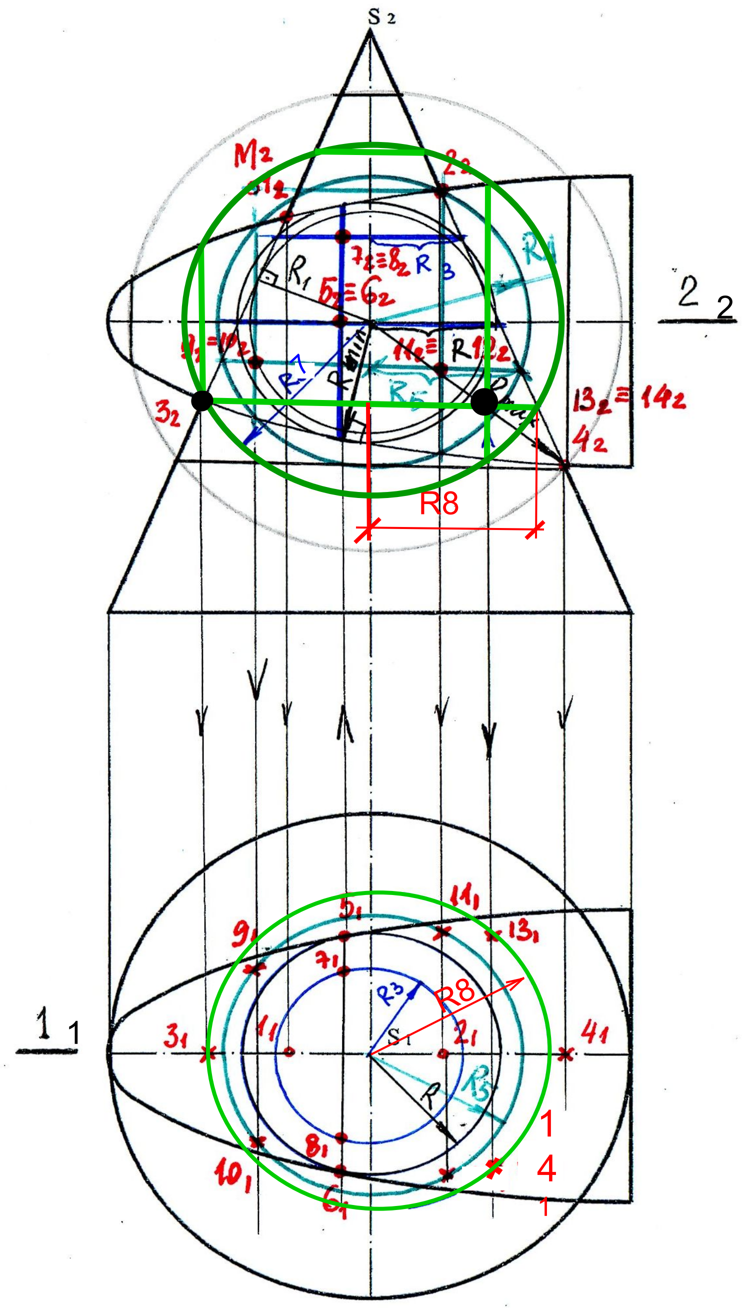


- Для определения дополнительных точек в нижней части конуса вводим

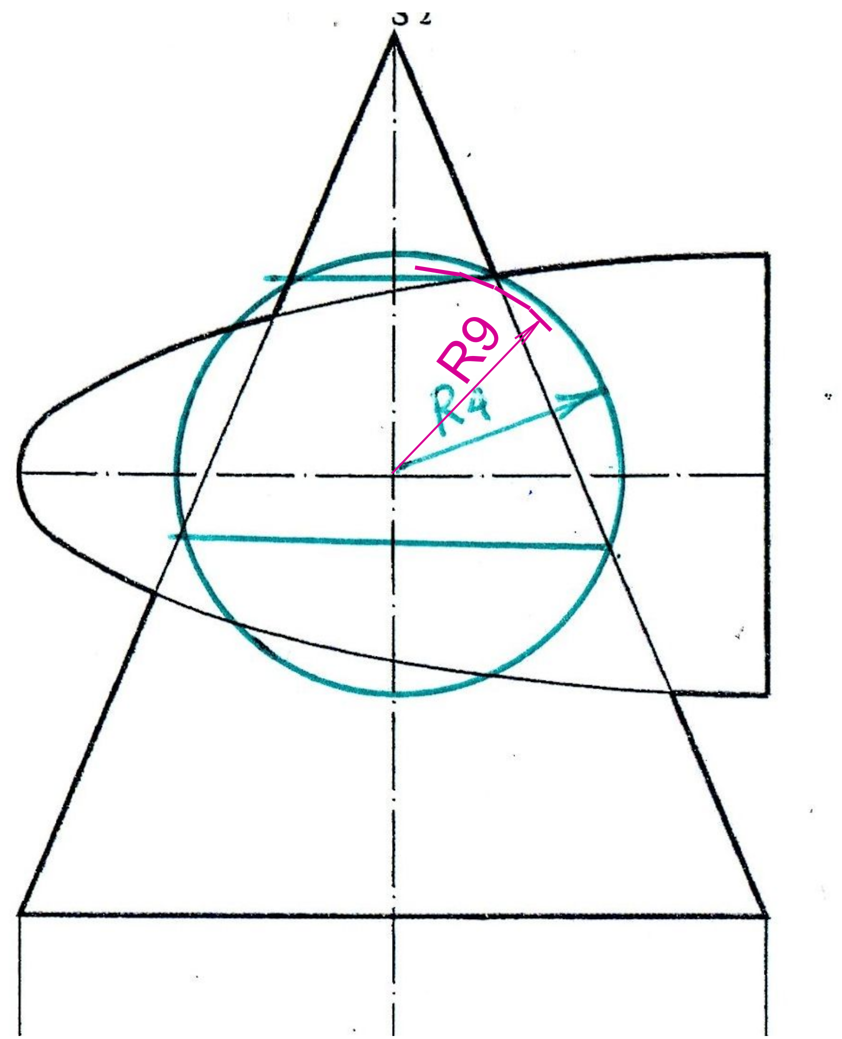
сферу - посредник радиусом

R7. В результате получим точки 13 и 14 и подтвердим (.)3.

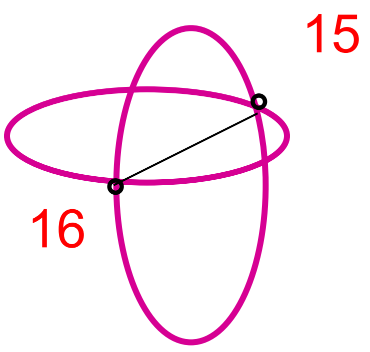
Для построения горизонтальной проекции точек 13 и 14 строим окружность R8 (параллель конуса, на которой лежат данные точки)

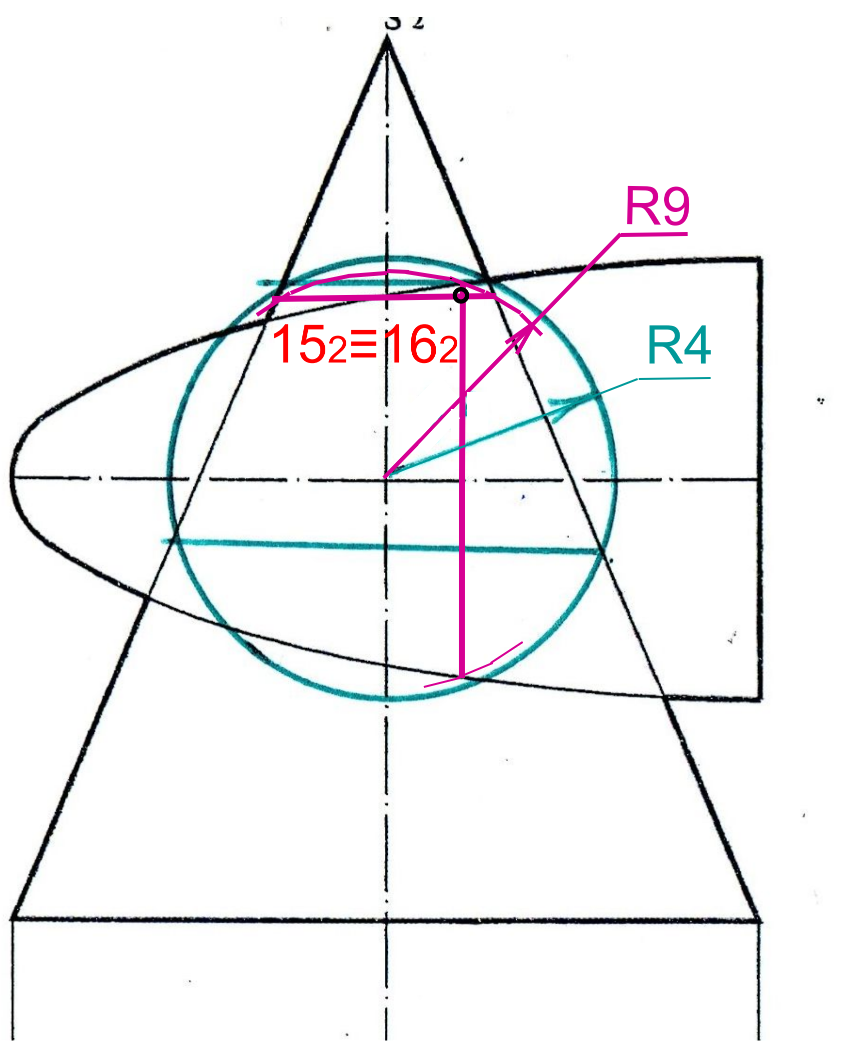


- Для уточнения линии пересечения (перехода) в верхней части конуса построим сферу –посредник произвольным радиусом, но меньше R4 →R9.



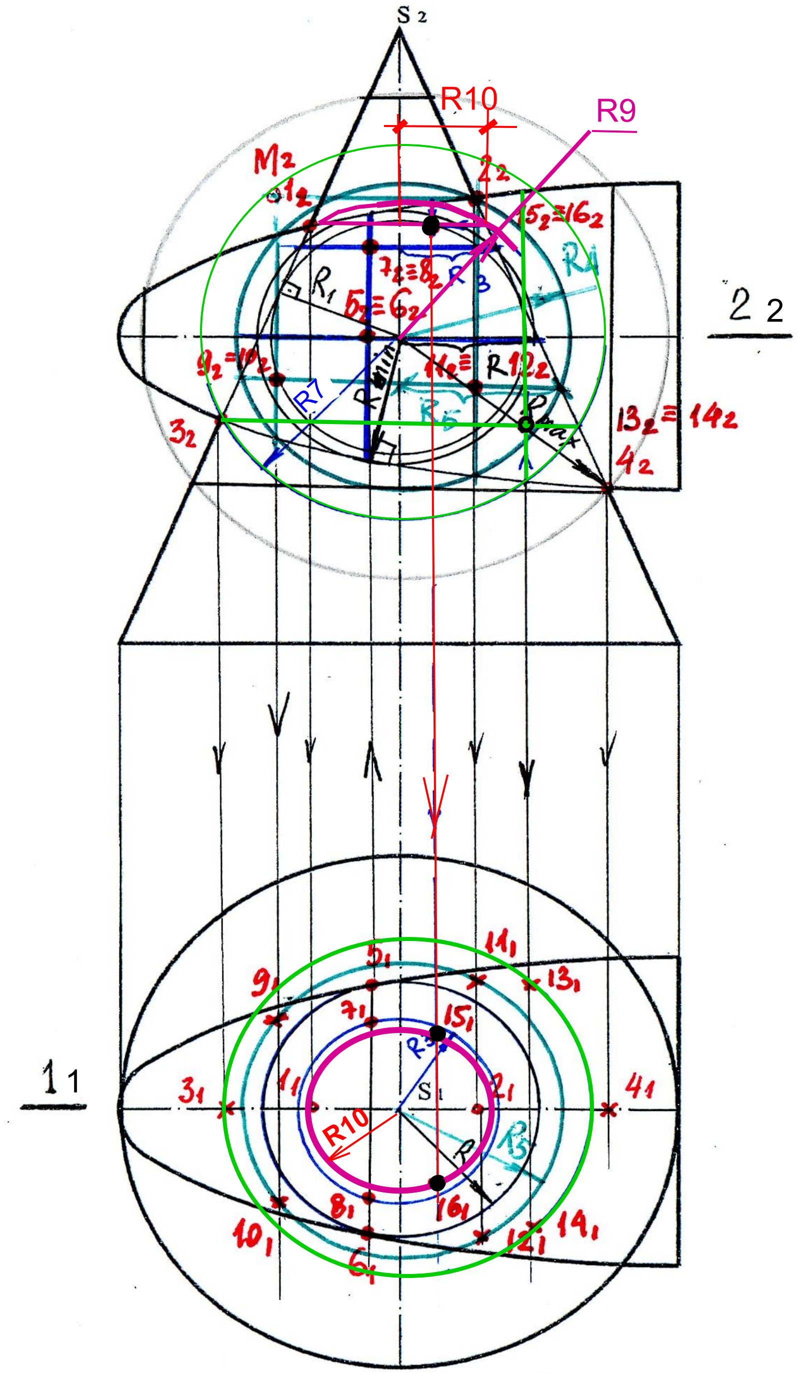
- Построим общие параллели сферы-посредника и искомых поверхностей. Найдем общие точки полученных сечений: 15 и 16



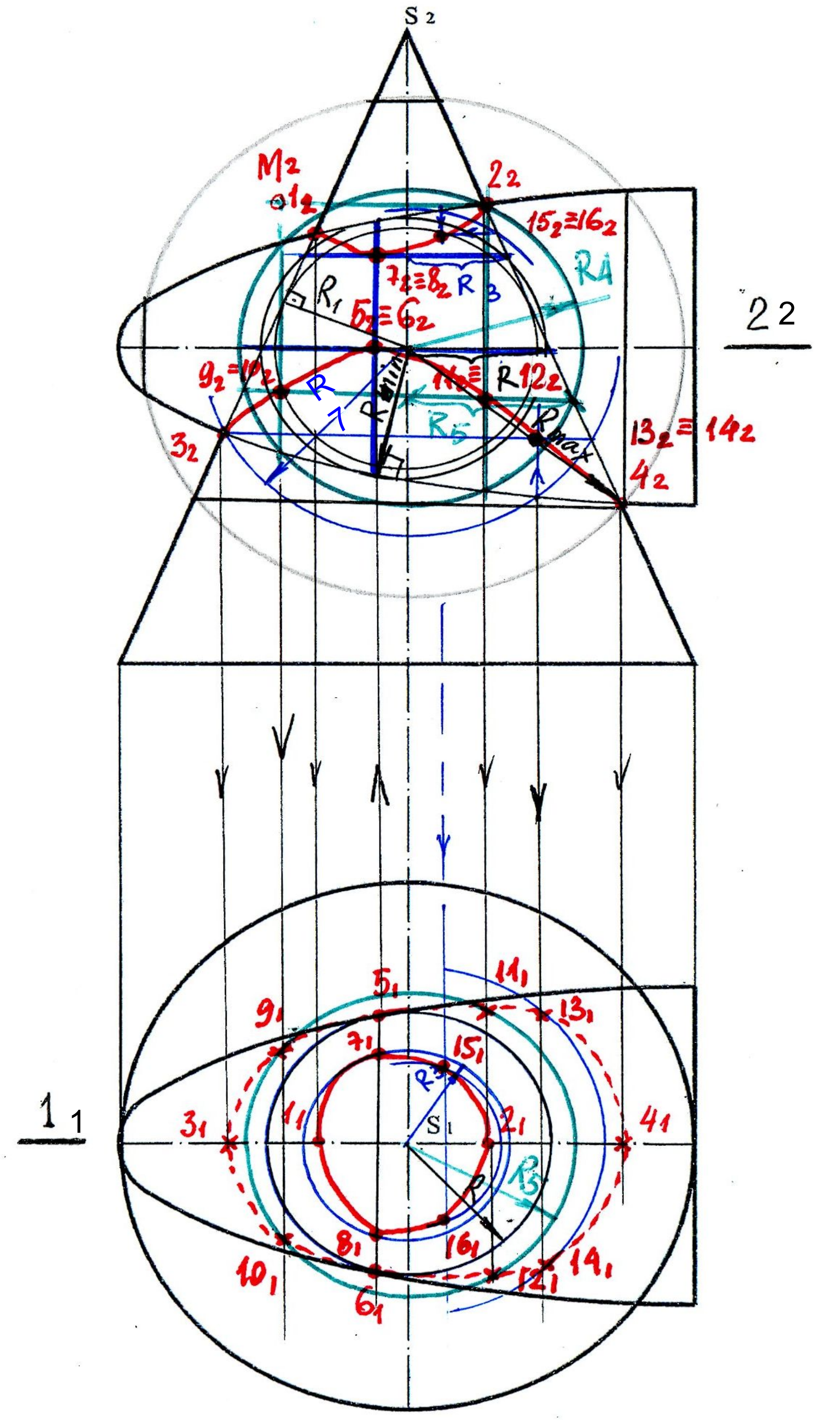


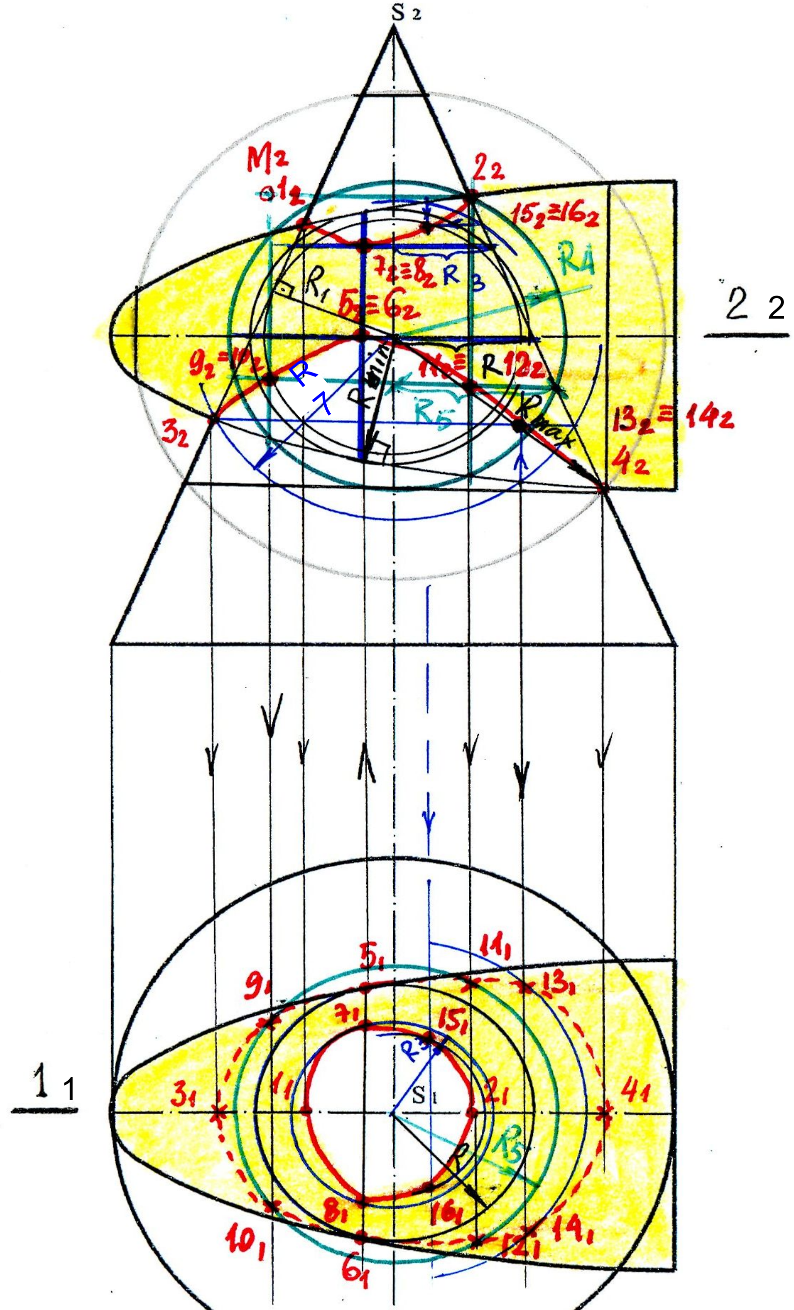
- Определим фронтальные проекции точек 15_2 и 16_2

- Построим горизонтальные проекции этих точек 15_1 и 16_1, они лежат на поверхности конуса на параллели радиусом R10



- Соединим полученные точки, получим две линии перехода конуса и параболоида вращения .
- На П1 строим изображение горизонтальных проекций линий перехода с учетом видимости





S2
M2
12
22
152≡162
72≡82
R3
R4
R1
52≡62
2 2
92≡102
R
Rmin
112≡122
R5
Rmax
32
132≡142
42
51
91
111
131
71
151
1 1
31
11
S1
21
41
81
161
101
61
121
141

Пересечение поверхностей вращения методом эксцентрических сфер

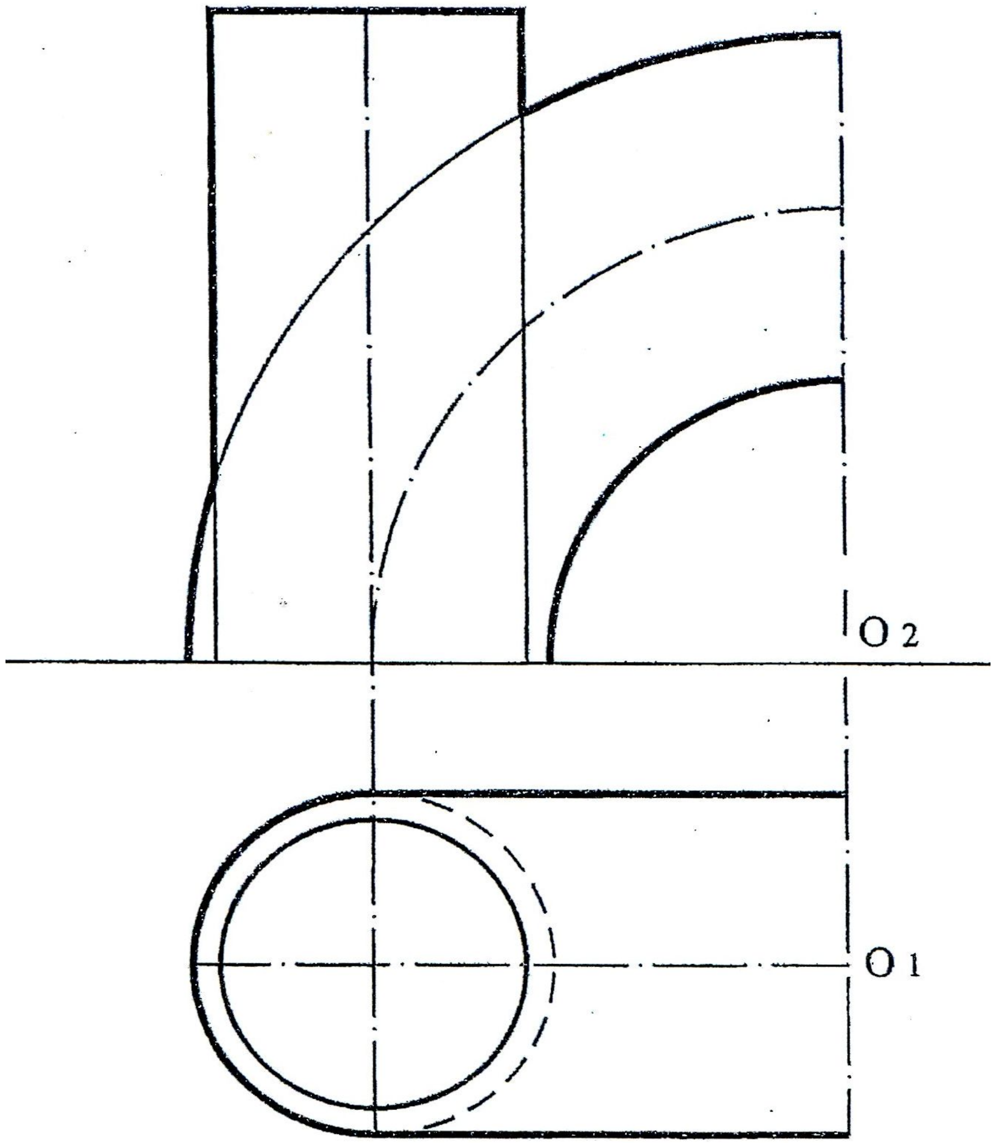
Метод эксцентрических сфер применяется в том случае, когда:

1. Пересекаются две поверхности вращения, или одна из них – циклическая.
2. Оси поверхностей скрещиваются.
3. Поверхности имеют общую плоскость симметрии.

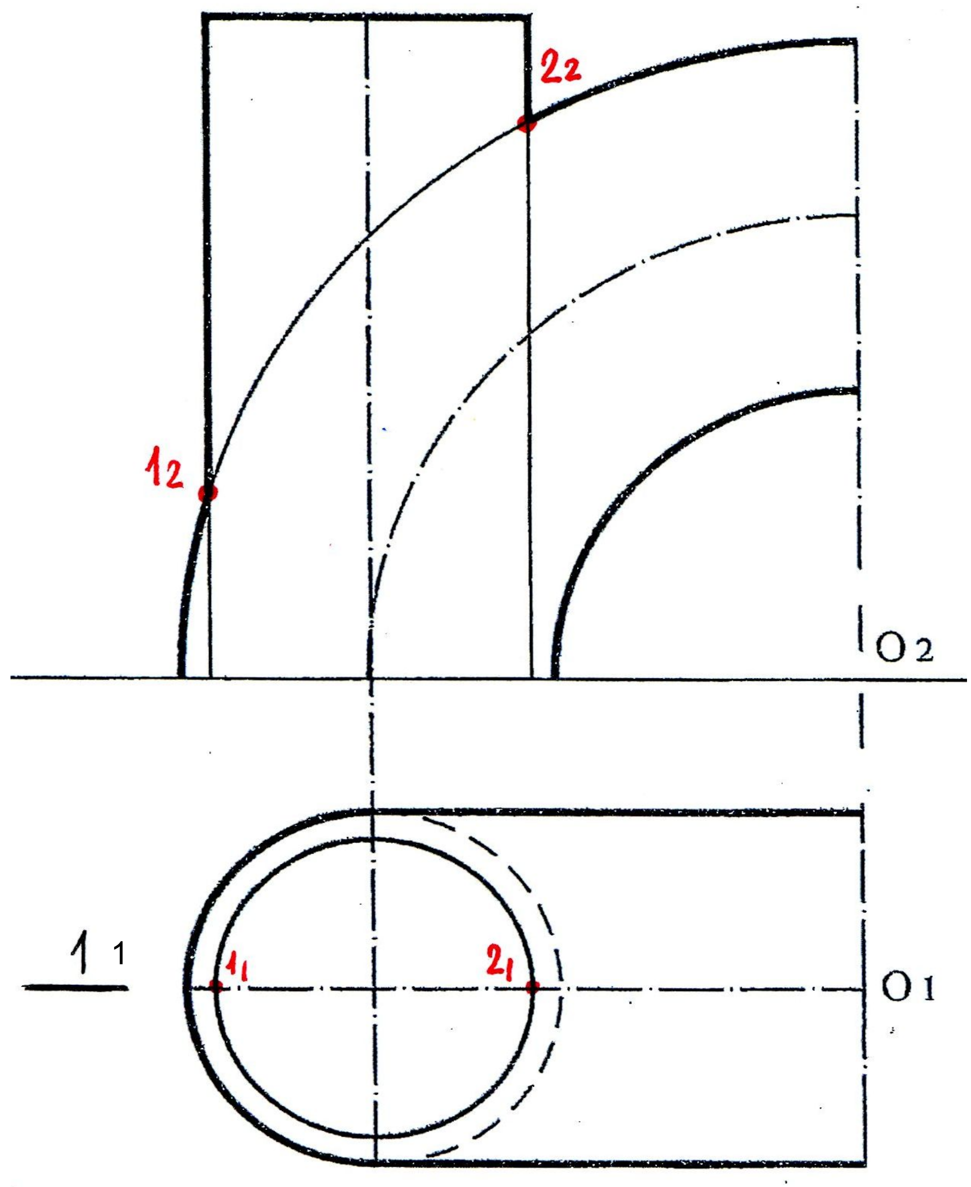
Задача 10.9 в) стр. 58:

Построить линию пересечения тора с прямым круговым цилиндром

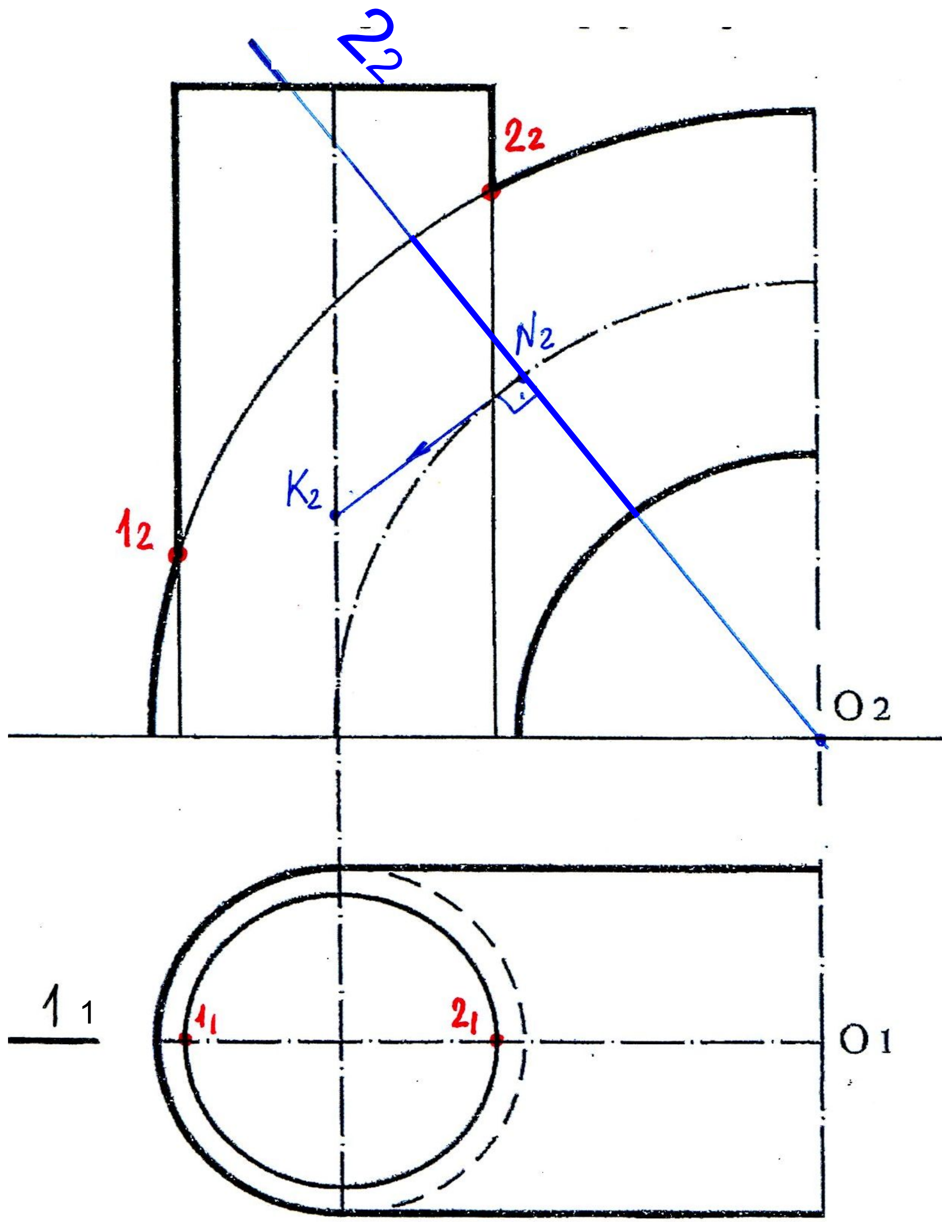
Решение: Т.к. поверхность цилиндра перпендикулярна плоскости П1, проекция линия пересечения искомых поверхностей на П1 совпадает с основанием цилиндра



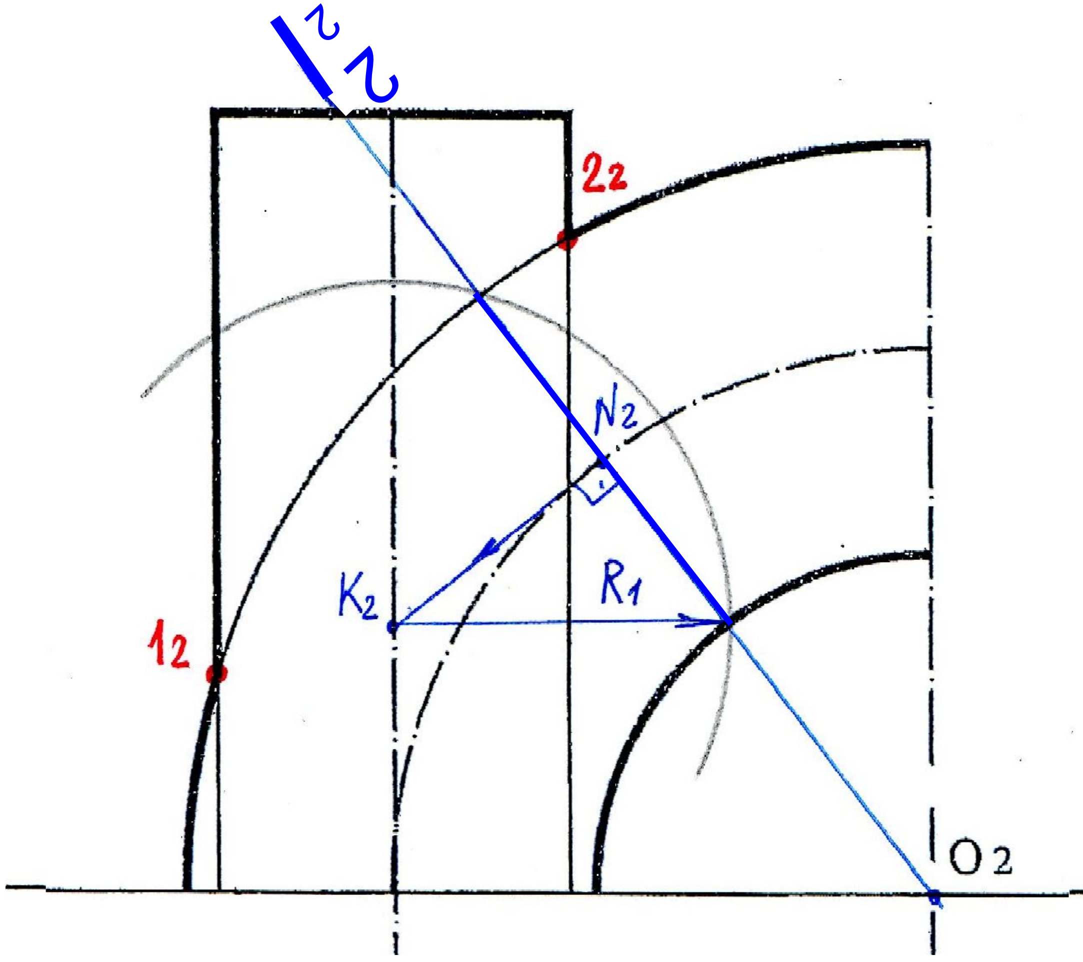
1. Проведем плоскость –посредник №1 по плоскости симметрии двух поверхностей. В сечении по цилиндру получим прямоугольник (очерк цилиндра на П2), по тору – сектор между двумя очерковыми окружностями. Накладка двух сечений позволяет определить общие точки 1 и 2



2. Далее применим метод эксцентрических сфер - посредников. Через ось тора (центр O_2) проведем фронтально-проецирующую плоскость 2 (2_2), которая разрежет тор по окружности с центром в точке N (N_2) (на П2 окружность совпадает с проекцией плоскости 2_2). Восстановим к плоскости окружности перпендикуляр в (.) N (N_2) и найдем его пересечение с осью цилиндра –(.)К (K_2)- это центр сферы-посредника

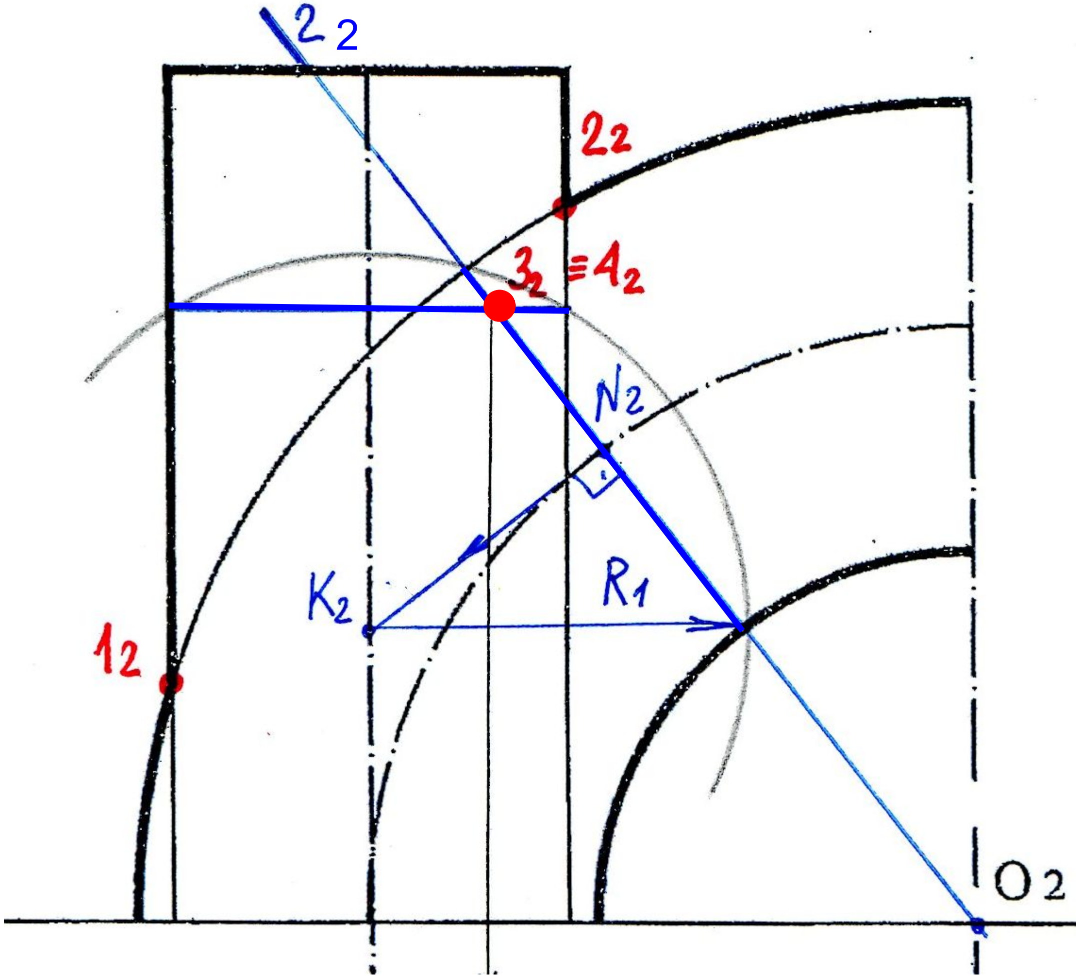


Радиус сферы R1- расстояние от центра (.)К2 до точек пересечения плоскости 2 с очерком тора. Проводим фронтальную проекцию сферы-посредника

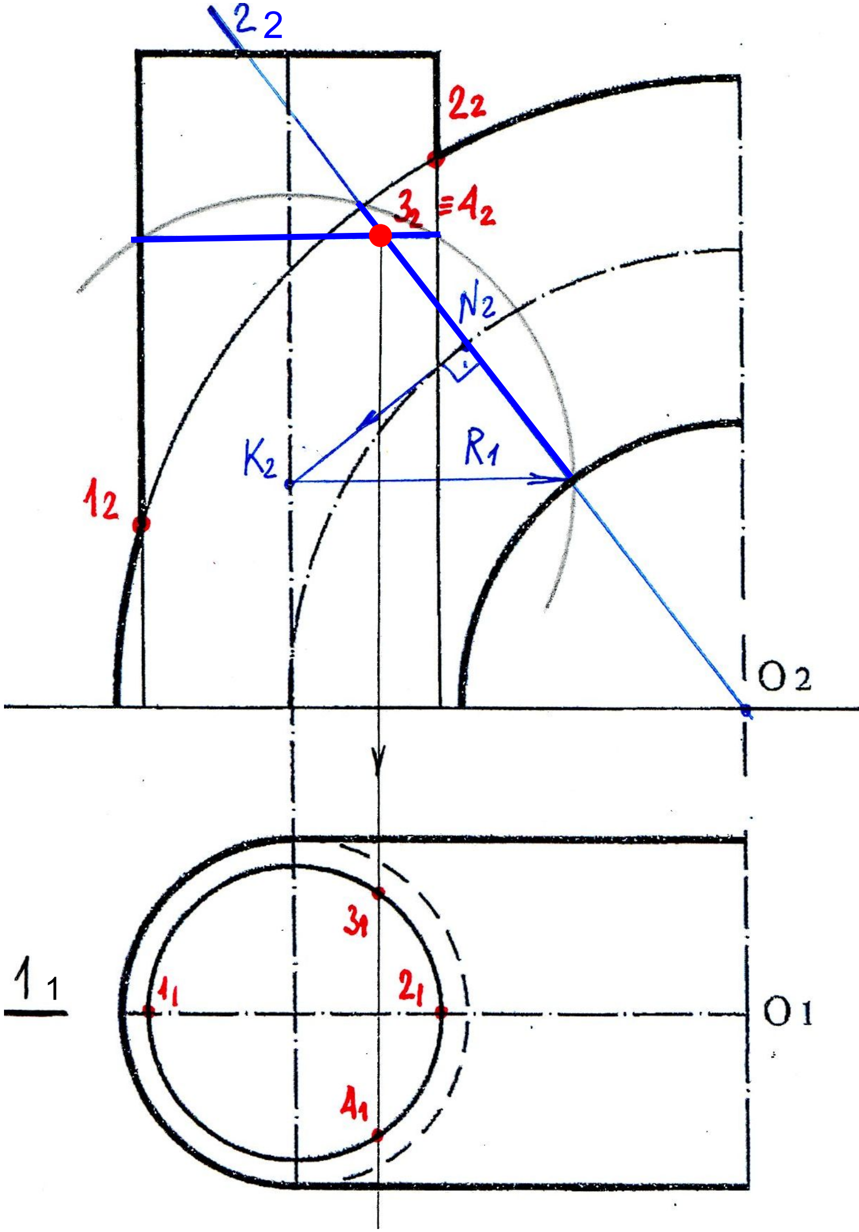


Определим пересечение сферы-посредника с цилиндром – окружность, перпендикулярная оси цилиндра.

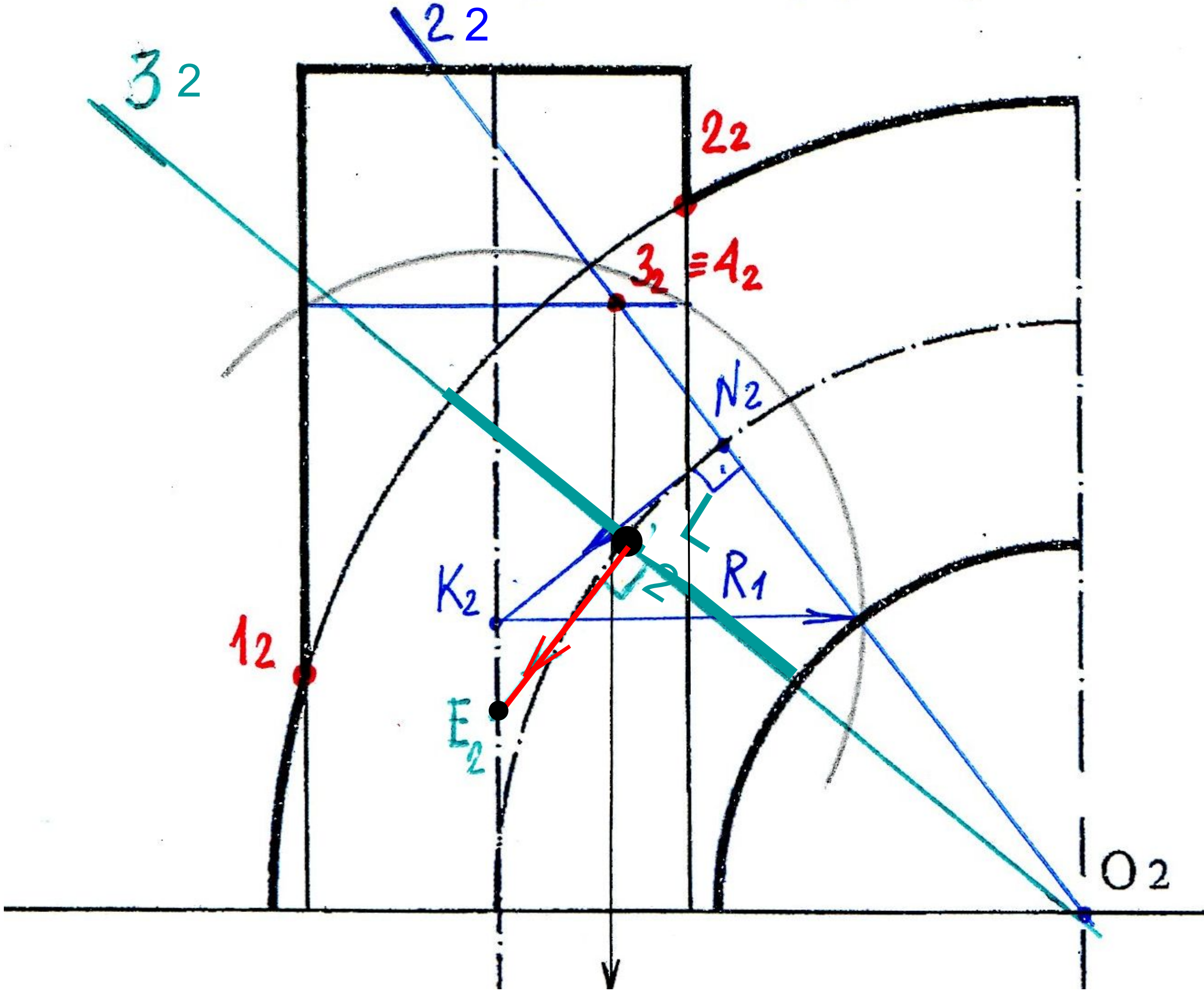
Находим пересечение полученных сечений - $3_2 \equiv 4_2$



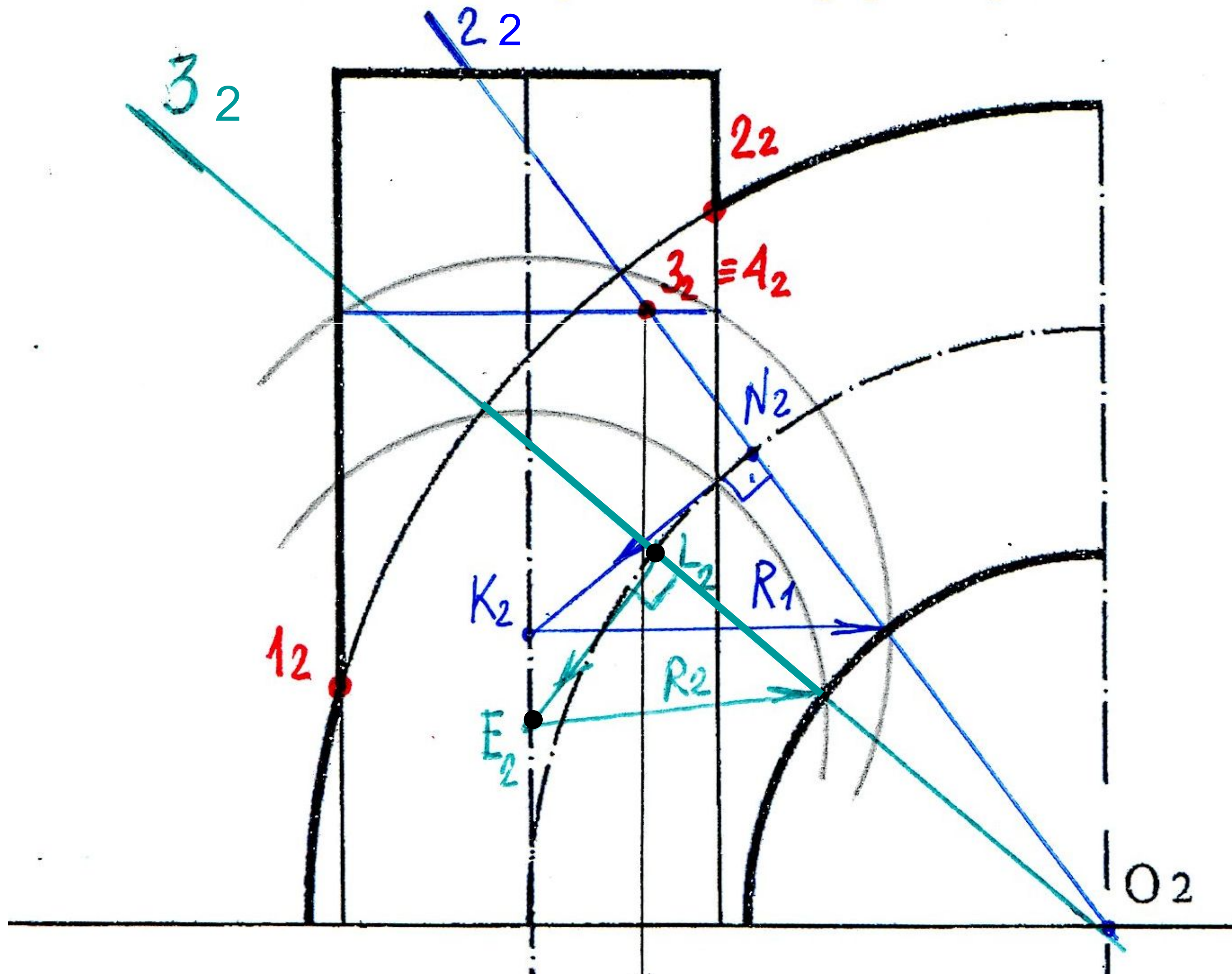
- На П1 горизонтальные проекции точек 3₁ и 4₁ находятся на проекции основания цилиндра



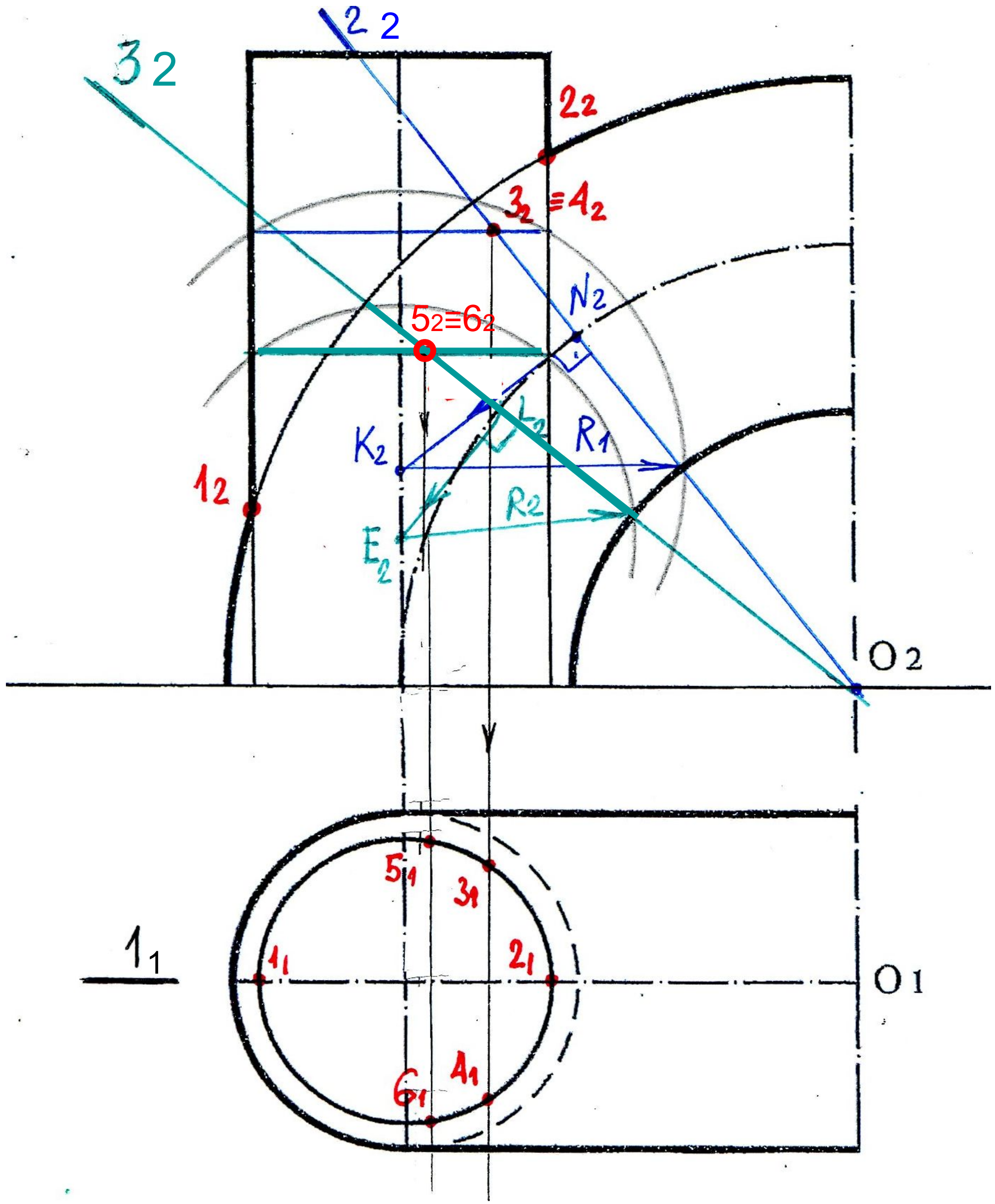
Задаем следующий срез по тору. Проводим через ось тора (.)O_2 плоскость 3 (3_2), которая разрезает тор по окружности. Из центра окружности L_2 (пересечение плоскости 3 с осью) восстановим перпендикуляр к плоскости окружности и найдем его пересечение с осью цилиндра- E_2



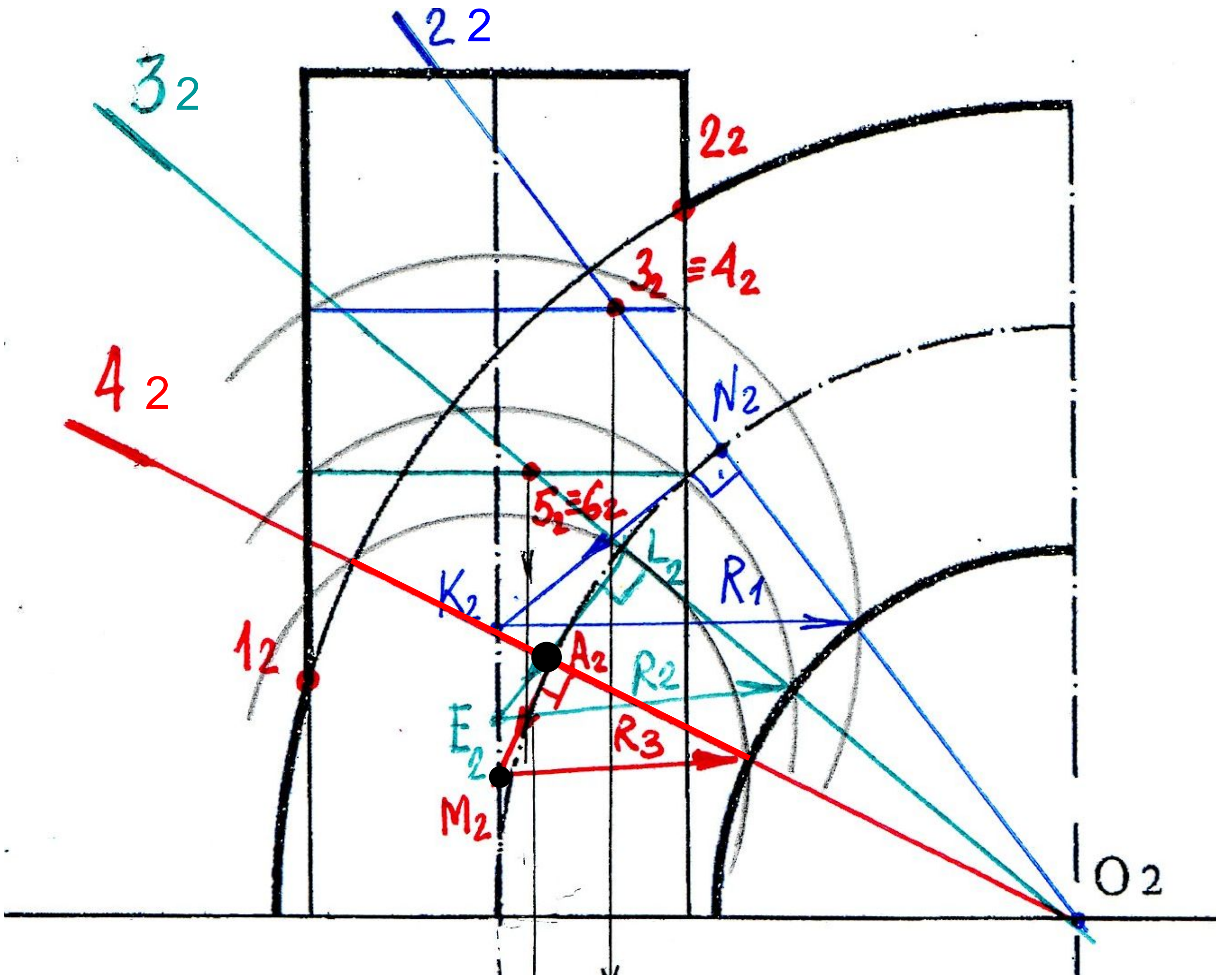
Проводим сферу – посредник радиусом R2



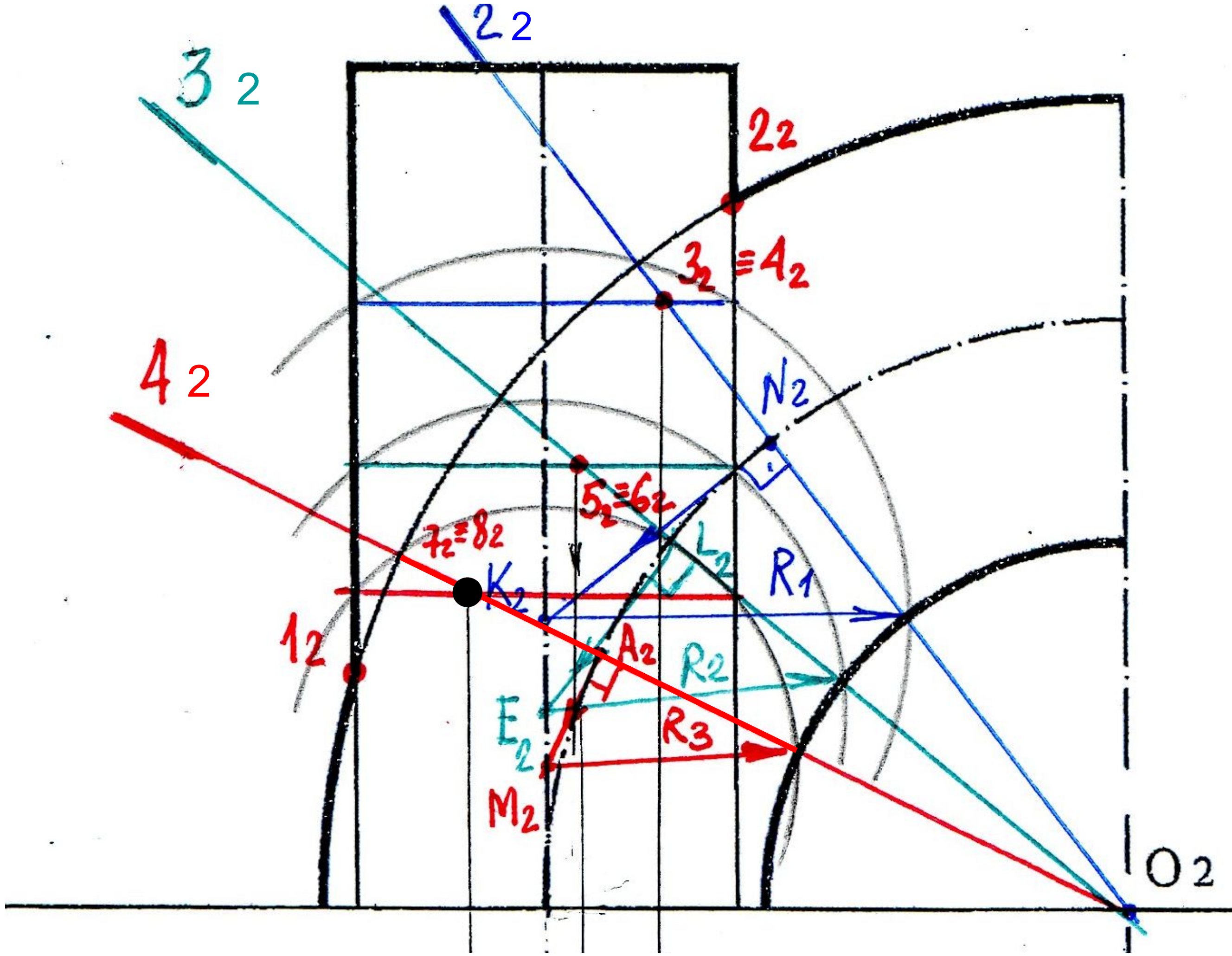
Находим пересечение построенной сферы с цилиндром и определяем точки $5_2 \equiv 6_2$ пересечения двух полученных сечений (окружностей)



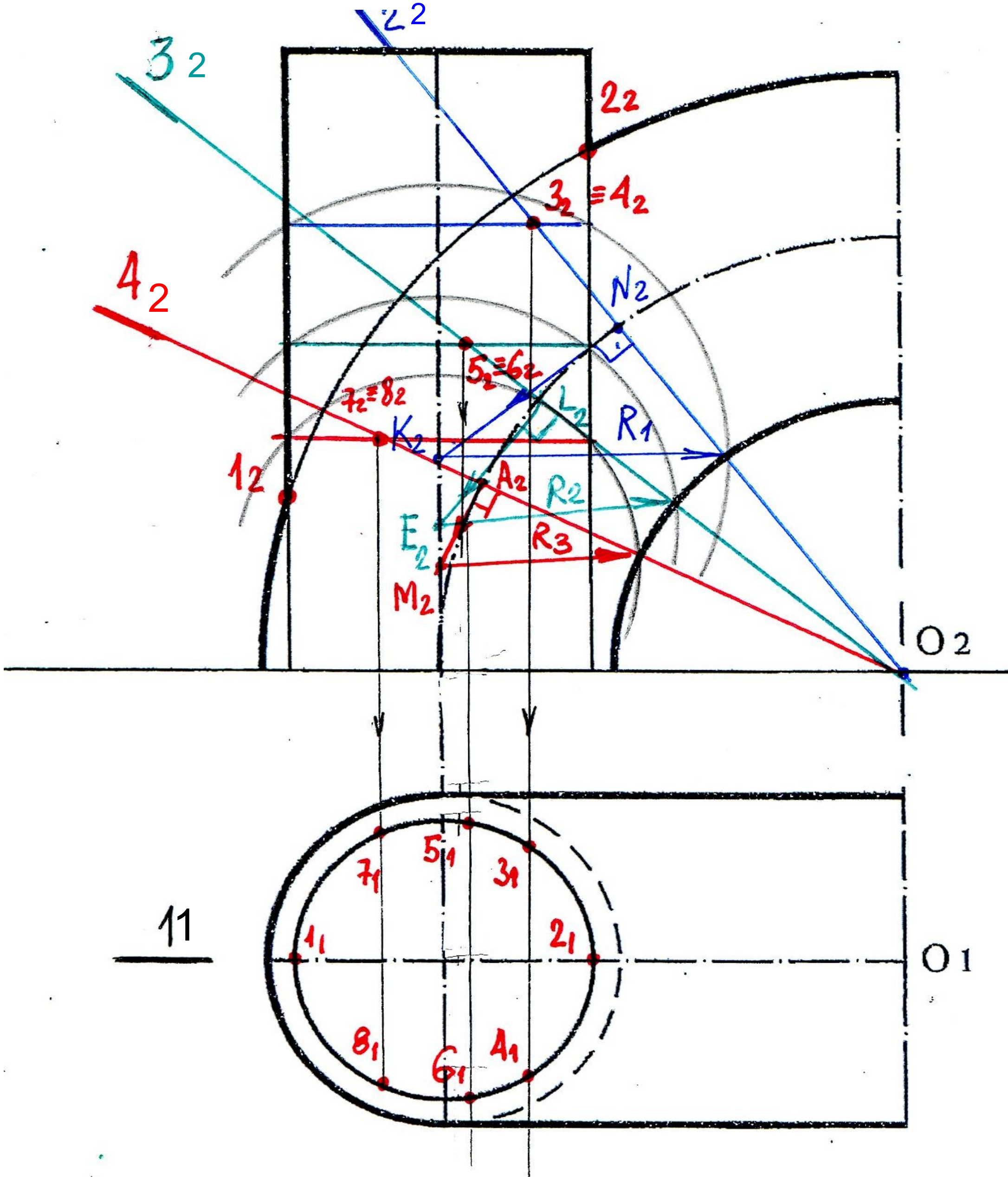
Повторяем операцию, разрезав тор плоскостью 4 (4_2) и построим сферу с центром в (.)M_2 радиусом R3 , которая разрезает тор по окружности с центром в (.) A_2



Строим срез третьей сферой по цилиндру. Находим фронтальные проекции точек взаимного пересечения полученных срезов: построенного по цилиндру и заданного по тору 7_2 и 8_2



На П1 горизонтальные проекции точек 7_1 и 8_1 находятся на проекции основания цилиндра



- Соединяем найденные точки , получим линию пересечения тора и прямого кругового цилиндра. Определяем видимость поверхностей