СИНТЕЗ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ

Курсовая работа
по дисциплине “Дискретная математика”

Задание.

Построить комбинационные схемы в различных базисах, реализующие не полностью определенную булеву функцию

$$f(X) = f\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5),$$

которая принимает значение 1 при условии:

$$2 \le |X_4X_5X_1 - X_2X_3| \le 5$$

и неопределенное значение на наборах, для которых $X_4 X_5 = 0$.

N	$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$	$X_4 X_5 X_1$	$(X_4 X_5 X_1)_{10}$	$X_2 X_3$	$(X_2 X_3)_{10}$	$X_4 X_5$	$(X_4 X_5)_{10}$	$\lvert - \rvert$	f
0	0 0 0 0 0	0 0 0	0	0 0	0	0 0	0	0	d
1	0 0 0 0 1	0 1 0	2	0 0	0	0 1	1	2	1
2	0 0 0 1 0	1 0 0	4	0 0	0	1 0	2	4	1
3	0 0 0 1 1	1 1 0	6	0 0	0	1 1	3	6	0
4	0 0 1 0 0	0 0 0	0	0 1	1	0 0	0	1	d
5	0 0 1 0 1	0 1 0	2	0 1	1	0 1	1	1	0
6	0 0 1 1 0	1 0 0	4	0 1	1	1 0	2	3	1
7	0 0 1 1 1	1 1 0	6	0 1	1	1 1	3	5	1
8	0 1 0 0 0	0 0 0	0	1 0	2	0 0	0	2	d
9	0 1 0 0 1	0 1 0	2	1 0	2	0 1	1	0	0
10	0 1 0 1 0	1 0 0	4	1 0	2	1 0	2	2	1
11	0 1 0 1 1	1 1 0	6	1 0	2	1 1	3	4	1
12	0 1 1 0 0	0 0 0	0	1 1	3	0 0	0	3	d
13	0 1 1 0 1	0 1 0	2	1 1	3	0 1	1	1	0
14	0 1 1 1 0	1 0 0	4	1 1	3	1 0	2	1	0
15	0 1 1 1 1	1 1 0	6	1 1	3	1 1	3	3	1
16	1 0 0 0 0	0 0 1	1	0 0	0	0 0	0	1	d
17	1 0 0 0 1	0 1 1	3	0 0	0	0 1	1	3	1
18	1 0 0 1 0	1 0 1	5	0 0	0	1 0	2	5	1
19	1 0 0 1 1	1 1 1	7	0 0	0	1 1	3	7	0
20	1 0 1 0 0	0 0 1	1	0 1	1	0 0	0	0	d
21	1 0 1 0 1	0 1 1	3	0 1	1	0 1	1	2	1
22	1 0 1 1 0	1 0 1	5	0 1	1	1 0	2	4	1
23	1 0 1 1 1	1 1 1	7	0 1	1	1 1	3	6	0
24	1 1 0 0 0	0 0 1	1	1 0	2	0 0	0	1	d
25	1 1 0 0 1	0 1 1	3	1 0	2	0 1	1	1	0
26	1 1 0 1 0	1 0 1	5	1 0	2	1 0	2	3	1
27	1 1 0 1 1	1 1 1	7	1 0	2	1 1	3	5	1
28	1 1 1 0 0	0 0 1	1	1 1	3	0 0	0	2	d
29	1 1 1 0 1	0 1 1	3	1 1	3	0 1	1	0	0
30	1 1 1 1 0	1 0 1	5	1 1	3	1 0	2	2	1
31	1 1 1 1 1	1 1 1	7	1 1	3	1 1	3	4	1

Представление булевой функции в аналитическом виде

$$\text{КДНФ}: f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4x_5 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5 \vee$$

$$\vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4x_5 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4x_5 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4x_5 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5 \vee$$

$$\vee x_1x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4x_5 \vee x_1x_2x_3x_4\bar{x}_5 \vee x_1x_2x_3x_4x_5$$

$$\text{ККНФ}: f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)$$

$$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)$$

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)$$

Минимизация булевой функции методом Квайна –Мак-Класки

Нахождение простых импликант (максимальных кубов).

$K^0(f) \cup N(f)$	$K^1(f)$		$K^2(f)$			$K^3(f)$		$Z(f)$
1. 00000 v	1. 0000X v	1-2	**1. X000X**	1-16	5-6	**X0XX0**	2-15	**X0XX0**
2. 00001 v	2. 000X0 v	1-3	2. 00XX0 v	2-10	3-7		4-10	**XX0X0**
3. 00010 v	3. 00X00 v	1-4	3. 0X0X0 v	2-13	4-8		6-8	**XXX00**
4. 00100 v	4. 0X000 v	1-5	4. X00X0 v	2-17	5-9	**XX0X0**	3-16	**1XXX0**
5. 01000 v	5. X0000 v	1-6	5. 0XX00 v	3-14	4-11		4-12	**X000X**
6. 10000 v	6. X0001 v	2-10	6. X0X00 v	3-18	5-12		7-9	**10X0X**
7. 00110 v	7. 00X10 v	3-7	7. XX000 v	4-19	5-15	**XXX00**	5-17	**X101X**
8. 01010 v	8. 0X010 v	3-8	8. X0X10 v	7-26	9-21		6-13	**X1X11**
9. 01100 v	9. X0010 v	3-11	9. XX010 v	8-27	9-23		7-11	**11X1X**
10. 10001 v	10. 001X0 v	4-7	10. X01X0 v	10-29	12-21	**1XXX0**	15-21	**0011X**
11. 10010 v	11. 0X100 v	4-9	11. XX100 v	11-30	12-24		16-20	**0X111**
12. 10100 v	12. X0100 v	4-12	12. X10X0 v	13-31	15-23		17-19	
13. 11000 v	13. 010X0 v	5-8	13. X1X00 v	14-32	15-24			
14. 00111 v	14. 01X00 v	5-9	**14. 10X0X**	16-28	18-25			
15. 01011 v	15. X1000 v	5-13	15. 10XX0 v	17-29	18-26			
16. 10101 v	16. 1000X v	6-10	16. 1X0X0 v	17-31	19-27			
17. 10110 v	17. 100X0 v	6-11	17. 1XX00 v	18-32	19-30			
18. 11010 v	18. 10X00 v	6-12	**18. X101X**	22-37	23-35			
19. 11100 v	19. 1X000 v	6-13	19. 1XX10 v	26-38	27-36			
20. 01111 v	**20. 0011X**	7-14	20. 1X1X0 v	29-39	30-36			
21. 11011 v	21. X0110 v	7-17	21. 11XX0 v	31-39	32-38	**$K^4(f)$ =**	$\varnothing$	
22. 11110 v	22. 0101X v	8-15	**22. X1X11**	34-41	35-40			
23. 11111 v	23. X1010 v	8-18	**23. 11X1X**	37-42	38-41			
	24. X1100 v	9-19						
	25. 10X01 v	10-16						
	26. 10X10 v	11-17						
	27. 1X010 v	11-18						
	28. 1010X v	12-16						
	29. 101X0 v	12-17						
	30. 1X100 v	12-19						
	31. 110X0 v	13-18						
	32. 11X00 v	13-19						
	33. 0X111	14-20						
	34. 01X11 v	15-20						
	35. X1011 v	15-21						
	36. 1X110 v	17-22						
	37. 1101X v	18-21						
	38. 11X10 v	18-22						
	39. 111X0 v	19-22						
	40. X1111 v	20-23						
	41. 11X11 v	21-23						
	42. 1111X v	22-23						

Составление импликантной таблицы.

Импликантная таблица содержит 11 строк (по числу простых импликант) и 15 столбцов (по числу существенных вершин).

Простые импликанты (максималь-ные кубы)		0-кубы														
		0 0 0 0 1	0 0 0 1 0	0 0 1 1 0	0 0 1 1 1	0 1 0 1 0	0 1 0 1 1	0 1 1 1 1	1 0 0 0 1	1 0 0 1 0	1 0 1 0 1	1 0 1 1 0	1 1 0 1 0	1 1 0 1 1	1 1 1 1 0	1 1 1 1 1
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1XXX0									*		*	*		*	
2	X0XX0		*	*						*		*				
3	XX0X0		*			*				*			*			
~~4~~	~~XXX00~~															
5	X101X					*	*						*	*		
6	X1X11						*	*						*		*
7	11X1X												*	*	*	*
~~8~~	~~X000X~~	*							*							
9	0011X			*	*											
~~10~~	~~10X0X~~								*		*					
11	0X111				*			*								

Импликанта 4, не покрывающая ни одной вершины, вычеркивается из таблицы.

Определение существенных импликант.

Импликанты 8 и 10 – существенные, так как они покрывают вершины 1 и 10 соответственно, не покрытые другими импликантами. Вычеркнем из таблицы строки, соответствующие этим импликантам, а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами.

Множество существенных импликант образует ядро покрытия как его обязательную часть:

$$T = \begin{Bmatrix} 10X0X \\ X000X \end{Bmatrix}$$

Получаем упрощенную импликантную

Простые импликанты (максимальные кубы)		0-кубы											
		0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
		0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
		0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1
		a	b	c	d	e	f	g	h	k	l	m	n
1XXX0	A							*	*	*		*	
X0XX0	B	*	*					*	*				
XX0X0	C	*			*			*		*			
X101X	D				*	*				*	*		
X1X11	E					*	*				*		*
11X1X	F									*	*	*	*
0011X	G		*	*									
0X111	H			*			*						

Определение минимального покрытия

Метод Петрика. Выпишем булево выражение Y, определяющее условие покрытия всех 0-кубов (существенных вершин), не покрываемых существенными импликантами, в соответствии с таблицей

$Y=(B \vee C)(B \vee G)(G \vee H)(C \vee D)(D \vee E)(E \vee H)(A \vee B \vee C)(A \vee B)$

Применим закон поглощения к дизъюнктивным термам, в результате чего в выражении остаются только двухбуквенные термы

$Y=(B \vee C)(B \vee G)(G \vee H)(C \vee D)(D \vee E)(E \vee H)(A \vee B)(A \vee F)(E \vee F)$

Выполняя операции попарного логического умножения применительно к термам, содержа-щим одинаковые буквы, с последующим примене-нием закона поглощения, приведем исходную конъюнктивную форму Y к дизъюнктивной

$Y=ABDEG \vee ACEG \vee ABCEH \vee ABDEH \vee ACDFGH \vee$

Возможны следующие варианты

$$C_1 = \left\{\begin{matrix} T \\ A \\ B \\ D \\ E \\ G \end{matrix}\right\}; \quad C_2 = \left\{\begin{matrix} T \\ A \\ C \\ E \\ G \end{matrix}\right\}; \quad C_3 = \left\{\begin{matrix} T \\ A \\ B \\ C \\ E \\ H \end{matrix}\right\}; \quad C_4 = \left\{\begin{matrix} T \\ A \\ B \\ D \\ E \\ H \end{matrix}\right\} \quad C_5 = \left\{\begin{matrix} T \\ A \\ C \\ D \\ F \\ G \\ H \end{matrix}\right\};$$

$$S_1^a = 20, \quad S_2^a = 17, \quad S_3^a = 19, \quad S_4^a = 20, \quad S_5^a = 24,$$

$$S_1^b = 27, \quad S_2^b = 23, \quad S_3^b = 26, \quad S_4^b = 27, \quad S_5^b = 32,$$

$$C_6 = \left\{\begin{matrix} T \\ B \\ D \\ E \\ F \\ G \end{matrix}\right\}; \quad C_7 = \left\{\begin{matrix} T \\ B \\ C \\ E \\ F \\ G \end{matrix}\right\}; \quad C_8 = \left\{\begin{matrix} T \\ B \\ C \\ E \\ F \\ H \end{matrix}\right\}; \quad C_9 = \left\{\begin{matrix} T \\ B \\ D \\ F \\ H \end{matrix}\right\}$$

$$S_6^a = 21, \quad S_7^a = 20, \quad S_8^a = 20, \quad S_9^a = 18$$

$$S_6^b = 28, \quad S_7^b = 27, \quad S_8^b = 27, \quad S_9^b = 24,$$

Минимальное покрытие функции – C_2.

$$C_{\min}(f)=\begin{Bmatrix} X000X \\ 10X0X \\ 1XXX0 \\ XX0X0 \\ X1X11 \\ 0011X \end{Bmatrix} \qquad S^a=17, \quad S^b=23.$$

Этому покрытию соответствует МДНФ следующего вида:

$$f=\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_5 \vee \overline{x}_3\overline{x}_5 \vee x_2x_4x_5 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4$$

Дальнейшее упрощение импликантной таблицы. К упрощенной импликантной таблице применим операцию удаления “лишних” столбцов (существенных вершин).

Простые импликанты (максималь-ные кубы)		0-кубы											
		00010	00110	00111	01010	01011	01111	10010	10110	11010	11011	11110	11111
		a	b	c	d	e	f	g	h	k	l	m	n
1XXX0	A							*	*	*		*	
X0XX0	B	*	*					*	*				
XX0X0	C	*			*			*		*			
X101X	D				*	*				*	*		
X1X11	E					*	*				*		*
11X1X	F									*	*	*	*
0011X	G		*	*									
0X111	H			*			*						

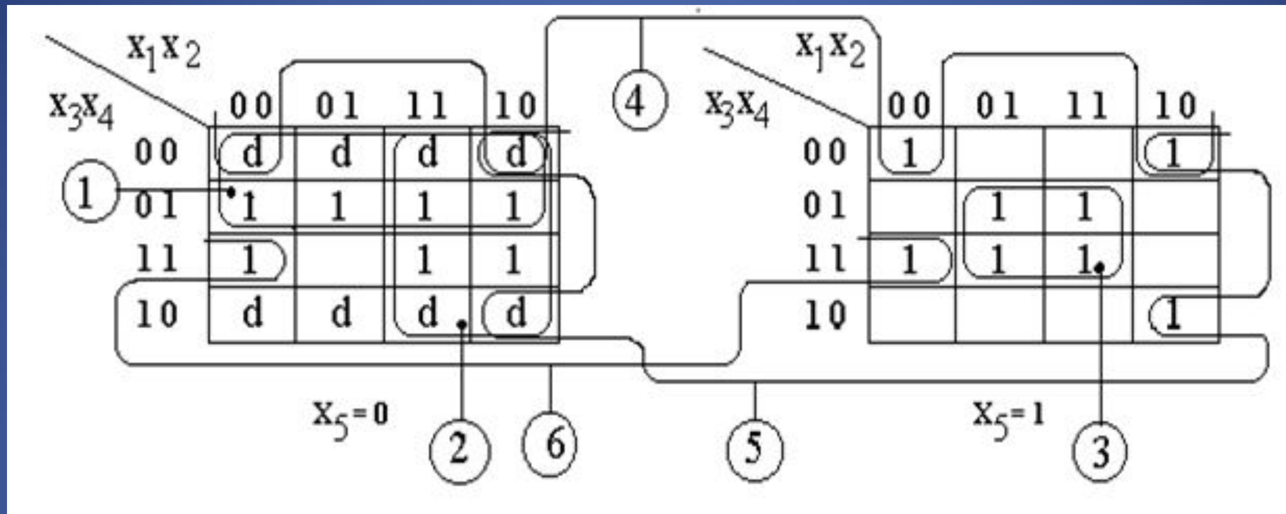
В отношении “множество-подмножество“ находятся отметки следующих пар столбцов: *g* и *a*, *g* и *h*, *k* и *d*, *k* и *m* , *l* и *e*, *l* и *n*. Таким образом из таблицы можно удалить столбцы *g*, *k* и *l*, после чего получим новую таблицу.

Простые импликанты (максимальные кубы)		0-кубы								
		0 0 0 1 0	0 0 1 1 0	0 0 1 1 1	0 1 0 1 0	0 1 0 1 1	0 1 1 1 1	1 0 1 1 0	1 1 1 1 0	1 1 1 1 1
		a	b	c	d	e	f	h	m	n
1XXX0	A							*	*	
X0XX0	B	*	*					*		
XX0X0	C	*			*					
X101X	D				*	*				
X1X11	E					*	*			*
11X1X	F								*	*
0011X	G		*	*						
0X111	H			*			*			

Дальнейшие упрощения таблицы невозможны. Для определения минимального покрытия можно использовать *метод Петрика.*

Исходное булево выражение *Y*, определяющее условие покрытия существенных вершин будет

Минимизация булевой функции на картах Карно. Определение МДНФ



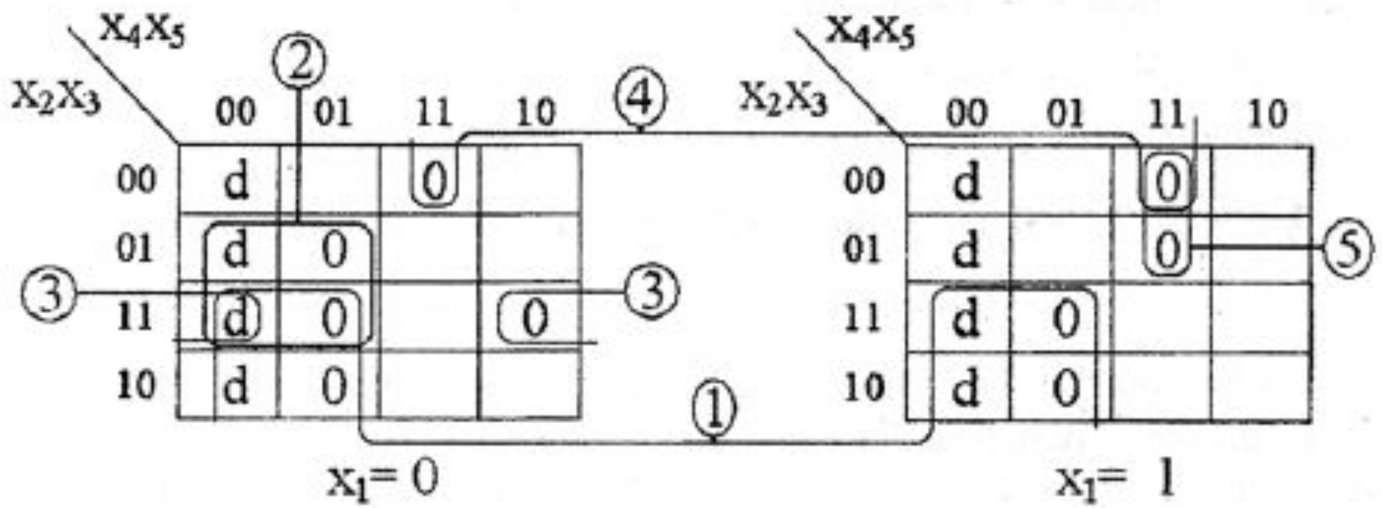
Получаем

$$C_{min}(f)=\left\{\begin{matrix} XX0X0 \\ 1XXXX \\ X1X11 \\ X000X \\ 10X0X \\ 0011X \end{matrix}\right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad S^a=17, \quad S^b=23$$

МДНФ имеет следующий вид:

$$f=\bar{x}_3\bar{x}_5 \vee x_1\bar{x}_5 \vee x_2x_4x_5 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4.$$

Определение МКНФ



Получаем

$$C_{\min}(\overline{f})=\left\{\begin{matrix} X1X0X \\ 0X10X \\ 011X0 \\ X0011 \\ 10X11 \end{matrix}\right\}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad S^a=17,\ S^b=22$$

МКНФ имеет следующий вид:

$$f=(\bar{x}_2 \vee x_4)\cdot(x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)\cdot(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_5)\cdot$$
$$(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)\cdot(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5).$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторное преобразование для МДНФ:

$$f = \bar{x}_3\bar{x}_5 \vee x_1\bar{x}_5 \vee x_2x_4x_5 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 = \qquad (S_Q=23)$$

$$= \bar{x}_5(x_1 \vee \bar{x}_3) \vee x_2x_4x_5 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4(x_1 \vee \bar{x}_3) \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 = \qquad (S_Q=20)$$

$$= (x_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) \vee x_2x_4x_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4. \qquad (S_Q=18)$$

Решим задачу декомпозиции применительно к полученной форме. Для этого введем вспомога-тельную функцию $\varphi = \varphi(x_1, x_3) = x_1 \vee \bar{x}_3$

Инверсия этой функции имеет вид $\overline{\varphi} = \bar{x}_1 x_3$.

С учетом новой функции последнее выражение преобразуется к виду:

$$f=\varphi\cdot(\bar{x}_2\bar{x}_4\vee\bar{x}_5)\vee x_2x_4x_5\vee\bar{\varphi}\cdot\bar{x}_2x_4.$$

Реализация комбинационной схемы по этому выражению с учетом затрат на вспомогательную функцию ϕ и ее инверсию дает цену схемы S_Q=18, такую же, как и для построенной схемы, но задержка схемы будет больше.

Факторное преобразование для МКНФ:

$$f=(\bar{x}_2\vee x_4)\cdot(x_1\vee\bar{x}_3\vee x_4)\cdot(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3\vee x_5)\cdot$$
$$\cdot(x_2\vee x_3\vee\bar{x}_4\vee\bar{x}_5)\cdot(\bar{x}_1\vee x_2\vee\bar{x}_4\vee\bar{x}_5)=$$

(S_Q=22)

$$=(x_4\vee\bar{x}_2(x_1\vee\bar{x}_3))\cdot(x_2\vee\bar{x}_4\vee\bar{x}_5\vee\bar{x}_1x_3)\cdot(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3\vee x_5).$$

(S_Q=19)

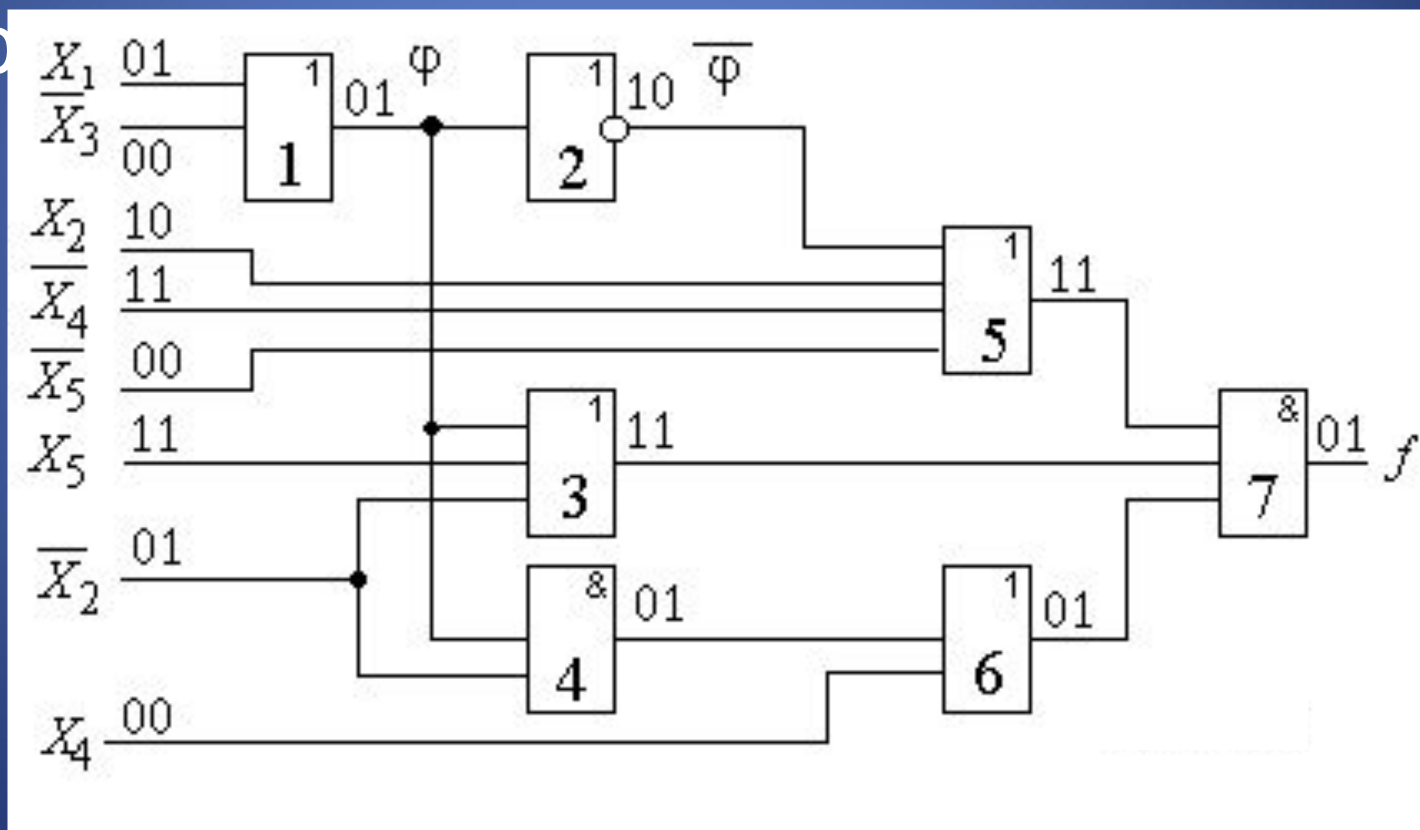
Следует отметить, что вынесение x_4 из первых двух термов МКНФ не дает уменьшения цены схемы: $\Delta S_Q = 0$ (m=1, k=2, p=1, Δ=2), однако является целесообразным для дальнейшей декомпозиции за счет введения вспомогательной функции ϕ, такой же как и в предыдущем случае. Выражение после декомпозиции примет вид:

$$\varphi = x_1 \vee \overline{x_3}\,,\ f = (x_4 \vee \bar{x}_2 \cdot \varphi)(x_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5 \vee \bar{\varphi})(\bar{x}_2 \vee x_5 \vee \varphi), \quad (S_Q = 17)$$

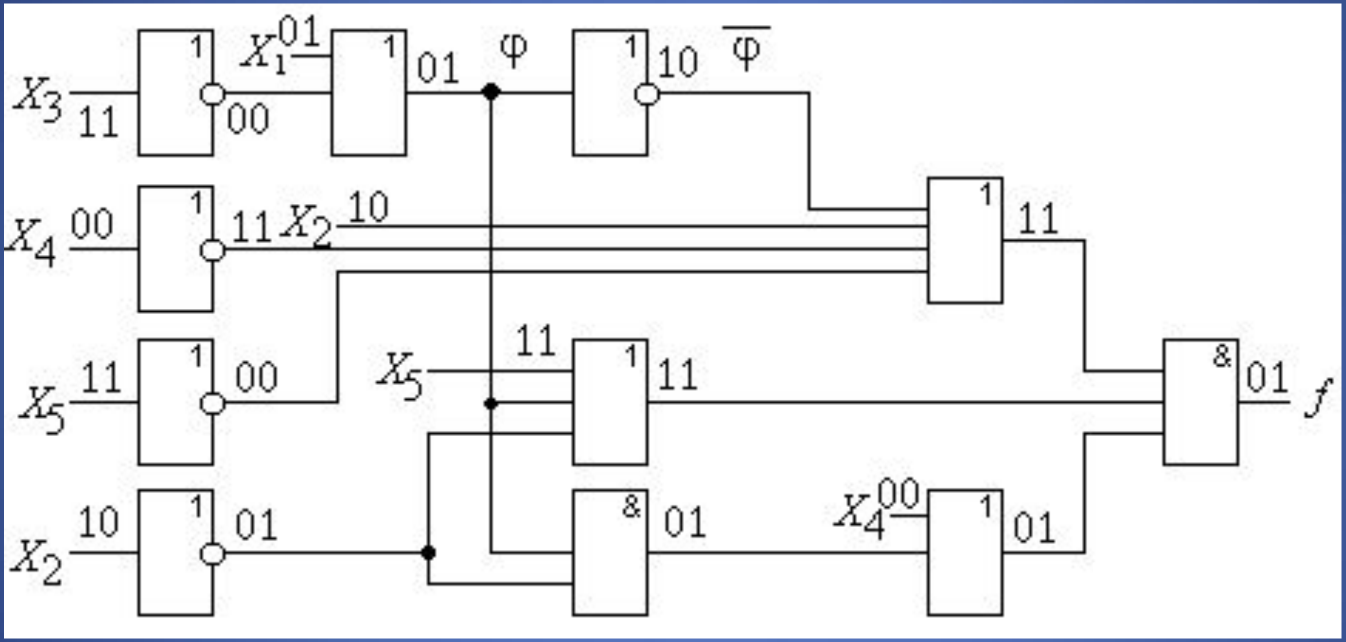
для которого цена схемы дает абсолютный минимум при условии, что синтезируемая схема строится на элементах булева базиса с парафазными входами.

Синтез комбинационных схем в булевом базисе

Комбинационные схемы, реализующие заданную функцию по последней форме, в булевом базисе с парафазными входами и с одноф



Задержка схемы с парафазными входами T=4т, цена схемы S_Q=17. Для схемы с однофазными входами T=5т, цена схемы S_Q=21.



Синтез комбинационных схем в универсальных базисах

Базис ИЛИ-НЕ

а) Приведение последнего выражения к базису ИЛИ-НЕ осуществляется заменой операций булева базиса на операцию стрелка Пирса путем использования законов двойственности

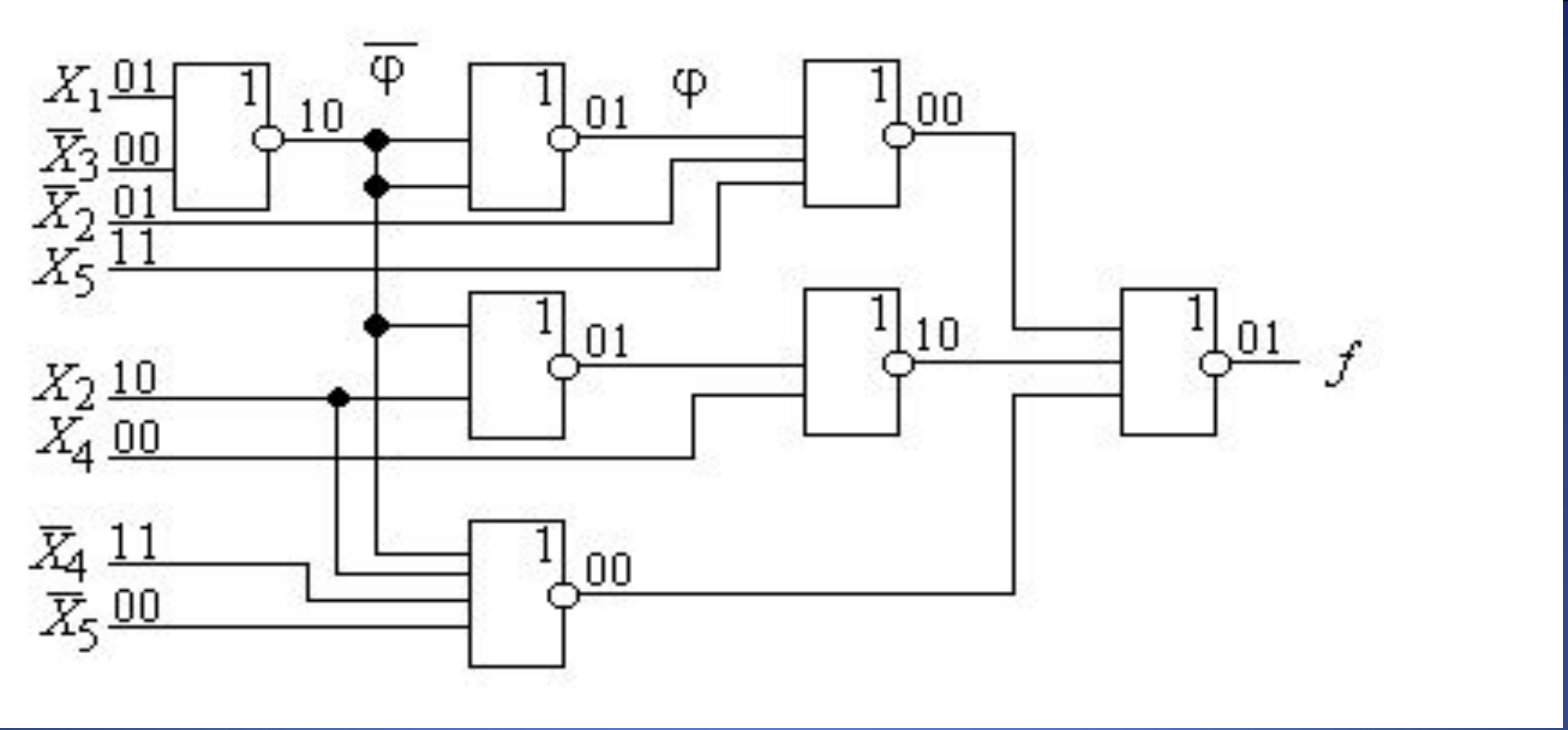
$$\varphi = x_1 \vee \bar{x}_3 = \overline{\overline{x_1 \vee \bar{x}_3}} = \overline{x_1 \downarrow \bar{x}_3}; \qquad \bar{\varphi} = x_1 \downarrow \bar{x}_3.$$

$$f = (x_4 \vee \bar{x}_2 \cdot \varphi)(x_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5 \vee \bar{\varphi})(\bar{x}_2 \vee x_5 \vee \varphi) =$$

$$= \overline{\overline{x_4 \vee \overline{x_2 \vee \bar{\varphi}}} \vee \overline{x_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5 \vee \bar{\varphi}} \vee \overline{\bar{x}_2 \vee x_5 \vee \varphi}} =$$

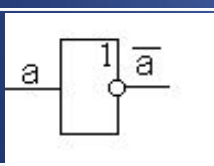
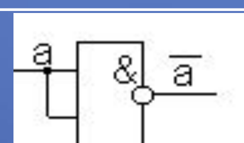
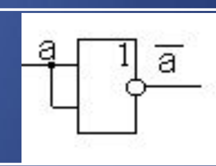
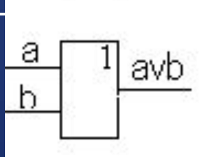
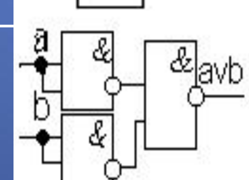
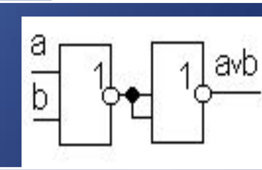
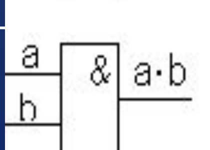
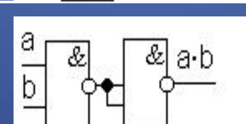
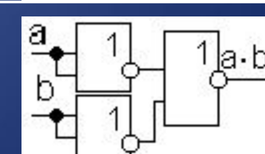
$$= (x_4 \downarrow (x_2 \downarrow \bar{\varphi})) \downarrow (x_2 \downarrow \bar{x}_4 \downarrow \bar{x}_5 \downarrow \bar{\varphi}) \downarrow (\bar{x}_2 \downarrow x_5 \downarrow \varphi).$$

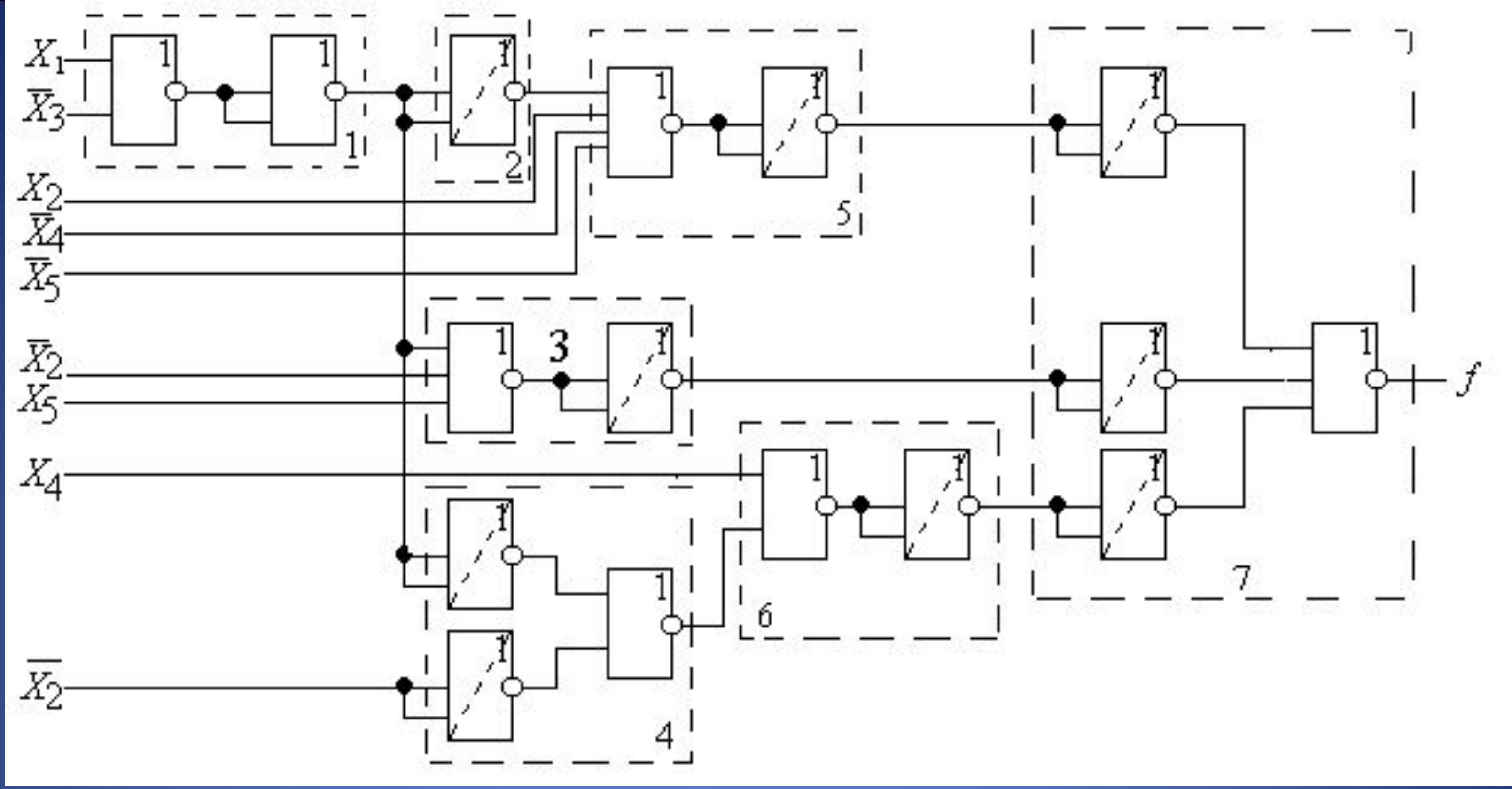
По полученному выражению строим схему с парафазными входами в базисе ИЛИ-НЕ



Задержка схемы T=4т, цена схемы S_Q=18. По сравнению с ценой схемы S_Q, построенной в булевом базисе, цена схемы увеличилась за счет того, что в качестве инвертора используется двухвходовой элемент ИЛИ-НЕ.

б) Преобразование схемы из булева базиса в универсальный.
Заменим элементы булева базиса в соответствии с логическими эквивалентами из таблицы. В результате получим следующую схему. Пунктирной линией на ней выделены логические эквиваленты элементов булева базиса.

Элемент булева базиса	Базис И-НЕ		Базис ИЛИ-НЕ	
	Формула	Логический элемент	Формула	Логический элемент
	$\overline{a} = \overline{a \cdot a}$		$\overline{a} = \overline{a \vee a}$	
	$a \vee b = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}$		$a \vee b = \overline{\overline{a \vee b}}$	
	$a \cdot b = \overline{\overline{a \cdot b}}$		$a \cdot b = \overline{\overline{a} \vee \overline{b}}$	



Исключим из схемы лишние инверторы. К ним относятся:

- входной инвертор для инверсии переменной x_2 (логический эквивалент элемента 4);
- пары последовательных инверторов на связях с выходов логических эквивалентов элементов 3, 5 и 6 на входы логического эквивалента элемента 7

Кроме того, пары последовательных инверторов составляют выходной инвертор логического эквивалента элемента 1, на котором реализуется вспомогательная функция ϕ, и входной инвертор логического эквивалента элемента 4, а также логический эквивалент элемента 2. Однако из двух последовательных инверторов обеих пар исключается только один, замыкающий пару, на котором реализуется инверсия вспомогательной функции ϕ. Лидирующий инвертор пары сохраняется для подачи значения ϕ на вход логического эквивалента элемента 3.

После удаления замыкающих инверторов обеих пар, на выходах которых реализуется инверсия *ϕ,* входы логических эквивалентов элементов 4 и 5, связанные с выходом удаляемых инверторов, переключаются к выходу первого элемента логи-ческого эквивалента 1, на котором формируется требуемое значение инверсии *ϕ.* После исклю-чения лишних инверторов получим окончательную схему в базисе ИЛИ-НЕ, аналогичную приведенной выше.

Базис И-НЕ

а) Приведение аналитического выражения к базису И-НЕ осуществляется заменой булева базиса на операцию штрих Шеффера (отрицание конъюнкции) путем использования законов двойственности.

$$\varphi = x_1 \vee \bar{x}_3 = \overline{\overline{x_1 \vee \bar{x}_3}} = \overline{\bar{x}_1 x_3} = \bar{x}_1 \mid x_3.$$

$$f = (x_4 \vee \bar{x}_2 \cdot \varphi)(x_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5 \vee \bar{\varphi})(\bar{x}_2 \vee x_5 \vee \varphi) =$$

$$= \overline{\bar{x}_4 \overline{\bar{x}_2 \cdot \varphi}} \cdot \overline{\bar{x}_2 x_4 x_5 \varphi} \cdot \overline{x_2 \bar{x}_5 \bar{\varphi}} =$$

$$= \overline{(\bar{x}_4 \mid (\bar{x}_2 \mid \varphi)) \mid (\bar{x}_2 \mid x_4 \mid x_5 \mid \varphi) \mid (x_2 \mid \bar{x}_5 \mid \bar{\varphi})}.$$

Цена схемы в базисе И-НЕ: S_Q=20. Увеличение цены схемы на три по сравнению со схемой в булевом базисе связано, во-первых, с реализацией инверсии вспомогательной функции ϕ и, во-вторых, с использованием выходного инвертора.

Для построения схемы с меньшей ценой целесообразно использовать форму, полученную по МДНФ с ценой S_Q=18 для булева базиса.

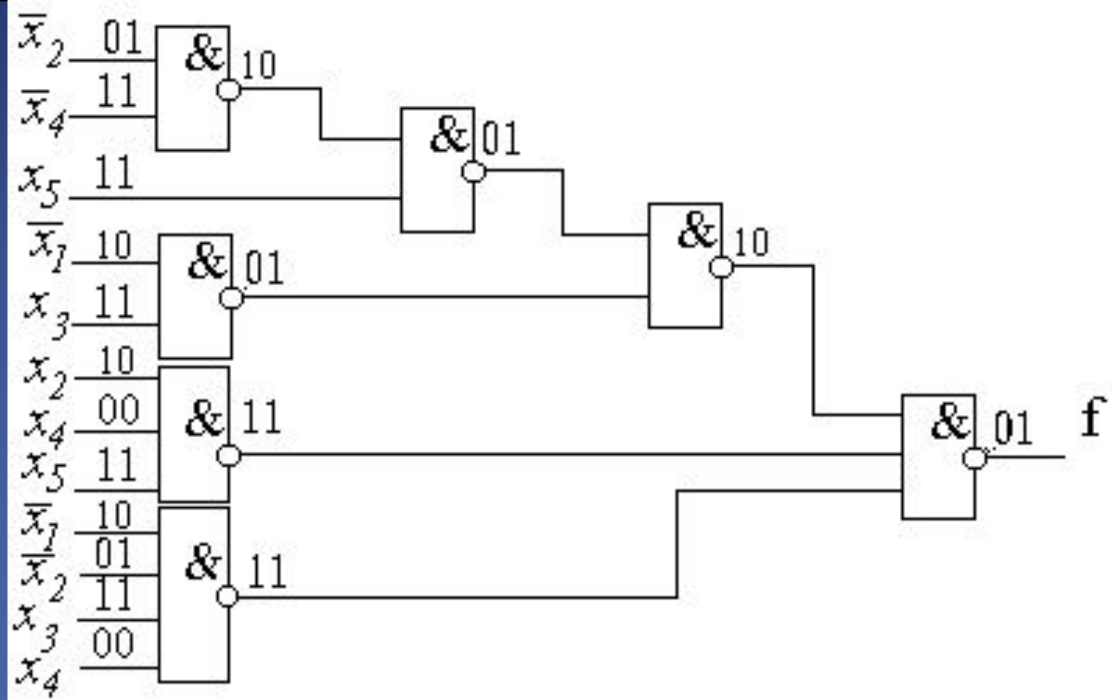
$$f = (x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) \vee x_2x_4x_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 =$$

$$= \overline{\overline{x_1 \vee x_3}} \cdot \overline{\overline{\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_5}} \vee x_2x_4x_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 =$$

$$= \overline{\overline{\overline{\bar{x}_1 x_3} \cdot \overline{\overline{\bar{x}_2\bar{x}_4} \cdot x_5} \vee x_2x_4x_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4}} =$$

$$= \overline{\overline{\overline{\bar{x}_1 x_3} \cdot \overline{\overline{\bar{x}_2\bar{x}_4} \cdot x_5}} \cdot \overline{x_2x_4x_5} \cdot \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4}} =$$

$$= ((\bar{x}_1 \mid x_3) \mid ((\bar{x}_2 \mid \bar{x}_4) \mid x_5)) \mid (x_2 \mid x_4 \mid x_5) \mid (\bar{x}_1 \mid \bar{x}_2 \mid x_3 \mid x_4)$$



Задержка схемы T=4т, цена схемы S_Q=18 совпадает с ценой для булева базиса.

б) Преобразование схемы из булевого базиса в базис И-НЕ осуществляется так же как и для базиса ИЛИ-НЕ.

Синтез комбинационной схемы с учетом коэффициента объединения

При построении схемы в универсальном базисе с учетом ограничения на количество входов в логические элементы, определяемого коэффициентом объединения по входам I, целесообразно предварительно преобразовать исходное выражение для реализуемой функции в булевом базисе, разделяя аргументы булевых операций конъюнкции и дизъюнкции на группы с числом аргументов, не превышающим заданного значения I.

Если в выражении для функции имеются трехмест-ные операции, то при $I=2$ для уменьшения задерж-ки синтезируемой схемы целесообразнее объеди-нять в пару более простые элементы операции, оставляя более сложные элементы уединенными. Преобразуем полученное выражение для коэффи-циента объединения $I = 2$, вводя в нем дополни-тельные скобки. При этом в трехместной операции дизъюнкции в правой скобке объединим в пару входные переменные □ x_2 и x_5, уединив функцию ϕ, реализуемую отдельной подсхемой и следователь-но, являющуюся более сложным

Кроме того, при объединении скобок как элементов трехместной операции конъюнкции уединим среднюю скобку, как более сложный элемент. В результате исходное выражение преобразуется к виду:

$$f = ((x_4 \vee \bar{x}_2 \cdot \varphi)((\bar{x}_2 \vee x_5) \vee \varphi))((x_2 \vee \bar{x}_4) \vee (\bar{x}_5 \vee \bar{\varphi})).$$

Преобразуем это выражение к базису ИЛИ-НЕ, заменяя операции булева базиса операцией стрелка Пирса подобно тому, как это делалось ранее, но с учетом скобок. Это означает, что каждая операция стрелка Пирса должна быть двухместной.

$$\varphi = \overline{x_1 \downarrow \overline{x}_3}$$

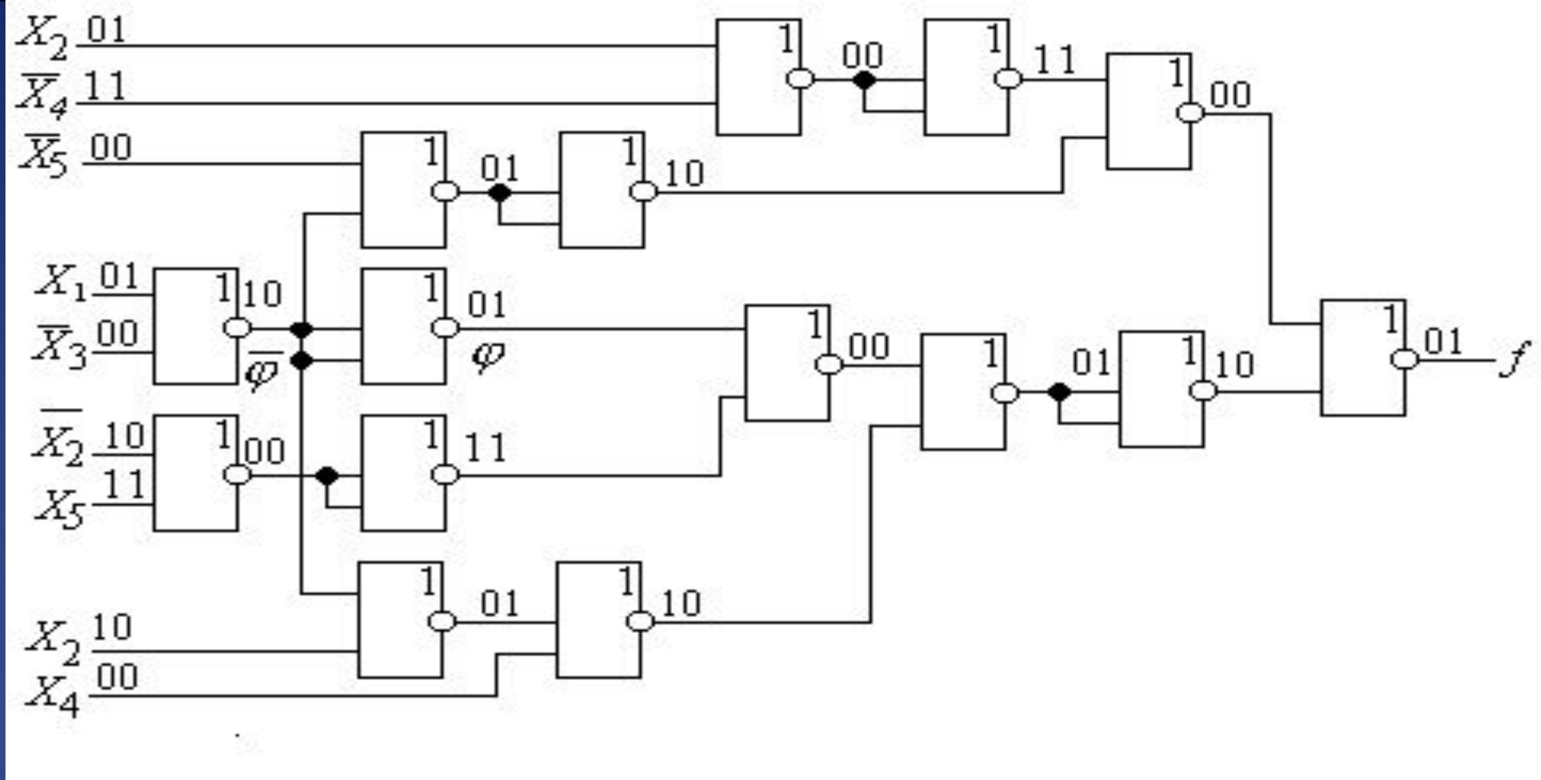
$$f = \overline{\overline{((x_4 \vee \overline{\overline{\bar{x}_2 \cdot \varphi}})((\bar{x}_2 \vee x_5) \vee \varphi))}((x_2 \vee \bar{x}_4) \vee (\bar{x}_5 \vee \bar{\varphi}))} =$$

$$= \overline{\overline{\overline{\overline{(x_4 \vee \overline{\overline{x_2 \vee \bar{\varphi}}}} \vee \overline{(\bar{x}_2 \vee x_5) \vee \varphi})}((\overline{\overline{x_2 \vee \bar{x}_4}}) \vee (\overline{\overline{\bar{x}_5 \vee \bar{\varphi}}}))}} =$$

$$= \overline{\overline{((x_4 \downarrow (x_2 \downarrow \bar{\varphi})) \downarrow ((\overline{\bar{x}_2 \downarrow x_5}) \downarrow \varphi))} \vee \overline{((\overline{x_2 \downarrow \bar{x}_4}) \vee (\overline{\bar{x}_5 \downarrow \bar{\varphi}}))}} =$$

$$= \overline{((x_4 \downarrow (x_2 \downarrow \bar{\varphi})) \downarrow ((\overline{\bar{x}_2 \downarrow x_5}) \downarrow \varphi))} \downarrow ((\overline{x_2 \downarrow \bar{x}_4}) \downarrow (\overline{\bar{x}_5 \downarrow \bar{\varphi}}))$$

Инверсии реализуются в схеме, построенной по этому выражению, на элементах ИЛИ-НЕ с запараллеленными входами.



Задержка схемы T=6т, цена схемы S_Q=30. По сравнению со схемой в базисе ИЛИ-НЕ, построенной без ограничений на число входов в элементы, задержка схемы и ее цена значительно увеличились.

Замечание. Использование в качестве исходного выражения $f=(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_5) \vee x_2x_4x_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4.$ с последующей дополнительной факторизацией путем вынесения за скобки x_4 из двух последних термов позволяет построить схему на двухвходо-вых элементах ИЛИ-НЕ с ценой S_Q=22 и задержкой T=7т.

Преобразованное к базису выражение имеет вид

$$z = x_1 \downarrow x_3,\ f = \overline{(z \downarrow ((x_2 \downarrow x_4) \downarrow x_5)) \downarrow (\bar{x}_4 \downarrow ((\bar{x}_2 \downarrow \bar{x}_5) \downarrow (\bar{z} \downarrow \bar{x}_2)))}$$

Если использовать аналогичное преобразование для двухвходового базиса И-НЕ, то цена схемы и задержка схемы уменьшатся (S_Q=20, T=6т) за счет отсутствия в ней выходного инвертора

Анализ комбинационных схем

По таблице истинности булевой функции выберем наборы аргументов (входных переменных), на кото-рых функция принимает значения 0 и 1, например, 01101 и 10101, и определим реакцию построенных схем на эти наборы. Для этого на схеме отмечаются значения входных переменных и далее определяются значения выходных сигналов каждого из логических элементов с учетом функции, реализуемой им. Последовательно продвигаясь по схеме от ее входов к выходу, получим значение выходного сигнала схемы. Сравнив его со значением булевой функции для выбранного набора аргументов по таблице

Синтез многовыходных комбинационных схем

ПРИМЕР 2. Синтезировать комбинационную схему, выполняющую операцию сложения двух двухразрядных двоичных чисел:

$C=A+B$, где $A=(a_1, a_2)$ $B=(b_1, b_2)$ $C=(C_0, C_1, C_2)$.

Закон функционирования синтезируемой схемы описывается системой булевых функций

$$\begin{cases} C_0 = f_0(a_1, a_2, b_1, b_2) \\ C_1 = f_1(a_1, a_2, b_1, b_2) \\ C_2 = f_2(a_1, a_2, b_1, b_2), \end{cases}$$

1. Составление таблицы истинности

Таблица истинности системы булевых функций строится с учетом правил двоичного сложения и представлена в таблице

2. Минимизация булевых функций системы

Для минимизации воспользуемся картами Карно.

$$C_{\min}(C_0) = \begin{Bmatrix} 1X1X \\ 11X1 \\ X111 \end{Bmatrix}$$

$$S^a = 8, \quad S^b = 11$$

a_1	a_2	b_1	b_2	C_0	C_1	C_2
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0