

# НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ



- Наряду с параметрическими критериями для ориентировочной оценки расхождений между выборками (особенно небольшими) применяются так называемые непараметрические критерии, ориентированные в первую очередь на исследование соотношений рангов исходных значений вариант. *Ранг* – это число натурального ряда, которым обозначается порядковый номер каждого члена упорядоченной совокупности вариант. Эта замена позволяет сравнивать выборки как по количественным, так и по качественным признакам, значения которых не имеют числового представления, но которые можно ранжировать. Конструкции непараметрических критериев отличаются простотой.

- Вся процедура состоит из трех этапов – упорядочивание и ранжирование вариантов, подсчет сумм рангов в соответствии с правилами данного критерия, сравнение полученной величины с табличным значением критерия. При этом с параметрическими критериями их роднит общая идеологическая подоплека. Нулевая гипотеза, как правило, состоит в том, что сравниваемые выборки взяты из одной и той же генеральной совокупности, значит, характер распределения вариантов в этих выборках должен быть сходным.

- Поскольку вместо самих значений вариант используются ранги, все непараметрические методы исследуют один вопрос, насколько равномерно варианты разных выборок «перемешаны» между собой. Если варианты разных выборок более или менее регулярно чередуются в общем упорядоченном ряду, значит, они распределены сходным образом и отличий между совокупностями нет. Если же выборки пересекаются не полно (смешиваются только краями распределений, либо одна поглощает другую), то становится ясно, что эти выборки взяты из разных генеральных совокупностей (со смещенными центрами или разными дисперсиями).

# КРИТЕРИЙ U УИЛКОКСОНА - МАННА - УИТНИ

- Этот метод сравнения двух выборок признается наиболее чувствительным и мощным среди прочих непараметрических критериев. Согласно нулевой гипотезе, сравниваемые совокупности имеют одинаковые распределения. Техника метода состоит в том, что все варианты сравниваемых совокупностей ранжируют в одном общем ряду: каждому значению присваивают ранг, порядковый номер. При этом одинаковым (повторяющимся) значениям вариант должен соответствовать один и тот же средний ранг (они как бы «делят места»).

- После этого ранги вариант суммируют отдельно по каждой выборке:

$$R_1 = \sum r_i, R_2 = \sum r_j, i = 1, 2, \dots, n_1, j = 1, 2, \dots, n_2$$

и вычисляют величину критерия:

$$t = \frac{U - 0.5 * n_1 * n_2}{\sqrt{(n_1 * n_2 * \frac{n + 1}{12})}}$$

- где  $U = \max(U_1, U_2)$  – максимальное значение из двух величин:
- $U_1 = n_1 * n_2 + 0.5 * n_1(n_1 + 1) - R_1$
- $U_2 = n_1 * n_2 + 0.5 * n_2(n_2 + 1) - R_2$

- Если выборка достаточно велика ( $n > 20$ ), величина статистики  $t$  сравнивается с табличным значением критерия Стьюдента для  $df = \infty$  и  $\alpha = 0.1$  (т. е. только для верхней 95% области нормального распределения). Считается, что метод хорошо работает для выборок объемом больше 10. В случае с меньшими выборками нужно пользоваться таблицами Уилкоксона – Манна – Уитни .

- В качестве примера сравним 5 и 35 дневных щенков песцов по активности фермента каталазы в сердце ( $E$ ):
- 5 дневные: 41, 44, 31, 38, 43, 29, 71, 45;  $M = 42.6, S = 12.8; n1 = 8$ ;
- 35 дневные: 52, 51, 62, 52, 52, 50, 54, 62, 31;  $M = 51.7, S = 9.0; n2 = 9$ .
- Высокие коэффициенты вариации (30 и 17%) говорят о том, что распределения признаков, скорее всего, не соответствуют нормальному. Поэтому сравнивать средние следует с помощью непараметрического критерия.

- Ранжируем всю совокупность; упорядочим значения выборок по возрастанию:
- $E5$  29 31 38 41 43 44 45 71
- $E35$  31 50 51 52 52 52 54 62 62
- Затем упорядочим все значения вместе, но так, чтобы значения каждой выборки располагались в двух отдельных рядах ( $E5$ ,  $E35$ ). Такое расположение упрощает назначение рангов (ряды  $r5$ ,  $r35$ ) и суммирование рангов ( $R$ ):

$N_0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	$R$
$E_5$	29				31	38	41	43	44	45								71
$E_{35}$	31								50	51	52	52	52	54	62	62		
$r_5$	1		2.5	4	5	6	7	8									17	50.5
$r_{35}$	2.5								9	10	12	12	12	14	15.5	15.5		102.5

- $$U_1 = 9 * 8 + 0.5 * 9 * (9 + 1) - 50.5 = 66.5$$
$$U_2 = 9 * 8 + 0.5 * 8 * (8 + 1) - 102.5 = 5.5$$
$$U = \max (U_1, U_2) = 66.5$$

$$t = \frac{66.5 - 0.5 * 9 * 8}{\sqrt{(9 * 8 * \frac{10}{12})}} = 3.81$$

- Полученное значение (3.81) больше табличного ( $t_{(0.1, \infty)} = 1.65$ , табл. 6П), т. е. активность каталазы с возрастом меняется. Раз выборки малы, воспользуемся точными таблицами Уилкоксона – Манна – Уитни (табл. 11П).

Получаем  $t_{(0.05, n1, n2)} = t_{(0.05, 8, 9)} = 51$ . Полученное значение (66.5) больше табличного (51), следовательно, различия между выборками достоверны.

# КРИТЕРИЙ Q РОЗЕНБАУМА

- Этот критерий, как и предыдущие, оценивает достоверность различий двух эмпирических распределений, но в отличие от них почти не требует вычислений. Сравним два ряда цифр, характеризующих привесы (г) барашков одного возраста при добавлении в корм специальной подкормки (234, 277, 214, 201, 174, 167, 184, 157, 196, 173, 190, 191, 141, 150, 191) и без нее (183, 154, 175, 159, 157, 189, 198, 165, 176, 124, 173, 182, 204, 151, 147). Устанавливаем максимальные (277 и 204) и минимальные (141 и 124) значения и определяем порядковый номер сравниваемых совокупностей. В качестве первой следует принять выборку с *наибольшей* *вариантой* 277.

- Далее находим число значений первой выборки, превышающих максимальное значение второй выборки (204):  $Q_1 = 3$  (это варианты 234, 277, 214). Затем определяем число вариантов второй выборки, уступающих по величине минимальному значению первой выборки (141):  $Q_2 = 1$  (варианта 124). Далее определяем критерий Розенбаума как сумму полученных чисел:  $Q = Q_1 + Q_2 = 3 + 1 = 4$ . По таблице 12П находим критическое значение  $Q_{(0.05, 15, 15)} = 6$ .

- Поскольку эмпирическое значение (4) меньше табличного (6), приходим к выводу об отсутствии достоверного отличия выборок друг от друга, а значит, и влияния подкормки на привесы барашков. Следует все же иметь в виду, что возможности этого метода ограничены, он дает лишь прикидочный результат и оказывается эффективным только в случае сравнительно больших различий между выборками.