ТЕМА: ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1. Основные понятия

Динамическое программирование (иначе - *динамическое планирование)* - это метод нахождения оптимальных решений в задачах с многошаговой (многоэтапной) структурой. Многие экономические процессы расчленяются на шаги естественным образом. Это все процессы планирования и управления, развивающиеся во времени.

Естественным шагом в них может быть год, квартал, месяц, декада, неделя, день и т. д. Однако метод динамического программирования может использоваться при решении задач, где время вообще не фигурирует; разделение на шаги в таких задачах вводится искусственно. Поэтому "динамика" задач динамического программирования заключается в методе решения.

В экономической практике встречается несколько типов задач, которые по постановке или способу решения относятся к задачам динамического программирования. Это *задачи оптимального перспективного и текущего планирования во времени.*

Их решают либо путем составления комплекса взаимосвязанных статических моделей для каждого периода, либо путем составления единой динамической задачи оптимального программирования с применением многошаговой процедуры принятия решений. К задачам динамического программирования следует отнести задачи многошагового нахождения оптимума при размещении производительных сил, а также оптимального быстродействия.

Рассмотрим несколько типичных задач, для решения которых естественным является применение метода динамического программирования.

Задача перспективного планирования. Планируется деятельность группы N промышленных предприятий $П_i$ (i = 1,…, N) на период в t (t = 1,…, T) хозяйственных лет. В начале периода на развитие системы предприятий выделены какие-то средства K, которые должны быть распределены между предприятиями. В процессе деятельности предприятия вложенные в него средства частично амортизируются.

Каждое предприятие за год приносит доход, зависящий от вложенных средств, часть которого отчисляется в фонд предприятий. В начале каждого хозяйственного года имеющиеся средства перераспределяются между предприятиями. Возникает задача определения объема средств в начале каждого года, которые нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарный чистый доход за T лет был максимальным. Это типичная задача динамического программирования.

Здесь процесс принятия решения разбивается на T шагов. Управление им заключается в начальном распределении и последующих перераспределениях средств $u^t = \{u_i^t\}$, где u_i^t - объем средств, выделенных i-му предприятию в начале t-го года. Для описания динамики системы вводится вектор состояния $\mathrm{x}^t = \{\mathrm{x}_i^t\}$, где x_i^t - состояние i-го предприятия на начало t-го года.

В свою очередь состояние каждого предприятия x_i^t является вектором, компонентами которого служат трудовые ресурсы, основные фонды, финансовое положение и т.д., т.е. $x_i^t = \{ x_{ik}^t \}$. Вектор управления - это функция состояния системы на начало соответствующего года: $u^t = u^t(x^{t-1})$. Начальное состояние системы x° может быть заданным.

Целевой функцией будет суммарная прибыль объединения за *T* лет. Если z^t — прибыль за t-й год, то получим задачу

$$\max Z = \sum_{t=1}^{T} z^t, \quad u \in \Omega,$$

где Ω — область допустимых управлений, или множество экономических возможностей, определяемых различными ограничениями, налагаемыми на состояние системы и вектор управления.

Задача об оптимальном управлении поставками. В различных областях народного хозяйства возникает задача определения момента подачи партии поставки и ее объема. С размещением заказов связаны некоторые фиксированные затраты, не зависящие от величины заказываемой партии, а зависящие только от факта заказа. С содержанием материальных ресурсов связаны затраты, пропорциональные остатку нереализованной продукции на конец интервала.

Пусть T - промежуток планирования. Обозначим через v_t интенсивность потребления ресурса в t-м интервале. Состояние системы будем описывать величиной остатка нереализованной продукции на конец интервала x_t. Начальное x_0 и конечное x_T состояния системы можно считать заданными. Для бесперебойности потребления поставками нужно управлять. Обозначим через $u = \{u_t\}$ вектор управления, координаты которого суть величины поставок в начале соответствующих интервалов.

Очевидно, что вектор управления есть функция состояния на начало интервала. Из множества воз можных управлений требуется выбрать такое, при котором достигается минимум издержек на заказ и содержание материальных ресурсов. Если S_t — издержки содержания единицы продукции в t-м интервале, то функция цели примет вид:

$$\min Z = \sum_{t=1}^{T} (k\delta_t + S_t x_t),$$

2.Особенности задач динамического программирования

1. Рассматривается система, состояние которой на каждом шаге определяется вектором x_t. Дальнейшее изменение ее состояния зависит только от данного состояния x_t и не зависит от того, каким путем система пришла в него. Такие процессы называются *процессами без последействия*.

2. На каждом шаге выбирается одно решение u_t, под действием которого система переходит из предыдущего состояния x_{t-1} в новое x_t. Это новое состояние является функцией состояния на начало интервала x_{t-1} и принятого в начале интервала решения u_t.

3. Действие на каждом шаге связано с определенным выигрышем (доходом, прибылью) или потерей (издержками), которые зависят от состояния на начало шага (этапа) и принятого решения.

4. На векторы состояния и управления могут быть наложены ограничения, объединение которых составляет область допустимых решений u принадлежит Ω.

5. Требуется найти такое допустимое управление u_t для каждого шага t, чтобы получить экстремальное значение функции цели за все T шагов.

Любую допустимую последовательность действий для каждого шага, переводящую систему из начального состояния в конечное, называют *стратегией управления*. Допустимая стратегия управления, доставляющая функции цели экстремальное значение, называется *оптимальной*.

Управление — это воздействие, переводящее систему из начального состояния в конечное. Для многих экономических задач не известно начальное либо конечное состояние, а известна область X_0 или X_T которой эти точки принадлежат. Тогда допустимые управления переводят точки из области X_o в X_T.

Задача динамического программирования геометрически может быть сформулирована следующим образом: найти такую фазовую траекторию, начинающуюся в области X_o и оканчивающуюся в области X_T, для которой функция цели достигает экстремального значения. Если в задаче динамического программирования известны начальное и конечное состояния, то говорят о *задаче с закрепленными концами*. Если известны начальные и конечные области, то говорят о *задаче со свободными концами*.