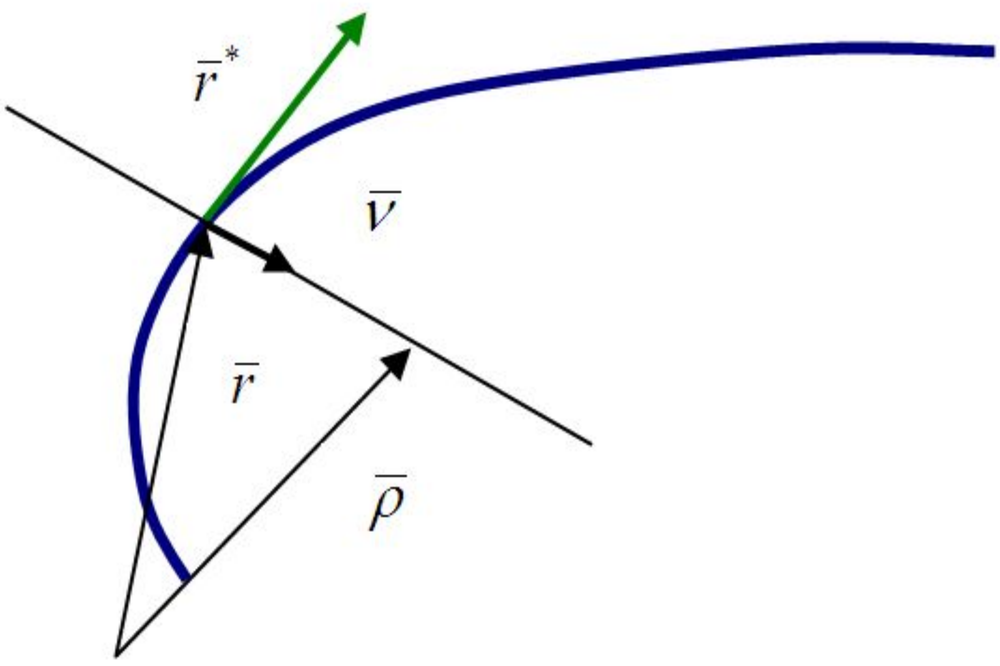
ТЕОРИЯ КРИВЫХ

Эволюта и эвольвента плоской кривой

Эволюта

Определение: ***нормалью плоской кривой*** называется прямая, перпендикулярная касательной, проходящая через точку касания и лежащая в плоскости этой кривой.



Утверждение:

Нормаль плоской кривой совпадает с главной нормалью этой кривой, рассмотренной в пространстве.

Эволюта

$\left\{F_x ; F_y\right\}$ -направлен вдоль нормали плоской кривой с неявным уравнением.

$$\frac{\xi - x}{F_x} = \frac{\eta - y}{F_y}, \qquad (43)$$

(43) – уравнение нормали плоской кривой, где (x; y) – точка, лежащая на кривой.

$\{\dot{x}; \dot{y}\} \perp$ нормали $\Rightarrow$

$$\dot{x}(\xi - x) + \dot{y}(\eta - y) = 0 \qquad (44)$$

(44) – уравнение нормали плоской кривой, заданной параметрическими уравнениями.

Уравнение эволюты

Определение: огибающая семейства нормалей плоской кривой называется ***эволютой***.

$$(\bar{\rho} - \bar{r}) \cdot \dot{\bar{r}} = 0 \qquad (44')$$

Уравнения (44) и (44’) можно записать в виде: $F(\xi; \eta; t) = 0.$
Продифференцируем это уравнение по *t*:

$$-\dot{\bar{r}}^2 + (\bar{\rho} - \bar{r}) \cdot \ddot{\bar{r}} = 0 \qquad (45)$$

Распишем уравнения (44’) и (45) по координатам и найдем их решение:

$$\begin{cases} (\xi - x) \cdot \dot{x} + (\eta - y) \cdot \dot{y} = 0 & \mid \cdot(-\ddot{y}) \quad \mid \cdot(-\ddot{x}) \\ (\xi - x) \cdot \ddot{x} + (\eta - y) \cdot \ddot{y} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 & \mid \cdot \dot{y} \quad \mid \cdot \dot{x} \end{cases}$$

Уравнение эволюты

$$(\xi - x)(\ddot{x}\cdot\dot{y} - \dot{x}\cdot\ddot{y}) = \dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

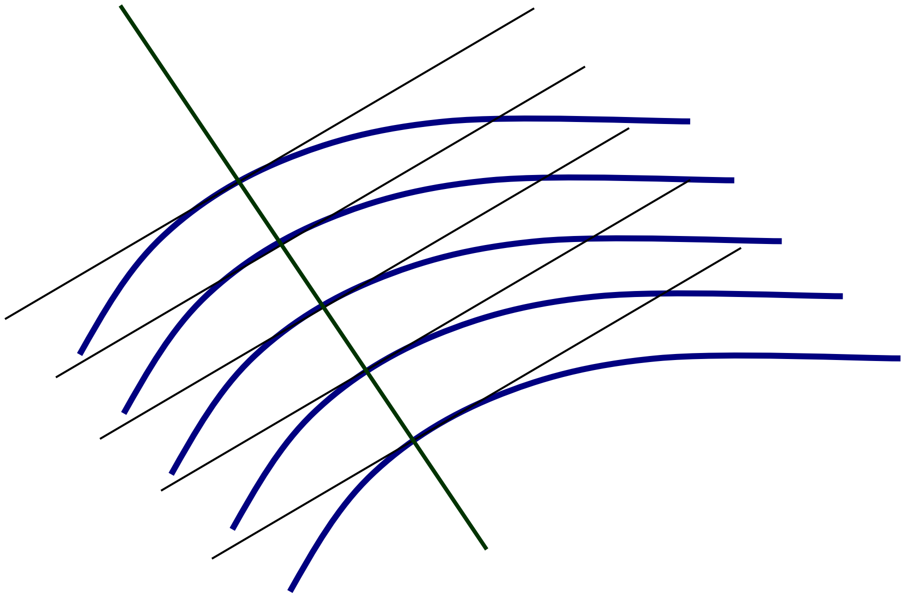
$$(\eta - y)(\dot{x}\cdot\ddot{y} - \ddot{x}\cdot\dot{y}) = \dot{x}\cdot(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$\begin{aligned} \xi &= x + \dot{y}\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\ddot{x}\cdot\dot{y} - \dot{x}\cdot\ddot{y}} \\ \eta &= y - \dot{x}\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\ddot{x}\cdot\dot{y} - \dot{x}\cdot\ddot{y}} \end{aligned} \qquad (46)$$

(46) – параметрические уравнения эволюты.

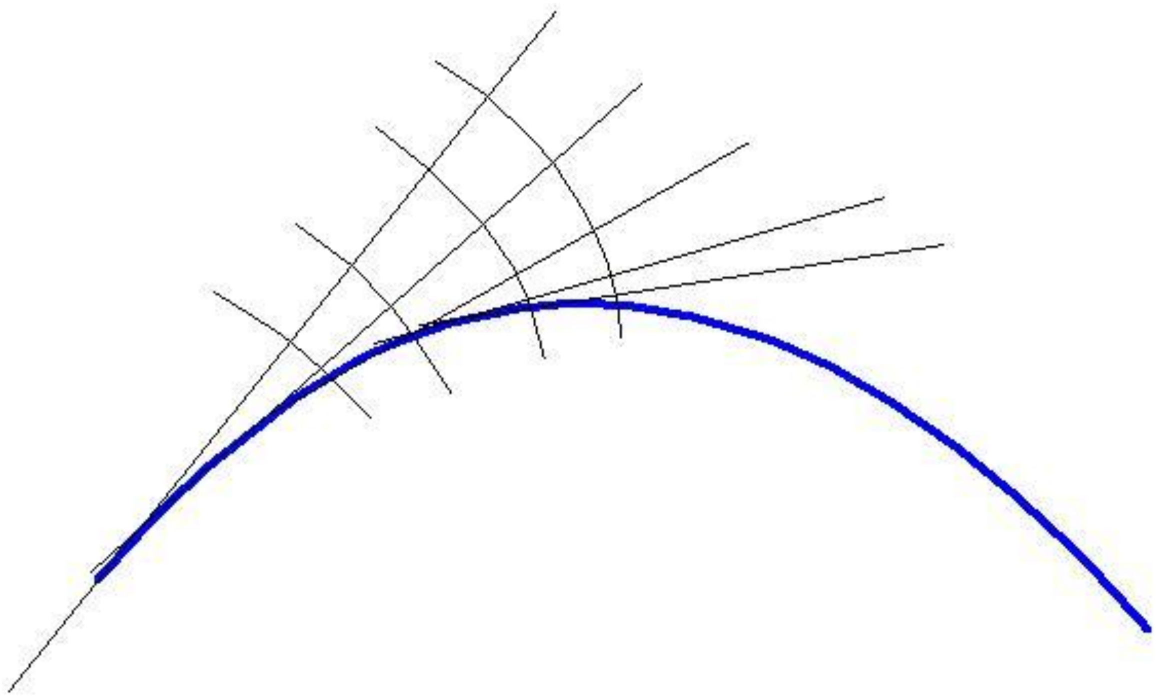
Эвольвента

Определение: ***ортогональной траекторией*** данного семейства плоских кривых называется кривая, которая пересекает каждую кривую данного семейства под прямым углом.



Эвольвента

Определение: ортогональная траектория семейства касательных называется ***эвольвентой*** этой кривой.



Уравнение эвольвенты

Пусть $\overline{r} = \overline{r}(s)$ - уравнение кривой, $\overline{\tau}(s)$ - касательный вектор, $\overline{\rho}$ - радиус-вектор точек на эвольвенте.

$$\overline{\rho} - \overline{r}(s) \parallel \overline{\tau} \quad \Rightarrow \quad \overline{\rho} - \overline{r}(s) = \lambda \overline{\tau}$$

$$\overline{\rho}' \perp \overline{\tau}$$

$$\overline{\rho}' - \overline{\tau} = \lambda' \overline{\tau} + \lambda \overline{\tau}' \quad | \cdot \overline{\tau}$$

$$-1 = \lambda' + \lambda \cdot \overline{\tau}' \cdot \overline{\tau}$$

$$\lambda' = -1$$

$$d\lambda = -ds$$

$$\lambda = s_0 - s$$

$$\overline{\rho} = \overline{r}(s) + (s_0 - s)\overline{\tau} \qquad (47)$$

(47) – уравнение эвольвенты.

Натуральные уравнения пространственной кривой

$$\bar{\rho}_1 = \bar{r}(s) + (s_1 - s)\bar{\tau}$$

$$\bar{\rho}_2 = \bar{r}(s) + (s_2 - s)\bar{\tau}$$

$$\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1 = (s_2 - s_1)\bar{\tau}$$

$$|\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1| = |s_2 - s_1|$$

Утверждение:

2 эвольвенты одной кривой являются эквидистантными линиями.

***Натуральные уравнения пространственной кривой*.**

$$\begin{cases} k = k(s) \\ \chi = \chi(s) \end{cases} \qquad (48)$$

(48) – натуральные уравнения пространственной кривой.