Тема 9.5 Шар. Сечение шара плоскостью. Касательная плоскость к шару

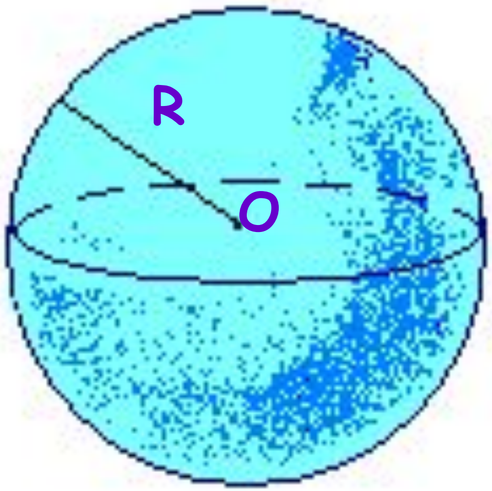
Цель:

- изучить понятие шара и сферы, центра шара (сферы), радиуса, диаметра, виды взаимного расположения шара и плоскости (сечения шара плоскостью);

План:

- Понятие шар
- Понятие сфера
- Уравнение сферы
- Взаимное расположение сферы и плоскости
- Касательная плоскость к сфере
- Площадь сферы

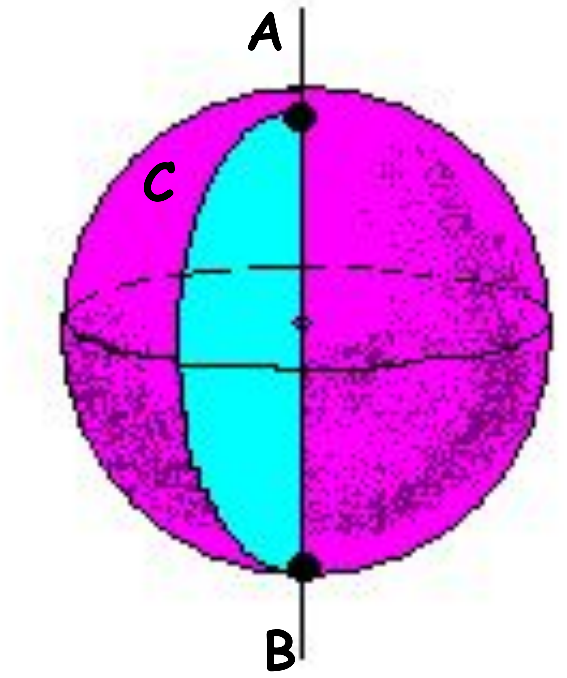
шар



Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, которые расположены на данном расстоянии от данной точки.

Данная точка – центр сферы, а данное расстояние- -радиус сферы.

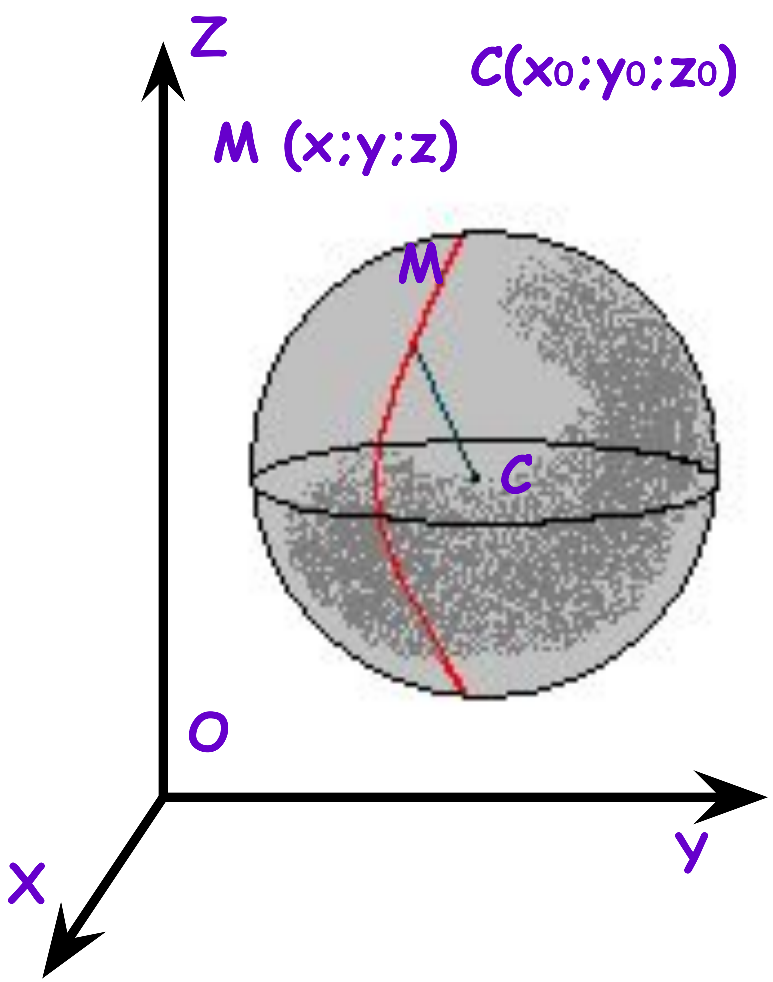
Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также является радиусом. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр- диаметр(=2R)



Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг её диаметра.
На рисунке сфера получена вращением полуокружности АВС вокруг её диаметра АВ.

Тело, ограниченное сферой, называется шаром.
Центр, радиус и диаметр сферы- центр, радиус и диаметр шара.
Шар с радиусом R и центром O содержит все точки пространства, которые расположены от точки O на расстоянии, не превышающем R (включая точку O), и не содержит других точек.

Уравнение сферы



Пусть задана прямоугольная система координат O xyz и дана поверхность f,например плоскость или сфера. Уравнение с тремя переменными x, y, z называется уравнением поверхности F,если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности.

Выведем уравнение сферы радиуса R с центром $C(x_0;y_0;z_0)$
Расстояние от произвольной точки $M(x;y;z)$ до точки C вычисляется по формуле:

$$MC=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

Если точка M лежит на данной сфере, то M=R, т.е. $MC^2=R^2$, то есть координаты точки M удовлетворяют уравнению

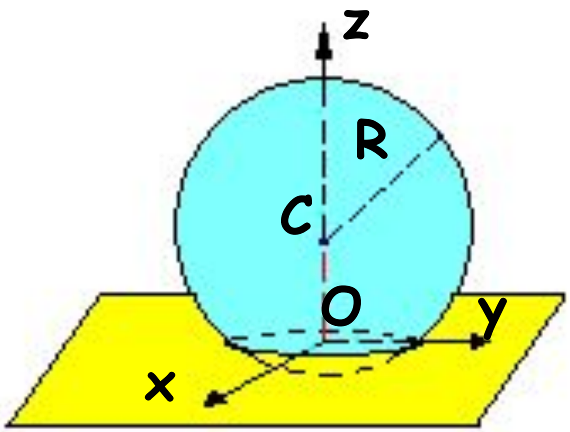
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

Если же точка M не лежит на данной сфере, то $MC\neq R$, т. е. координаты точки M не удовлетворяют первому уравнению.

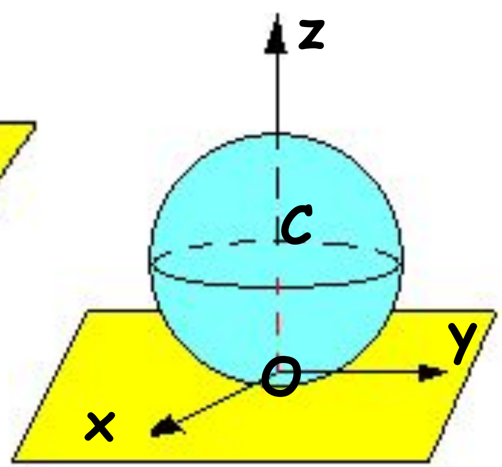
В прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса R с центром C(x;y;z) имеет вид

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

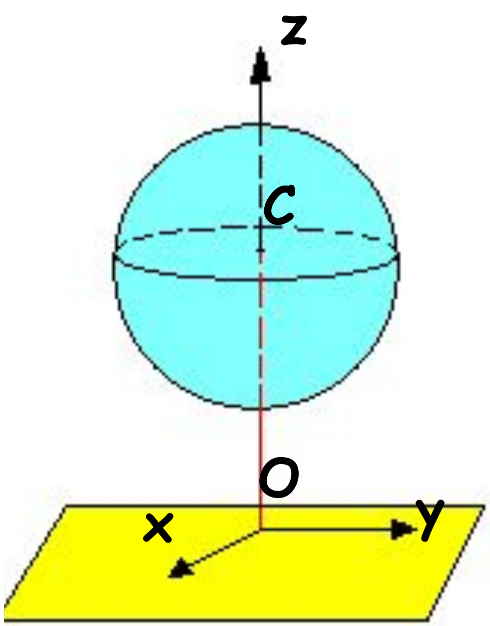
Взаимное расположение сферы и плоскости



$d<R, r=\sqrt{R^2-d^2}$



$d=R$



$d>R$

Обозначим радиус сферы –R, а расстояние от её центра до плоскости – d.

Введем систему координат :плоскость Oxy совпадает с плоскостью, а центр C сферы лежит на положительной полуосиOz.

В этой системе C имеет координаты (0;0; d),поэтому сфера имеет уравнение

$$x^2+y^2+(z-d)^2=R^2$$

Плоскость α совпадёт с плоскостью Oxy, значит z=0.

Вопрос о взаимном расположении сферы и плоскости сводится к исследованию системы уравнений:

$$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2+(z-d)^2=R^2 \end{cases}$$

Подставив z=0 во второе уравнение получим:

$$x^2+y^2=R^2-d^2.$$

Возможны три случая:

1. $d<R$, тогда

$$R^2-d^2>0,$$

и уравнение окружности радиуса

$$r=\sqrt{R^2-d^2}$$

с центром в точке О на плоскости Оху. В данном случае сфера и плоскость пересекаются по окружности.

Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сечение сферы- окружность

2. $d=R$, тогда

$$R^2-d^2=0,$$

И ур-нию удовлетворяют значения x=0,y=0.Значит O(0;0;0),то есть

Если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы0 то сфера и плоскость имеют только одну общую точку.

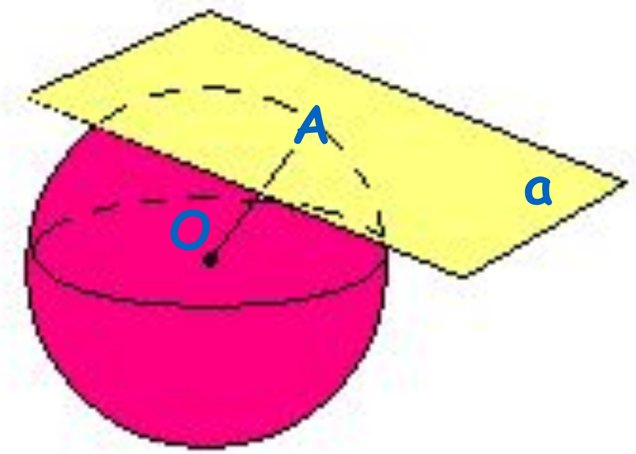
3. $d>R$, тогда

$$R^2-d^2<0,$$

И уравнению не удовлетворяют координаты никакой точки.

Если расстояние от центра до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.

Касательная плоскость к сфере



Плоскость., имеющая со сферой одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка- точка касания плоскости и сферы.

На рисунке плоскость а- касательная плоскость к сфере с центром О,

а А-точка касания.

Свойство касательной плоскости:

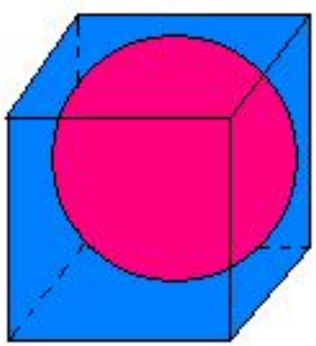
Т: радиус сферы, проведенный в точку касания, перпендикулярен к касательной плоскости.

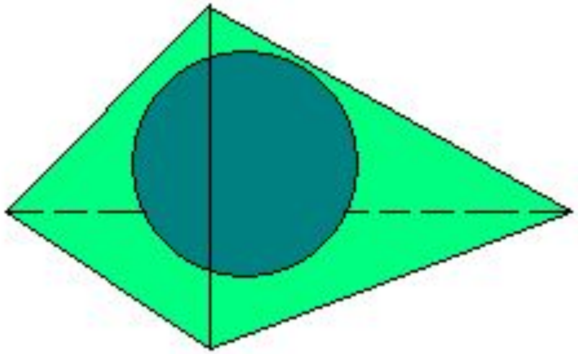
Доказательство:
Рассмотрим рисунок, показанный ранее. Предположим, что радиус не перпендикулярен к плоскости. Тогда он является наклонной к плоскости а, то есть расстояние от сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то есть они пересекаются по окружности, а это невозможно, так как а- касательная. Значит радиус перпендикулярен к плоскости, ч. т. д.

Обратная теорема: если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость- касательная к сфере

Доказательство:
Из условия следует, что радиус- перпендикуляр, проведённый из центра сферы к плоскости. Значит, расстояние от центра сферы до плоскости = радиусу, сфера и плоскость имеют одну общую точку, то есть данная плоскость- касательная к сфере, ч. т. д.

Площадь сферы





Сферу нельзя развернуть на плоскость, поэтому для определения её площади пользуются понятием описанного многогранника.

(Многогранник описанный, если сфера касается всех его граней.
При этом сфера- вписанная.На рис. Сфера вписана в куб и тетраэдр)
За площадь сферы принимается предел последовательности площадей поверхностей описанных около сферы многогранников при стремлении к нулю наибольшего размера каждой грани.

S=4П(R*R)

-это будет доказано в дальнейшем курсе геометрии.