

Решение
тригонометрических
уравнений и
неравенств

1. Имеет ли смысл выражение:

а) $\arcsin \frac{a^2}{a^2 + 1}$;

б) $\arccos \frac{a^2 + 1}{a^2}$;

в) $\arcsin (\sqrt{2} - 1)^2$;

г) $\operatorname{arctg} \frac{a^2 + 1}{a^2}$.

ДА

ДА

НЕ

Т

, при $a \neq 0$

2. Решить уравнения:

$$\text{а) } \sin x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{б) } \cos x = \frac{1}{2}; \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{в) } \sin x = 0; \quad x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{г) } \operatorname{tg} x = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

3. Решить неравенства:

а) $\cos t < \frac{1}{2}$;

решени
е

б) $\sin t > -1,3$;

решени
е

в) $\cos t \geq 0$;

решени
е

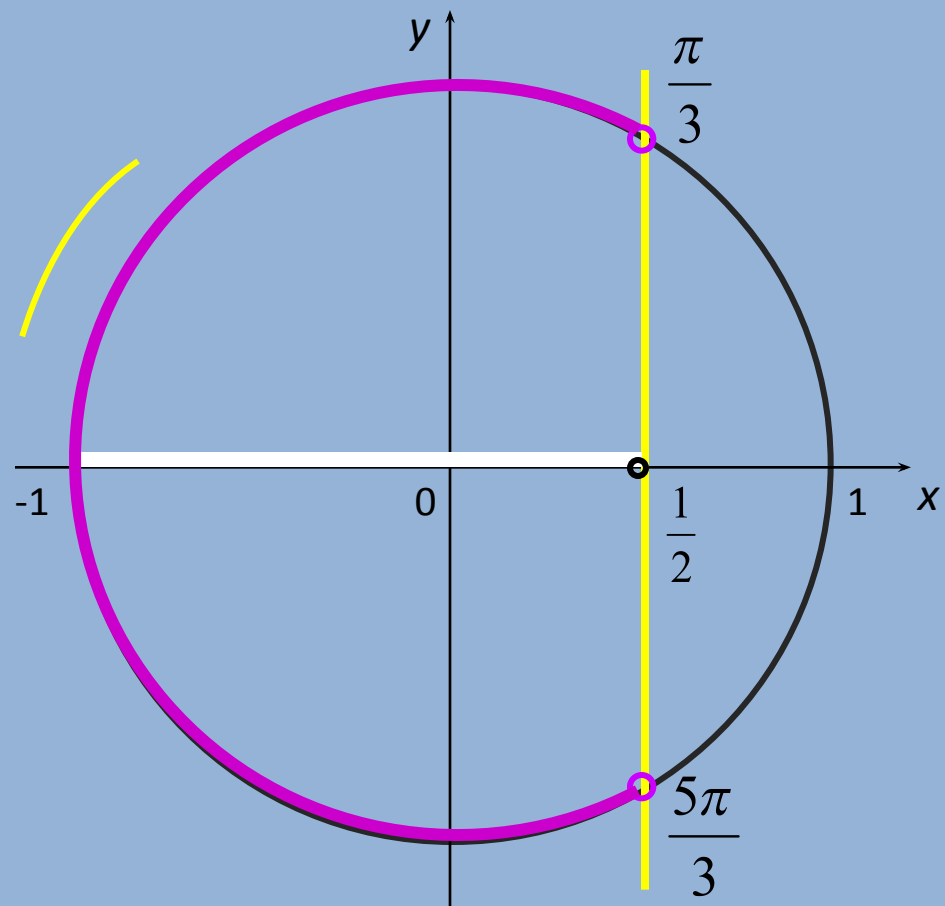
г) $\operatorname{tg} t \leq 1$;

решени
е

3. Решить неравенства:

$$a) \cos t < \frac{1}{2};$$

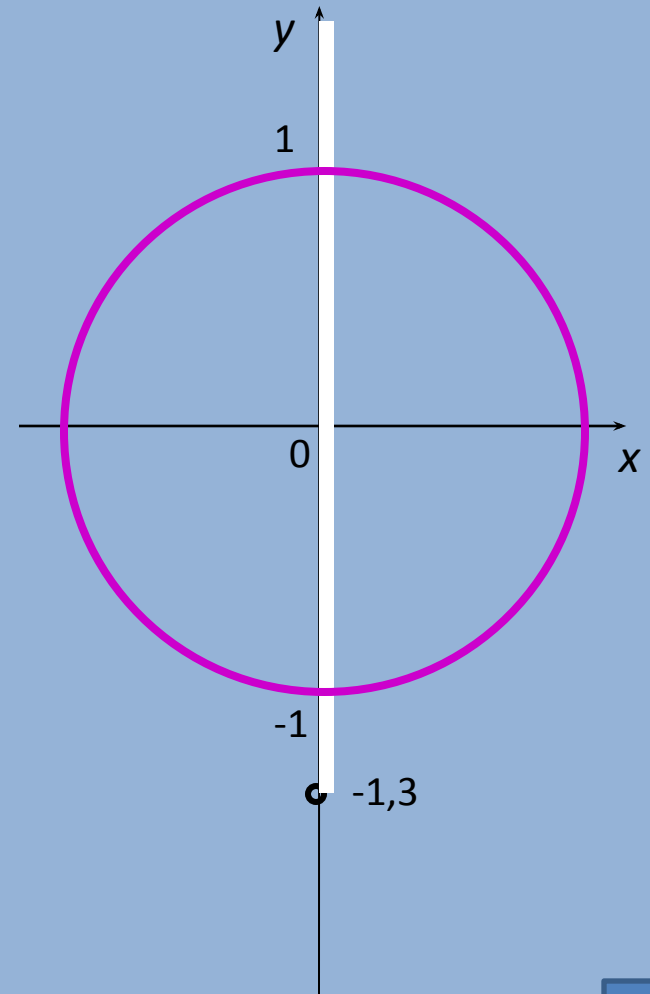
$$t \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$$



3. Решить неравенства:

$$\text{б) } \sin t > -1,3;$$

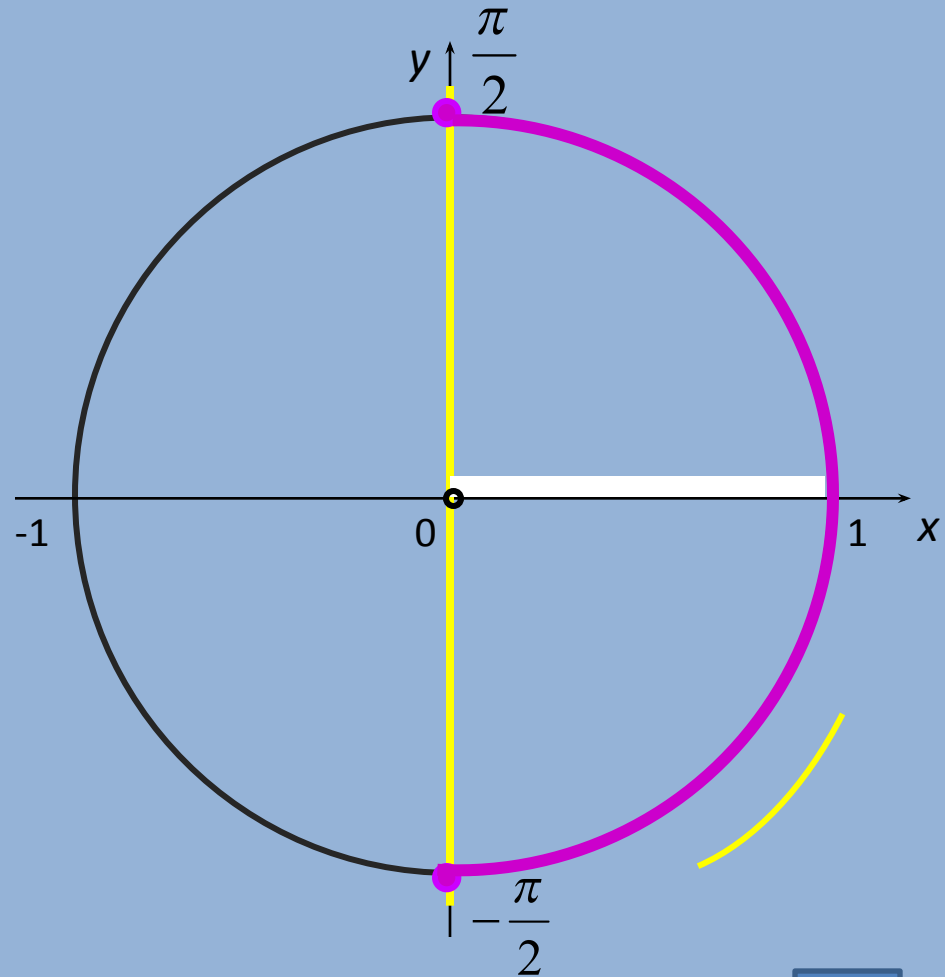
$$t \in R$$



3. Решить неравенства:

В) $\cos t \geq 0$;

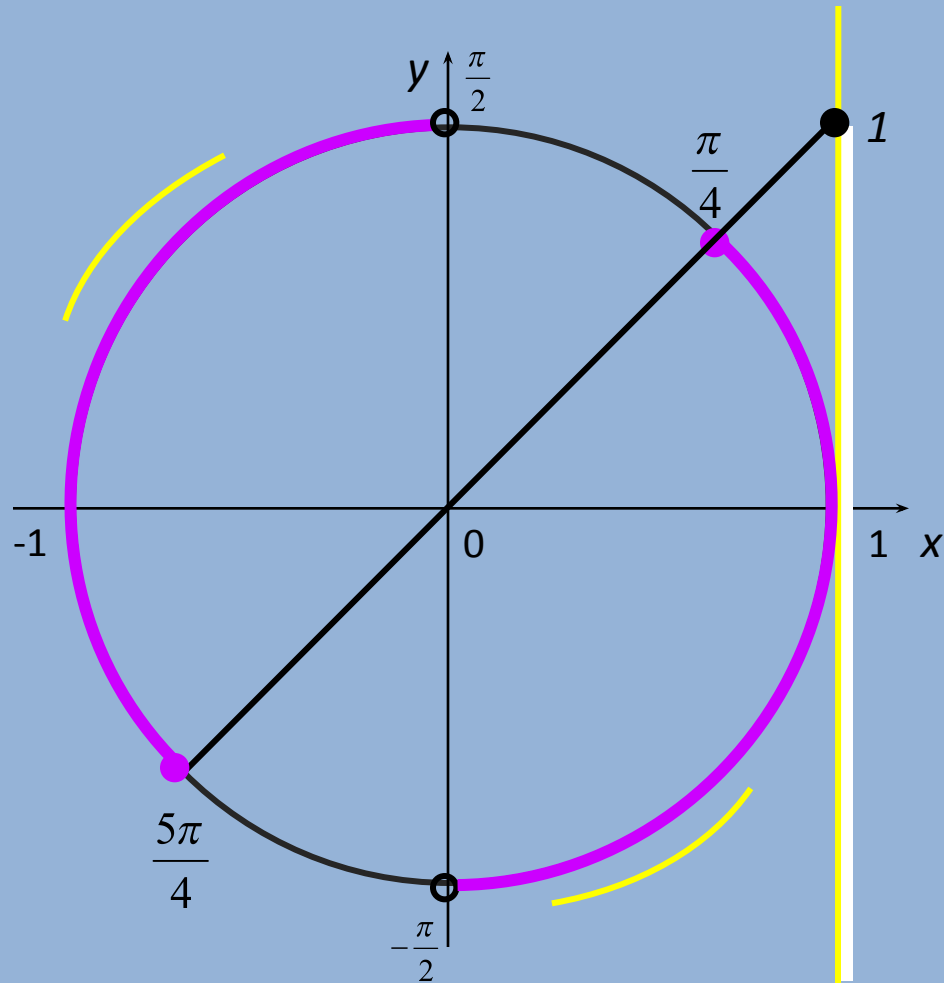
$$t \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$$



3. Решить неравенства:

г) $\operatorname{tg} t \leq 1$

$$t \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right], k \in \mathbb{Z}$$



1. Назовите основные методы решения тригонометрических уравнений

- Введение новой переменной.
- Разложение на множители.
- Деление обеих частей уравнения на $\cos(mx)$ для однородных уравнений первой степени.
- Деление обеих частей уравнения на $\cos^2(mx)$ для однородных уравнений второй степени.

№2. Решите уравнение

а) $\sin^2 x + 4\cos x = 2,75;$

решени
е

б) $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 4;$

решени
е

в) $2 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0;$

решени
е

г) $5 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2 \cos^2 x = 2.$

решени
е

$$a) \sin^2 x + 4 \cos x = 2,75;$$

$$1 - \cos^2 x + 4 \cos x = 2,75;$$

Пусть $\cos x = t$, $|t| \leq 1$,

тогда

$$t^2 - 4t + 1,75 = 0;$$

$$D = 16 - 4 \cdot 1,75 = 16 - 7 = 9;$$

$$t = \frac{-(-4) \pm 3}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2}, \\ t = 3,5; \end{array} \right.$$

$$t = \frac{1}{2}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$



$$\text{б) } \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 4;$$

$$\operatorname{tg} x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 4;$$

Пусть $\operatorname{tg} x = t$,

тогда
 $t^2 - 4t + 3 = 0;$

По свойству коэффициентов квадратного уравнения ($a+b+c = 0$):

$$\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 3; \end{array} \right.$$

Вернёмся к исходной

переменной:

$$\left[\operatorname{tg} x = 1, \right.$$

$$\left[\operatorname{tg} x = 3; \right.$$

$$\left[x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \right.$$

$$\left[x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in Z; \right.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k, \right.$$

$$\left. \operatorname{arctg} 3 + \pi n \mid k, n \in Z \right\}$$



$$B) 2 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x =$$

$$0; \quad \cos x(2 \sin x - \cos x) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ 2 \sin x - \cos x = 0; \quad / : \cos x \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ 2 \operatorname{tg} x - 1 = 0; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in Z. \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n / k, n \in Z \right\}$$



$$\text{г) } 5 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2 \cos^2 x = 2;$$

$$5 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2 \cos^2 x = 2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x;$$

$$3 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 4 \cos^2 x = 0; \quad / : \cos^2 x \neq 0$$

$$3 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 4 = 0;$$

Пусть $\operatorname{tg} x = t$,

тогда
$$3t^2 + t - 4 = 0;$$

По свойству коэффициентов
квадратного уравнения ($a+b+c=0$):

$$\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = -\frac{4}{3}; \end{array} \right.$$

Вернёмся к исходной
переменной:

$$\left[\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}; \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \\ x = -\operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \pi n, n \in Z. \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k, \right. \\ \left. -\operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \pi n / k, n \in Z \right\}$$

№3. Решите неравенство

а) $\cos\left(2x - \frac{3\pi}{8}\right) < 0;$

решени
е

б) $\sin x \cdot \cos 3x + \cos x \cdot \sin x > \frac{1}{2};$

решени
е

в) $\sin x \geq \cos x;$

решени
е

г) $\operatorname{tg}^2 x \leq 3.$

решени
е

$$a) \cos \left(2x - \frac{3\pi}{8} \right) < 0;$$

Пусть $t = 2x - \frac{3\pi}{8}$, $\cos t < 0$.

тогда
 $t \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

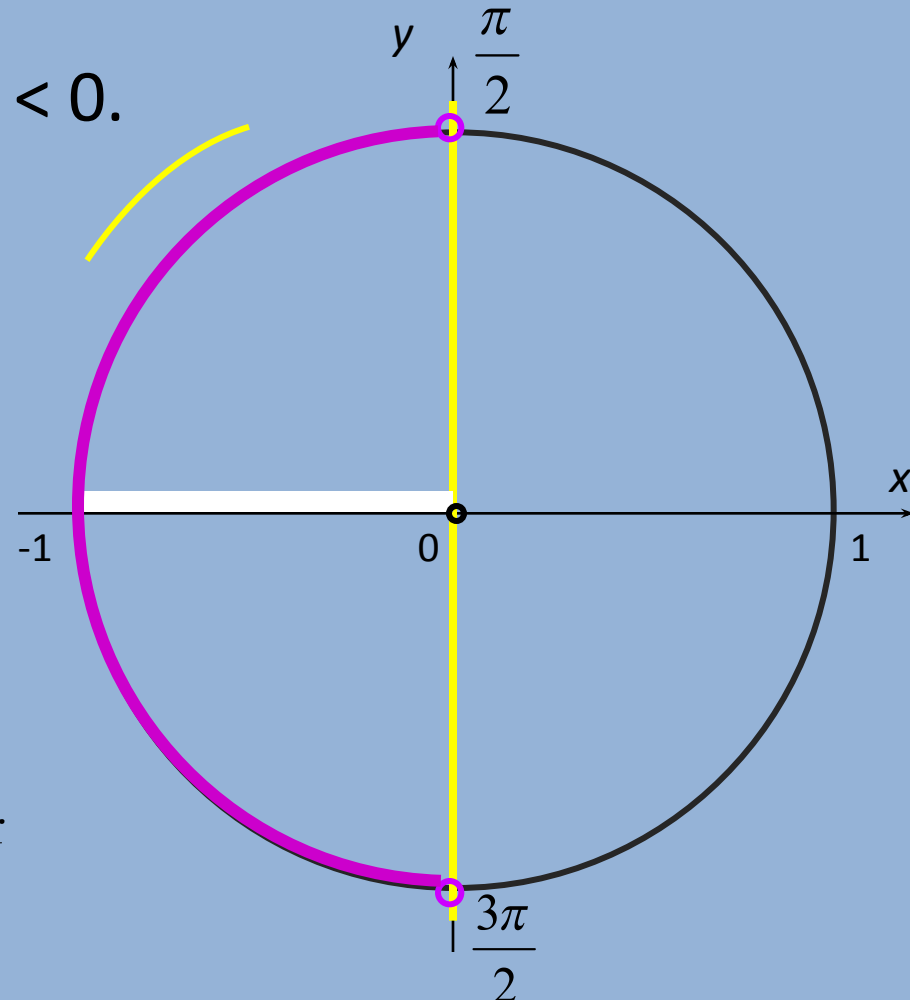
Вернёмся к исходной переменной:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x - \frac{3\pi}{8} < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} + 2\pi k < 2x < \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} + 2\pi k$$

$$\frac{7\pi}{8} + 2\pi k < 2x < \frac{15\pi}{8} + 2\pi k \quad / : 2$$

$$\frac{7\pi}{16} + \pi k < x < \frac{15\pi}{16} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Ответ: $\left(\frac{7\pi}{16} + \pi k; \frac{15\pi}{16} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z}$



$$\text{б) } \sin x \cdot \cos 3x + \cos x \cdot \sin 3x > \frac{1}{2};$$

$$\sin(x + 3x) > \frac{1}{2};$$

$$\sin 4x > \frac{1}{2};$$

Пусть $t = 4x$, $\sin t > \frac{1}{2}$;

тогда

$$t \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$$

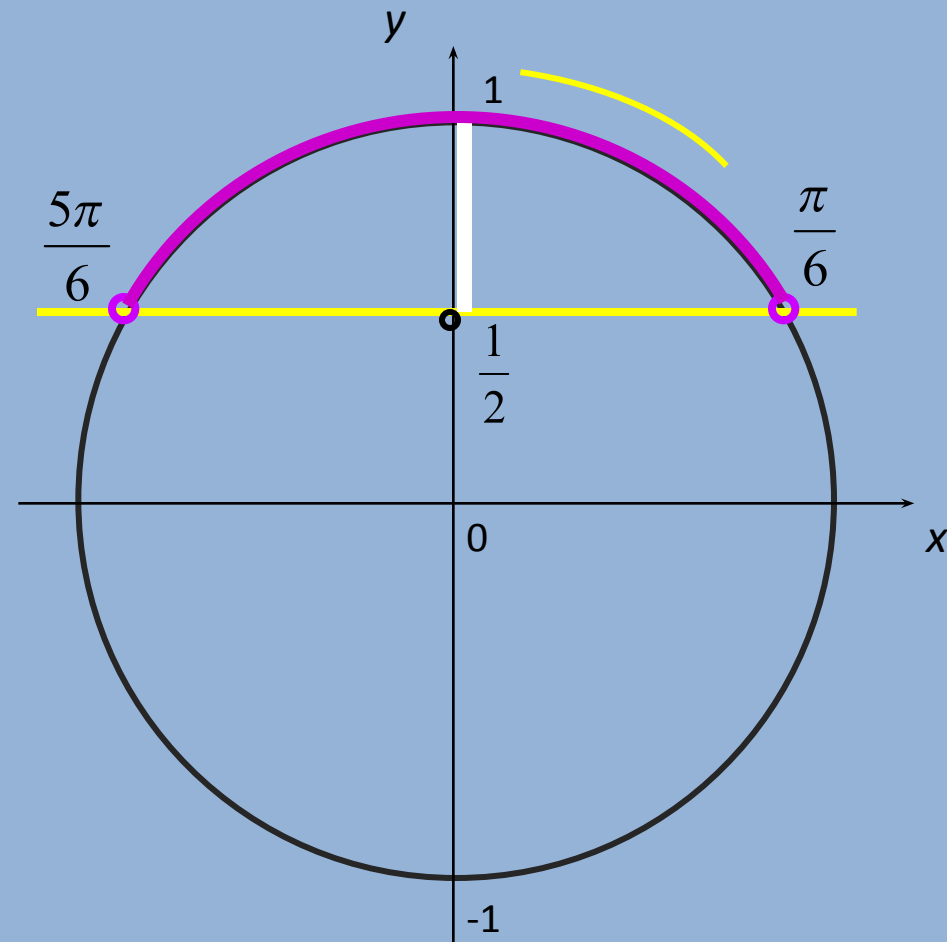
$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Вернёмся к исходной

переменной:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < 4x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k / : 4$$

$$\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2} < x < \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}$$



Ответ: $\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}; \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$



$$B) \sin x \geq \cos x;$$

1
способ

$$\sin x - \cos x \geq 0; \quad / \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \geq 0;$$

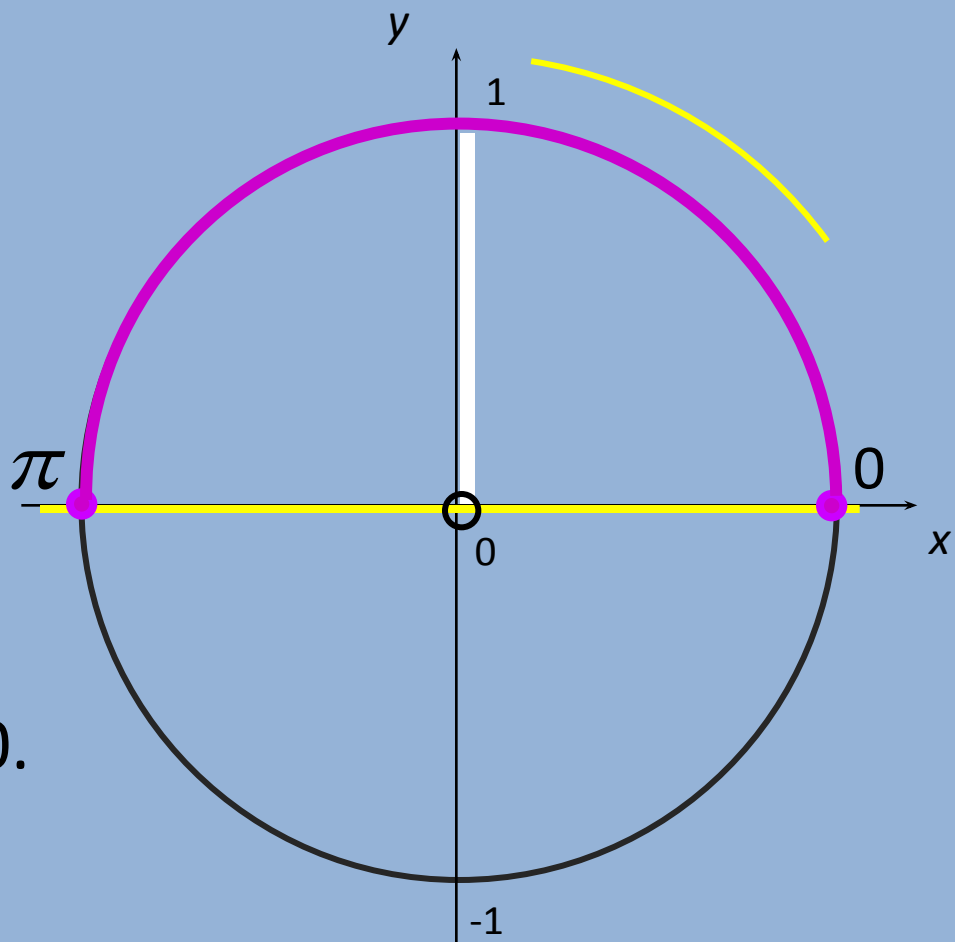
$$\cos \frac{\pi}{4} \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cos x \geq 0;$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0;$$

Пусть $t = x - \frac{\pi}{4}$, тогда $\sin t \geq 0$.

$$t \in [2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$$

$$2\pi k \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$2\pi k \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \pi + 2\pi k; \quad / + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi k;$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi k;$$

$$\text{Ответ: } \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z}$$

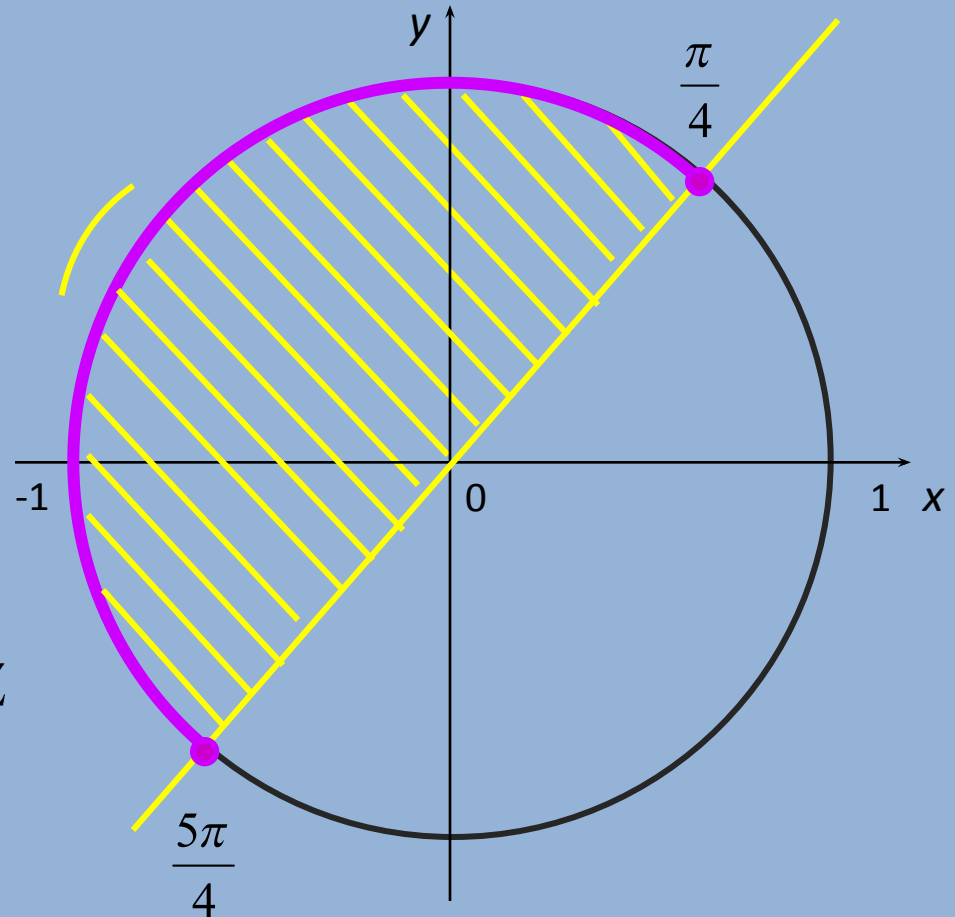
2 способ

В) $\sin x \geq \cos x$;

Проведём прямую,
удовлетворяющую
условию:
 $\sin x = \cos x$.

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi k.$$

$$\text{Ответ: } \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z}$$



$$\Gamma) \operatorname{tg}^2 x \leq 3;$$

$$|\operatorname{tg} x| \leq \sqrt{3};$$

$$-\sqrt{3} \leq \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3};$$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right], k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \left[-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right], k \in \mathbb{Z}$$

