$\underline{\text{T2}}$. $F(x,y)=F(x_1,\dots,x_n,y)\in C_1$ в $\Pi^{n+1}_{\tilde\delta,\tilde\Delta}(x^{(0)},y_0)\equiv\{(x,y): |x_i-x_i^{(0)}|<\tilde\delta,$ $i=1,\dots,n; |y-y_0|<\tilde\Delta\}\subset \mathbb{E}_{n+1}$, $F(x^{(0)},y_0)=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x^{(0)},y_0)\neq 0$. Тогда $\exists\, \Pi^{n+1}_{\delta_0,\Delta_0}(x^{(0)},y_0)\subset \Pi^{n+1}_{\tilde\delta,\tilde\Delta}(x^{(0)},y_0)$, где $\exists$ и единств. $y=f(x): F(x,f(x))\equiv 0$ $\forall x\in K^n_{\delta_0}(x^{(0)})$, $f(x^{(0)})=y_0$, $f(x)\in C_1$ в $K^n_{\delta_0}(x^{(0)})$.

Д-во. $\frac{\partial F}{\partial y}(x^{(0)},y_0)\neq 0 \Rightarrow$ (т. о сохр. знака) $\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\neq 0$ в нек-й окр. $(x^{(0)},y_0)$. Пусть эта окр-сть $\Pi^{n+1}_{\tilde\delta,\tilde\Delta}(x^{(0)},y_0)$. Там $F(x,y)$ стр. мон. по y $\Rightarrow$ (по т1) $\Rightarrow$ $\exists$, ед. и непр. $y=f(x)$ в $K^n_{\delta_0}(x^{(0)})$, $F(x,f(x))\equiv 0$, $f(x_0)=y_0$. $\forall x\in K^n_{\delta_0}(x^{(0)})$ $\Delta x=(0,\dots,0,\Delta x_i,0,\dots,0): x+\Delta x\in K^n_{\delta_0}(x^{(0)})$, $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\Rightarrow$

$$0=\underbrace{F(x+\Delta x,y+\Delta y)}_{=0}-\underbrace{F(x,y)}_{=0}=F(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+\Delta x_i,x_{i+1},\dots,x_n,y+\Delta y)-$$
$$-F(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n,y)=(\text{т. Л.},\ 0<\theta<1)=$$
$$=\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+\theta\Delta x_i,x_{i+1},\dots,x_n,y+\theta\Delta y)\Delta x_i+\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+\theta\Delta x_i,x_{i+1},\dots,x_n,y+\theta\Delta y)\cdot\Delta y.$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x_i}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+\theta\Delta x_i,x_{i+1},\dots,x_n,y+\theta\Delta y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+\theta\Delta x_i,x_{i+1},\dots,x_n,y+\theta\Delta y)}.$$ $\Delta x_i\to 0\Rightarrow$ (непр.) $\Rightarrow \Delta y\to 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x_i}=-\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,y):\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$ — непр. ф-я, т.е. $f(x)\in C_1$

Теорема д-зана.

Если надо вычислить все пр-ые, то лучше вычислять дифф-лы.

$\underline{\text{Т3}}\ (\delta/\partial)$ $\forall j = 1, \ldots, m$ $F_j(x, y) = F_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, m) \in C_1$ в $\Pi^{n+m}_{\tilde{\delta}, \tilde{\Delta}}(x^{(0)}, y^{(0)}) \equiv$
$\equiv \{(x, y) : |x - x_i^{(0)}| < \tilde{\delta},\ i = 1, \ldots, n;\ |y_j - y_j^{(0)}| < \tilde{\Delta},\ j = 1, \ldots, m\} \subset \mathbb{E}_{n+m},$

$$F_j(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0, \quad J(x^{(0)}, y^{(0)}) \equiv \left.\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \equiv \left.\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \neq 0.$$
$(j = 1, \ldots, m)$

Тогда $\exists \Pi^{n+m}_{\delta_0, \Delta_0}(x^{(0)}, y^{(0)}) \subset \Pi^{n+m}_{\tilde{\delta}, \tilde{\Delta}}(x^{(0)}, y^{(0)})$, где $\exists$ и единств. $y_j = f_j(x) = f_j(x_1, \ldots, x_n)$:

$$F_j(x, f_1(x), \ldots, f_m(x)) \equiv 0 \ \forall x \in K^n_{\delta_0}(x^{(0)}),\ f_j(x^{(0)}) = y_j^{(0)},\ f_j(x) \in C_1 \text{ в } K^n_{\delta_0}(x^{(0)}).$$
$(j = 1, \ldots, m)$

Здесь также удобнее считать дифференциалы.

Пример. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-t^2=0 \\ x+y+z+t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\,dx+y\,dy+z\,dz-t\,dt=0 \\ dx+dy+dz+dt=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} z\,dz-t\,dt=-x\,dx-y\,dy \\ dz+dt=-dx-dy \end{cases} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} z & -t \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=z+t$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} -x\,dx-y\,dy & -t \\ -dx-dy & 1 \end{vmatrix}=-x\,dx-y\,dy-t\,dx-t\,dy=-(x+t)dx-(y+t)dy$$

$$\Delta_t=\begin{vmatrix} z & -x\,dx-y\,dy \\ 1 & -dx-dy \end{vmatrix}=-z\,dx-z\,dy+x\,dx+y\,dy=(x-z)dx+(y-z)dy$$

$$dz=-\frac{(x+t)dx+(y+t)dy}{z+t},\quad dt=\frac{(x-z)dx+(y-z)dy}{z+t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x+t}{z+t},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y+t}{z+t};\quad \frac{\partial t}{\partial x}=\frac{x-z}{z+t},\quad \frac{\partial t}{\partial y}=\frac{y-z}{z+t}$$

Можно вычислить d^2z, d^2t и т.д.

Зависимость функций

<u>Опр.</u> $y_j = f_j(x) = f_j(x_1, \ldots, x_n) \in C_1$ в обл $E \subset \mathbb{E}_n$ $(j = 1, \ldots, m)$ назыв. зависимыми в E, если $\exists i$, $1 \leq i \leq m$, $\exists \varphi(u_1, \ldots, u_{m-1}) \in C_1$:

$y_i = \varphi(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_m)$, т.е. $\forall x \in E$ $f_i(x) = \varphi(f_1(x), \ldots, f_{i-1}(x), f_{i+1}(x), \ldots, f_m(x))$

Частный случай – линейная зависимость, где

$$\varphi(u_1, \ldots, u_{m-1}) = \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k u_k = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{m-1} u_{m-1}$$

Зависимость функций

<u>Опр.</u> $y_j = f_j(x) = f_j(x_1, \dots, x_n) \in C_1$ в обл $E \subset \mathbb{E}_n$ $(j = 1, \dots, m)$ назыв. зависимыми в E, если $\exists i$, $1 \le i \le m$, $\exists \varphi(u_1, \dots, u_{m-1}) \in C_1$:

$y_i = \varphi(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_m)$, т.е. $\forall x \in E$ $f_i(x) = \varphi(f_1(x), \dots, f_{i-1}(x), f_{i+1}(x), \dots, f_m(x))$

Частный случай – линейная зависимость, где

$$\varphi(u_1, \dots, u_{m-1}) = \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k u_k = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{m-1} u_{m-1}$$

Пример: $y_1 = f_1(x) \equiv 1$, $y_2 = f_2(x) = \cos x$, $y_3 = f_3(x) = \sin x$

Они зависимы $\varphi(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2$, $f_1(x) = f_2^2(x) + f_3^2(x)$

А лин. зав. нет. Пусть $\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = 0$, т.е. $\alpha \cdot f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) \equiv 0$

$\alpha + \beta \cos x + \gamma \sin x \equiv 0 \longrightarrow \alpha = 0$

$-\beta \sin x + \gamma \cos x \equiv 0$

$-\beta \cos x - \gamma \sin x \equiv 0$

$$\begin{array}{l|l} \beta \cos x + \gamma \sin x \equiv 0 & \cdot (\cos x) \\ -\beta \sin x + \gamma \cos x \equiv 0 & \cdot (-\sin x) \end{array} + \Rightarrow \beta = 0$$

$$\gamma \sin x \equiv 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

Далее считаем $m \le n$.
Введём матрицу
$JF'(x)$:

$$JF'(x) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_j} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$ – матрица Якоби

<u>Т1</u>. $y_j = f_j(x)$ $(j=1,\dots,m;\ m\le n)$ зависима в обл $E \subset \mathbb{E}_n \Rightarrow$ все миноры m-го порядка $JF'(x)$: они $\equiv 0$ в E, т.е. $\operatorname{Rang} JF'(x) < m$ $\forall x \in E$

Д-во. $\exists\, \varphi(u_1,\dots,u_{m-1}) \in C_1$: $y_i = \varphi(y_1,\dots,y_{i-1},y_{i+1},\dots,y_m)$, т.е.

$f_i(x) \equiv \varphi(f_1(x),\dots,f_{i-1}(x),f_{i+1}(x),\dots,f_m(x))$ $\forall x\in E$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_{i-1}}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_{m-1}}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_j} \quad (j=1,\dots,n)$$

$\Rightarrow$ i-я строка $JF'(x)$ – лин. комбинация остальных. Т. доказана.

Далее считаем $m \le n$.
Введём матрицу $JF(x)$:

$$JF(x) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_j} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$ – матрица Якоби

<u>Т1.</u> $y_j = f_j(x)$ $(j=1,\dots,m;\ m\le n)$ зависима в обл $E \subset \mathbb{E}_n \Rightarrow$ все миноры m-го порядка $JF(x)$: они $\equiv 0$ в E, т.е. $\operatorname{Rang} JF(x) < m$ $\forall x \in E$

Д-во. $\exists\, \varphi(u_1,\dots,u_{m-1}) \in C_1$: $y_i = \varphi(y_1,\dots,y_{i-1},y_{i+1},\dots,y_m)$, т.е.

$f_i(x) \equiv \varphi(f_1(x),\dots,f_{i-1}(x),f_{i+1}(x),\dots,f_m(x))$ $\forall x \in E$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_{i-1}}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_{m-1}}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_j} \quad (j=1,\dots,n)$$

$\Rightarrow$ i-я строка $JF(x)$ – лин. комбинация остальных. Т. доказана.

<u>Т2.</u> (б/д) $y_j = f_j(x)$ $(j=1,\dots,m;\ m\le n)$ $f_j(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$. Если $\forall x \in E$ $\operatorname{Rang} JF(x) = s < m$, то $\exists$ обл. $G \subset E$, в которой s функций независимы, а остальные зависимы от них.

Пример. $y_1 = f_1(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$y_2 = f_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ $\qquad n \geqslant 3$

$y_3 = f_3(x) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_2 x_n + \dots + x_{n-1} x_n$

$$JF(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & \dots & 2x_n \\ x_2 + x_3 + \dots + x_n & x_1 + x_3 + x_4 + \dots + x_n & \dots & x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Rang}\, JF(x) = 2$, $\Rightarrow$ 2 ф-ии незав., а третья выражается через них

$y_3 = \dfrac{y_1^2 - y_2}{2}$, т.е. $y_2 = y_1^2 - 2y_3$