

Жоғары дәрежелі теңдеулер

Орындаған: Мамықбай Б 10а

A series of horizontal lines in teal and light blue colors, stacked and slightly offset, extending from the right side of the slide.

Математика пәнін тереңдетіп оқытатын сыныптарда жоғары дәрежелі теңдеулерді шешу мәселесі кеңінен қарастырылады.

Мұндай теңдеулерді шешудің түрлі әдістері бар.

1-әдіс. Безу теоремасына сүйеніп, теңдеудің дәрежесін біртіндеп төмендету.

Бұл әдіс теңдеудің рационал, дербес жағдайда бүтін, түбірлері бар болған жағдайда қолайлы болып табылады. Оның мәні теңдеудің сол жақ бөлігіндегі көпмүшені рационал түбірлері арқылы көбейткіштерге жіктеу.

Бұл әдісті меңгерту үшін оқушыларға француз математигі Безу (1730-1783) есімімен аталатын теореманы және көпмүше түбіріне байланысты негізгі тұжырымдарды таныстырып (дәлелдеуін келтіріп) өткен жөн.

Айталық, $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$ көпмүшесі берілсін.

Теорема 1. (Безу теоремасы). $P(x)$ көпмүшесін $x-a$ екімүшесіне бөлгендегі қалдық $P(x)$ -тің $x=a$ болғандағы мәніне тең.

Сонда $P(x) = (x-a) * Q(x) + R$ болса, мұндағы $R=P(a)$.

Теорема 2. $P(x)$ көпмүшесін $x-a$ екі мүшесіне қалдықсыз бөлінгенде, тек сонда ғана a саны $P(x)$ көп мүшесінің түбірі болады.

Яғни $P(x)$ көпмүшесін $P(x) = (x-a) * Q(x)$ түрінде көбейткіштерге жіктеуге болады. Мұндағы $Q(x)$ дегеніміз $(n-1)$ -ші дәрежелі бөлінді көпмүше, ол $P(x)$ -ті $x-a$ екімүшеге бөлгенде пайда болады.

Осылайша $P(x)=0$ теңдеуі $x=a$ түбірі табылғаннан кейін $Q(x)=0$ теңдеуін шешуге келтіріледі.

Егер теңдеу бүтін коэффициентті болса, онда оның рационал түбірлерін табу үшін келесі теоремаға сүйенеміз.

Теорема 3. Егер қысқартылмайтын бөлшегі бүтін $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$

коэффициентті теңдеуінің түбірі болса, онда p саны a_n бос мүшесінің бөлгіші, ал q a_0 саны бас коэффициенттің бөлгіші болады.

Бұл теоремадан келесі екі салдар айқындалады.

- **Салдар 1.** Бүтін коэффициентті теңдеудің кез келген бүтін түбірі бос мүшенің бөлгіші болады.
- **Салдар 2.** Бүтін коэффициентті келтірілген ($a_0 \neq 1$) теңдеудің рационал түбірі бар болса, онда ол бүтін сан болады.
- Жоғарыда көрсетілген $P(x) = (x-a) * Q(x) + R$, яғни $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = (x-a)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}) + R$
- жазуындағы $Q(x)$ көпмүшесінің коэффициенттері мен R қалдығын Горнер схемасының көмегімен оңай табуға болады.
- $x=a$
- $b_0=a_0$
- $b_1=a_1+ab_0$
- $b_2=a_2+ab_1\dots$
- $b_{n-1}=a_{n-1}+ab_{n-2}$
- $R= a_n+ab_{n-1}$
- Бұл кестенің бірінші жолында $P(x)$ көпмүшесінің коэффициенттері, ал екінші жолда $Q(x)$ бөлінді көпмүшенің коэффициенттері мен қалдық.
- Енді теңдеулер шешуді нақты мысалдармен көрсетейік.
- **1-мысал.** $5x^3 + 18x^2 - 10x - 8 = 0$
- **Шешуі:** 1-ші салдарға сүйеніп, егер бар болса, бос мүше бөлгіштері: $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8$ сандары ішінен бүтін түбірлерін іздейміз. $x=-4$ түбірі болатынына көз жеткізуге болады. Горнер схемасын пайдаланып теңдеудің сол жақ бөлігіндегі көпмүшені $x+4$ екімүшеге бөлеміз.
- 5
- 18
- -10
- -8
- $x=-4$
- 5
- -2
- -2
- 0
- Сонда 1 дәрежеге төмендеген $5x^3 + 18x^2 - 10x - 8 = 0$ квадрат теңдеуі шығады. Оны $5x^2 - 2x - 2 = 0$
- шешіп, түбірлерін табамыз.

$$x^5 - 2x^4 - 9x^3 + 18x^2 + 20x - 40 = 0$$

2-мысал.

Шешуі: 2-ші салдарға сүйеніп келтірілген бүтін коэффициентті теңдеудің бүтін түбірлері бар болса, бос мүше бөлгіштері ішінен іздейміз. Тексеру $x=2$ саны түбір болатынын көрсетеді. Горнер схемасын пайдаланып теңдеудің сол жақ бөлігіндегі көпмүшені $x-2$ екімүшеге бөлеміз.

1
-2
-9
18
20
-40
 $x=2$
1
0
-9
0
20
0

$$x^4 - 9x^2 + 20 = 0$$

Осылайша
түбірлерін табамыз.

биквадрат теңдеуін аламыз. Бұл теңдеуді шешіп,

$$x = \pm 2; x = \pm \sqrt{5}$$

Жауабы: $x_1 = x_2 = 2; x_3 = -2; x_4 = -\sqrt{5}; x_5 = \sqrt{5}$

Теңдеу шешуде Безу теоремасын қолдану үнемі тиімді тәсіл деуге болмайды. Теңдеудің рационал түбірлері болмайтын жағдайда Безу теоремасын тіпті де қолдануға келмейді. Сондықтан жоғары дәрежелі теңдеулерді шешудің басқа да ұтымды тәсілдерін қолдансақ, есеп шешу әлдеқайда жеңілдейді.

2-әдіс. *Топтау арқылы көбейткіштерге жіктеу.*

3-мысал. $3x^3 - 5x^2 + 3x - 5 = 0$

Шешуі: Қосылғыштардың алғашқы екеуі мен соңғы екеуін топтап, ортақ көбейткіштерін жақша сыртына шығара отырып, көбейткіштерге жіктейміз. Сонда, $(3x^3 - 5x^2) + (3x - 5) = 0$ бұдан $x^2(3x - 5) + (3x - 5) = 0$ яғни $(3x - 5)(x^2 + 1) = 0$ теңдеуін аламыз. Мұндағы $x^2 + 1$ өрнегі x -тің кез келген мәндері үшін оң мәнге ие болғандықтан, $3x - 5 = 0$ теңдеуін шешсе жеткілікті. Демек, $x = \frac{5}{3}$. Бұл теңдеуді 1-ші әдіспен де шешуге болады (3-теоремаға сүйенеміз).

4-мысал. $4x^5 + 8x^4 + 5x^3 + 10x^2 - 3x - 6 = 0$

Шешуі: Әрбір екі қосылғыштан ретімен топтай отырып, көбейткіштерге жіктейміз. Сонда.

$(4x^5 + 8x^4) + (5x^3 + 10x^2) - (3x + 6) = 0$

Бұдан $4x^4(x+2) + 5x^2(x+2) - 3(x+2) = 0$ бұдан $(x+2)(4x^4 + 5x^2 - 3) = 0$ теңдеуін аламыз. Бұл теңдеу $x + 2 = 0$; $4x^4 + 5x^2 - 3 = 0$ теңдеулер жиынымен мәндес. Оларды шешіп, $x_1 = -2$; $x_{2,3} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{2(\sqrt{73} - 5)}$, түбірлерін табамыз.

- **3-әдіс.** Жаңа айнымалы енгізу әдісі.

- **5-мысал.** $(6-x)^4 + (8-x)^4 = 16$

- **Шешуі:** $7-x=y$ белгілеуін енгіземіз. Сонда $(y-1)^4 + (y+1)^4 = 16$ теңдеуін аламыз. $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$ формуласын пайдаланып, теңдеуін аламыз. Осыдан $7=0$ теңдеулер жиынын аламыз. Біріншісінің шешімі жоқ, екіншісінің шешімі . Белгілеудегі орнына қойсақ, немесе $y_{1/2} = \pm 1$. Бұл теңдеулерді шешіп, $7-x=1$ $7-x=-1$ түбірлерін табамыз. $x_1 = 6; x_2 = 8$

- **4-әдіс. Феррари әдісі.**
- XIV ғасырда итальяндық математик Л.Феррари (1522-1566 жж.) төртінші дәрежелі теңдеу шешудің жаңа әдісін тапты. Бұл әдістің негізгі идеясы теңдеудің екі бөлігін толық квадратқа келтіру болып табылады



Конец