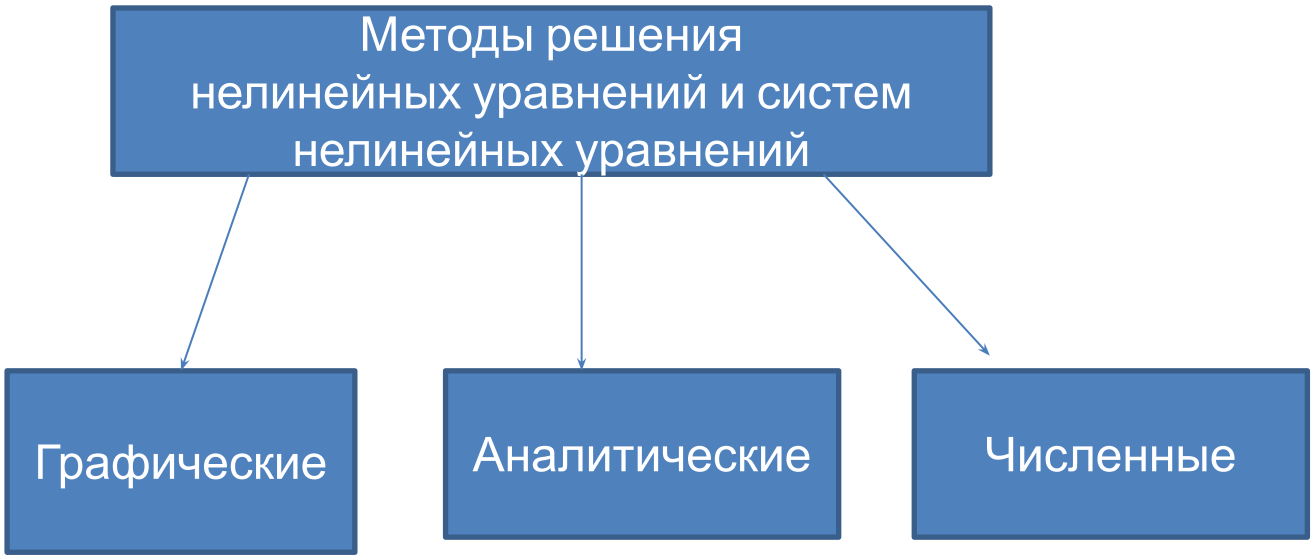
Решение нелинейных уравнений

Уравнения, в которых содержатся неизвестные функции, произведенные в степень больше единицы, называются нелинейными.

Например, $y=ax+b$ – линейное уравнение, $x^3 – 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0$ – нелинейное (в общем виде записывается как $F(x)=0$).

Системой нелинейных уравнений считается одновременное решение нескольких нелинейных уравнений с одной или несколькими переменными.

Решения нелинейных уравнений



Отделение корней

Отделение корней это получение достаточно малой окрестности, внутри которой находится одно значение корня.

В общем случае отделение корней уравнения $f(x)=0$ базируется на известной теореме, утверждающей, что если непрерывная функция $f(x)$ на концах отрезка $[a,b]$ имеет значения разных знаков, т.е. $f(a)\times f(b)< 0$, то в указанном промежутке содержится хотя бы один корень. Например, для уравнения $f(x)=x3-6x+2=0$ видим, что при $x\rightarrow\infty$ $f(x)>0$, при $x\rightarrow-\infty$ $f(x)<0$ что уже свидетельствует о наличии хотя бы одного корня.

Для уравнения $f(x)=ex+x=0$ видим, что $f(\infty)>0$, $f(-\infty)<0$.

Обнаружив, что устанавливаем факт наличия единственного корня, и остается лишь найти его.

Графический способ

Корни отделяются просто, если можно построить график функции f(x). Точки пересечения графика с осью 0x дают значения корней, и по графику легко определить два числа a и b, между которыми заключен только один корень.

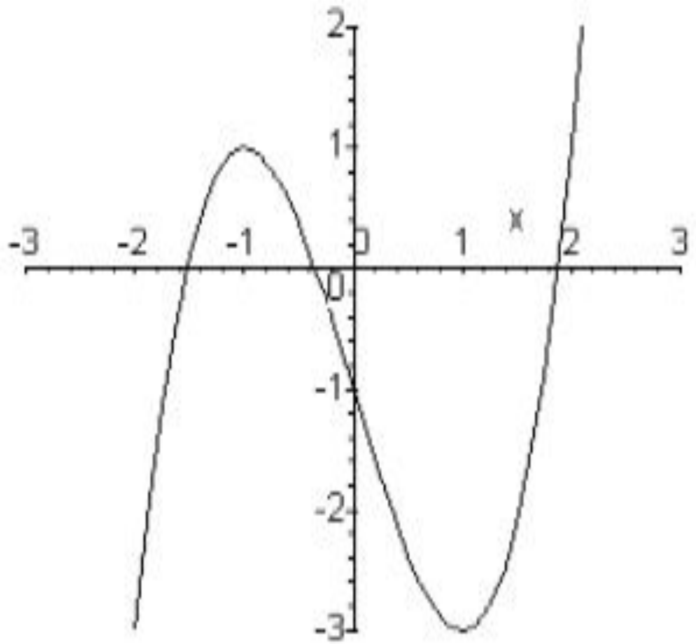
Построение исходной функции либо разбиение функции.

Пример 1

Отделить корни уравнения x^3*-3x-1=0*.

Построим график функции $y = x^3 - 3x - 1$ (рис.1). Кривая пересекает ось Ox в трех точках. Следовательно, уравнение имеет три действительных корня c_1 , c_2 , c_3. Из чертежа видно, что $c_1 \in [-2,1]$, $c_2 \in [-1,0]$, $c_3 \in [1,2]$

Пример 1



Аналитическое отделение корней

Аналитическое отделение корней основано на следующих теоремах.

Теорема 1. Если непрерывная функция $f(x)$ принимает на концах отрезка $[a; b]$ значения разных знаков, т.е. то на этом отрезке содержится по крайней мере один корень уравнения.

Теорема 2. Если непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная $f'(x)$ сохраняет знак внутри указанного отрезка, то внутри отрезка существует единственный корень уравнения $f(x) = 0$.

Пример 2.

Уравнение x5-4x2+x=0 имеет по крайней мере один корень, т.к. функция f: f(x)= x5-4x2+x определена и непрерывна на всей действительной прямой и

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Пример 2

Далее берется несколько промежуточных точек из области непрерывности функции f, полбор которых зависит от ее свойств, и вычисляются значения функции в них[1]. Если в двух выбранных соседних точках из одного и того же промежутка непрерывности функции произойдет смена знака, то, согласно теореме 2.1, между ними есть корень.