Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Оренбургский государственный университет»
Кафедра прикладной математики

И.Г. Руцкова

Предел и непрерывность функции

Электронный курс лекций «Математический анализ», часть 3

Оренбург 2017

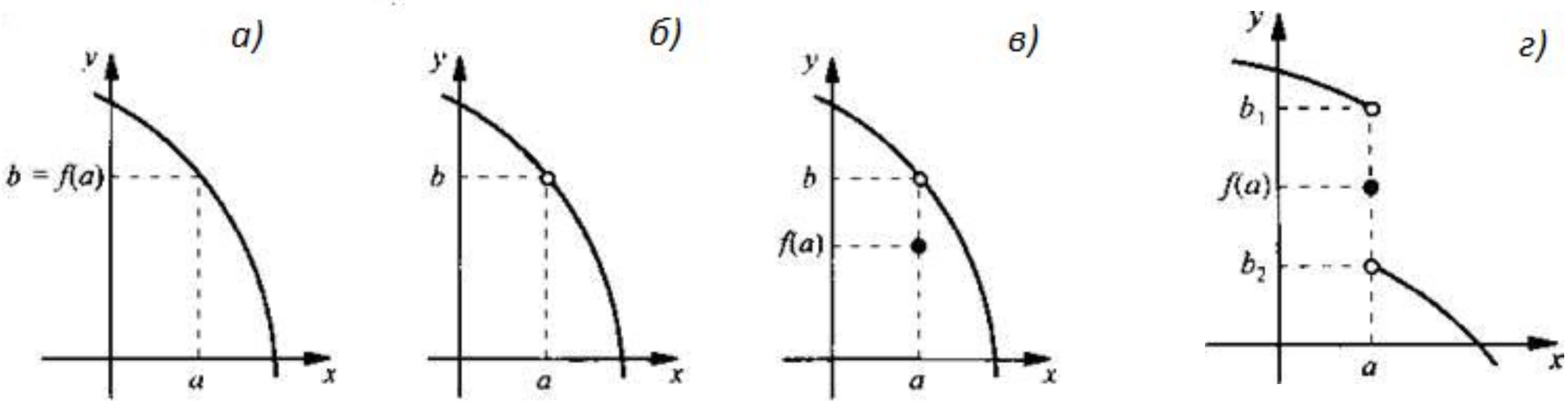


Рисунок 1

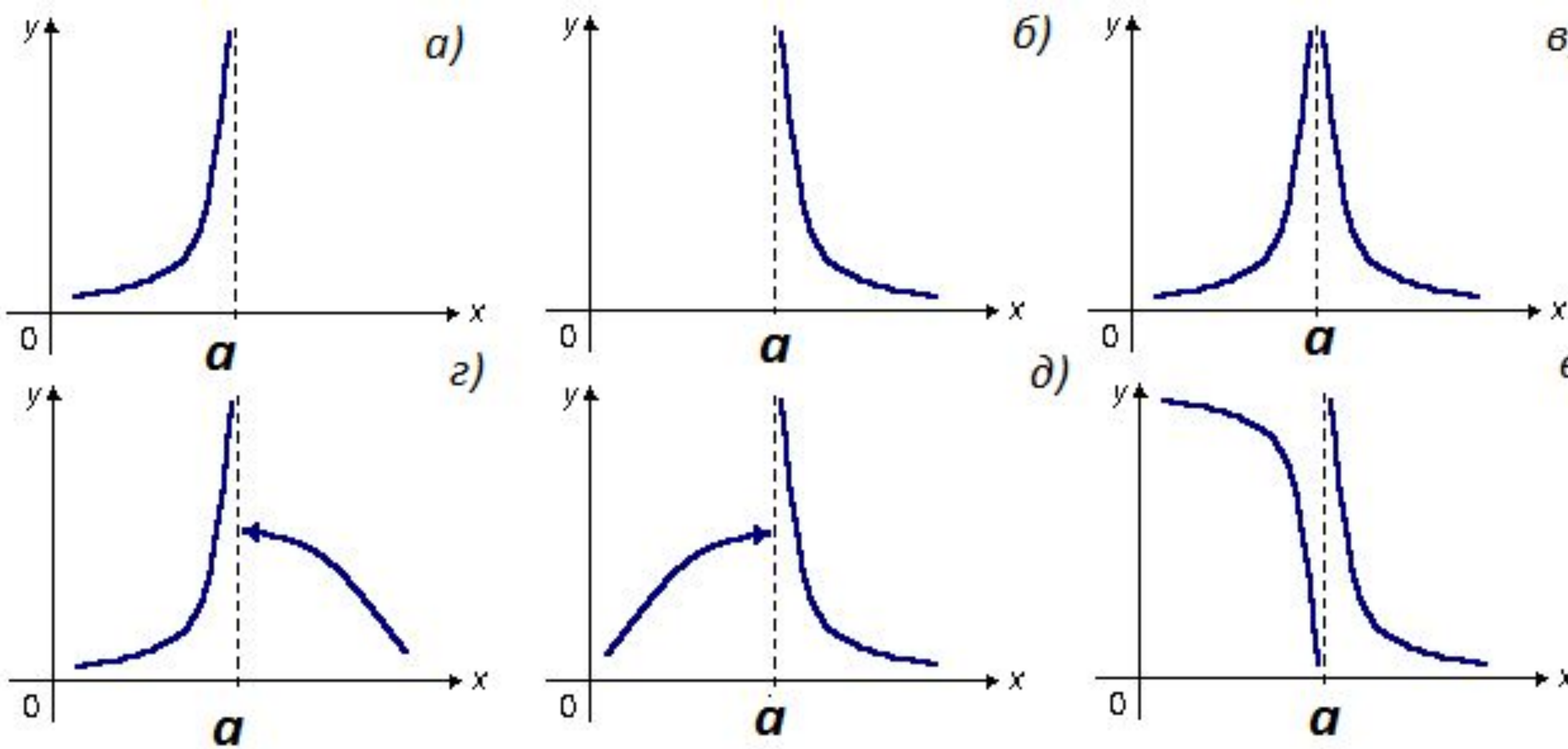
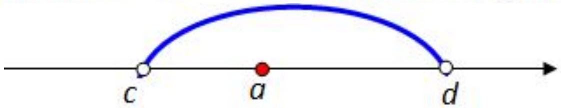


Рисунок 2

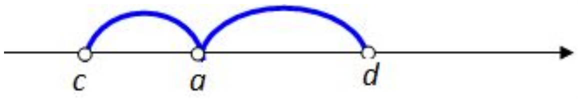
Термины и обозначения

Определение 1. *Окрестностью точки a,* называется любой интервал $(c;d)$, содержащий точку a.



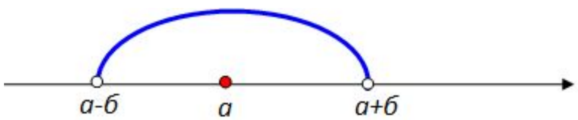
Обозначение: $U(a)=(c;d), \quad c<a<d$.

Определение 2. *Проколотой окрестностью точки a,* называется множество, которое получается после выбрасывания a из окрестности точки a, т.е. $U(a)\setminus\{a\}$.



Обозначение: $\overset{\circ}{U}(a)=U(a)\setminus\{a\}=(c;a)\cup(a;d)$.

Определение 3. *δ - окрестностью точки a,* называется интервал $(a-\delta;a+\delta)$.



Обозначение: $U_\delta(a)=(a-\delta;a+\delta)$.

Определение 4. *Проколотой δ - окрестностью точки a,* называется множество, которое получается после выбрасывания a из δ - окрестности точки a, т.е. $U_\delta(a)\setminus\{a\}$.

Обозначение: $\overset{\circ}{U}_\delta(a)=(a-\delta;a)\cup(a;a+\delta)$.

Предел функции при $x \to a$

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$, т.е. она определена в точках некоторого интервала $(c;d)$, за исключением, быть может, самой точки a.

Определение 5. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* x *стремящемся к* a, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется положительное число δ, зависящее от ε, такое что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Обозначения: $A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ или $f(x)\to A$, $x\to a$.

Определение 6. (символическая запись определения 5)

$$A=\lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \;\exists\; \delta(\varepsilon)>0: |f(x)-A|<\varepsilon, \;\forall\; x: 0<|x-a|<\delta.$$

Замечание. В тех случаях, когда условия определений 5 – 6 не выполняются, т.е. найдется $\varepsilon>0$, такое, что для любого $\delta>0$ найдется x_0, удовлетворяющее условию $0<|x_0-a|<\delta$, для которого $|f(x_0)-A|\geq\varepsilon$, говорят, что число A не является пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a. Обозначение, используемое в этом случае, имеет вид: $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq A$.

Предел функции в точке

$$0<|x-a|<\delta \quad \Leftrightarrow \begin{cases} |x-a|<\delta, \\ x\neq a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\delta<x-a<\delta, \\ x\neq a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-\delta<x<a+\delta, \\ x\neq a. \end{cases}$$

$$\boxed{0<|x-a|<\delta \Leftrightarrow x\in \mathring{U}_{\delta}(a)}$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon\leq f(x)-A\leq\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad A-\varepsilon\leq f(x)\leq A+\varepsilon$$

$$\boxed{|f(x)-A|<\varepsilon \;\Leftrightarrow\; f(x)\in U_{\varepsilon}(A)}$$

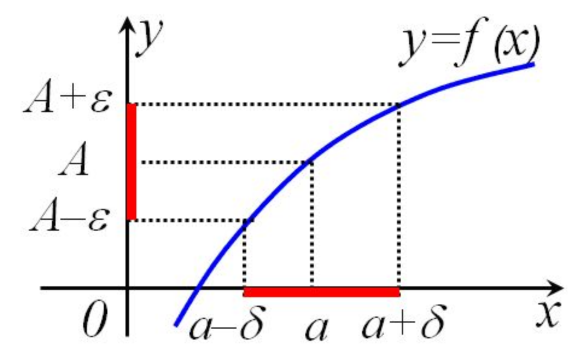
Определение 7. Число A называется пределом функции $f(x)$ при *x, стремящимся к a*, если для любой сколь угодно малой ε - окрестности точки A найдется проколотая δ - окрестность точки a, такая что для всех x из этой окрестности, значения функции $f(x)$ принадлежат ε - окрестности точки A.

Определение 8. (символическая запись определения 7).

$$A=\lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \;\forall\; U_{\varepsilon}(A)\;\exists \mathring{U}_{\delta}(a):\quad f(x)\in U_{\varepsilon}(A),\;\forall x\in \mathring{U}_{\delta}(a).$$

Определение 9.

$$A=\lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \;\forall\; \varepsilon>0\;\exists\,\delta(\varepsilon)>0:\quad |f(x)-A|<\varepsilon,\;\forall x\in \mathring{U}_{\delta}(a).$$



Свойства функций, имеющих предел в точке

Теорема 1 *(о единственности существования предела).* Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то он единственный.

Доказательство. Применим метод от противного.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to a} f(x) = B, \qquad A < B$$

$$0 < \varepsilon < \frac{B-A}{2} \qquad U_\varepsilon(A) \cap U_\varepsilon(B) = \varnothing$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \;\Rightarrow \exists\; \delta_1(\varepsilon): f(x) \in U_\varepsilon(A),\; \forall\; x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(a)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = B \;\Rightarrow \exists\; \delta_2(\varepsilon): f(x) \in U_\varepsilon(B),\; \forall\; x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(a)$$

$$\delta(\varepsilon) = min\{\delta_1(\varepsilon); \delta_2(\varepsilon)\}$$

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \qquad \begin{cases} f(x) \in U_\varepsilon(A), \\ f(x) \in U_\varepsilon(B); \end{cases} \qquad f(x) \in U_\varepsilon(A) \cap U_\varepsilon(B)$$

Противоречие!

Свойства функций, имеющих предел в точке

Теорема 2 *(о локальной ограниченности функции, имеющей предел).* Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a, т.е. $\exists \ C > 0, \ \delta > 0 : |f(x)| \leq C, \ \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \ A \in R$.

$$A = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 : |f(x) - A| < \varepsilon, \ \forall \ x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$$

Пусть $\varepsilon = 1$

$$\exists \ \delta(1) : |f(x) - A| < 1, \ \forall \ x \in \overset{\circ}{U}_{\delta(1)}$$

$$|a| - |b| \leq |a - b|, \quad \forall a, b \in R$$

$$|f(x)| - |A| \leq |f(x) - A| < 1, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta(1)}(a);$$

$$|f(x)| - |A| < 1, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta(1)}(a);$$

$$|f(x)| < |A| + 1, \ \ \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta(1)}(a);$$

$$C = |A| + 1$$

Следствие 1. Если функция $f(x)$, имеющая предел при $x \to a$, будет определена в $U(a)$, то $\exists \ C > 0, \ \delta > 0 : |f(x)| \leq C, \ \ \forall x \in U_\delta(a)$.

Доказательство.

$$C = max\{|A| + 1; |f(a)|\}$$

Свойства функций, имеющих предел в точке

Теорема 3 *(об ограниченности снизу абсолютной величины функции, имеющей ненулевой предел).*

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,\ A\in R\setminus\{0\}$, то $\exists\ \delta(A)>0:\ \ |f(x)|>\dfrac{|A|}{2},\ \ \forall x\in \overset{\circ}{U}_{\delta(A)}(a)$.

<u>Доказательство.</u> Изучите самостоятельно

Следствие 2. *(о стабилизации знака у функций, имеющих ненулевой предел).* Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,\ A\in R\setminus\{0\}$, то $\exists\,\delta(A)$:

1) при $A>0$ $\quad \dfrac{A}{2}<f(x)<\dfrac{3A}{2},\quad \forall x\in \overset{\circ}{U}_{\delta(A)}(a)$;

2) при $A<0$ $\quad \dfrac{3A}{2}<f(x)<\dfrac{A}{2},\quad \forall x\in \overset{\circ}{U}_{\delta(A)}(a)$.

<u>Доказательство.</u> Изучите самостоятельно

Свойства функций, имеющих предел в точке

Теорема 4 *(о переходе к пределу в неравенстве).*

Если $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = B, \\ f(x) \le g(x), \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(a); \end{cases}$ то $A \le B$.

Доказательство. Изучите самостоятельно

Теорема 5 *(о пределе промежуточной функции).*

Если $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = A, \\ f(x) \le \varphi(x) \le g(x), \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(a); \end{cases}$ то $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = A$.

Доказательство. Изучите самостоятельно

Свойства функций, имеющих предел в точке

Теорема 6 *(о пределе суммы, разности, произведении и частном двух функций).*

Если $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B; \end{cases}$ то 1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B;$

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x)) = A-B;$ 3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B;$ 4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(\ )} = \dfrac{A}{B},\quad B\neq 0.$

Доказательство. Изучите самостоятельно

Следствие 3. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то $\forall C\in R \quad \lim\limits_{x\to a}(C\cdot f(x)) = C\cdot A$.

Доказательство. Докажите самостоятельно

Следствие 4. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то $\forall к\in N \quad \lim\limits_{x\to a}(f(x))^k = A^k$.

Доказательство. Докажите самостоятельно

Односторонние пределы функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a;b)$.

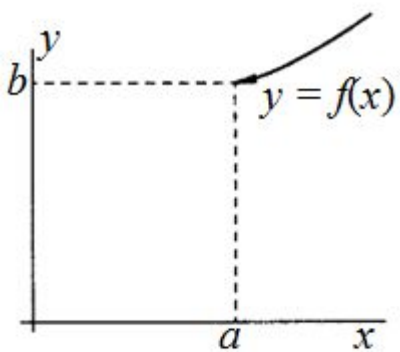
Определение 10. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* x *стремящемся к* a *справа,* если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется положительное число δ, зависящее от ε, такое что для всех x, удовлетворяющих условию $x \in (a; a+\delta)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

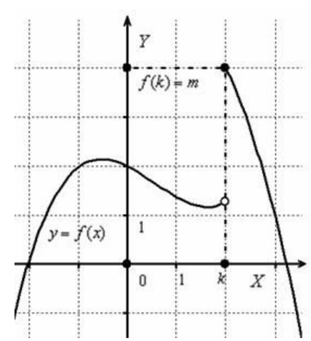
Обозначения: $A = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(x) \to A, \quad x \to a+0.$

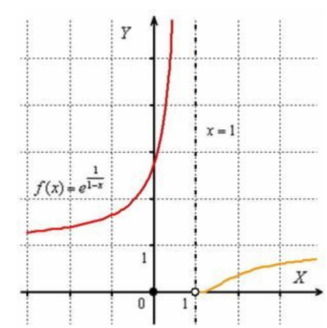
$$\boxed{f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x)}$$

Определение 11. (символическая запись определения 10)

$$A = \lim_{x \to a+0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \; \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - A| < \varepsilon, \; \forall \;\; x \in (a; a+\delta).$$







Односторонние пределы функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(c; a)$

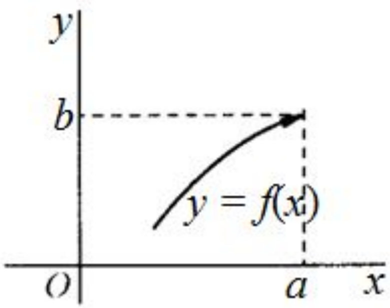
Определение 12. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* x *стремящемся к a слева,* если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется положительное число δ, зависящее от ε, такое что для всех x, удовлетворяющих условию $x \in (a-\delta; a)$, выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$.

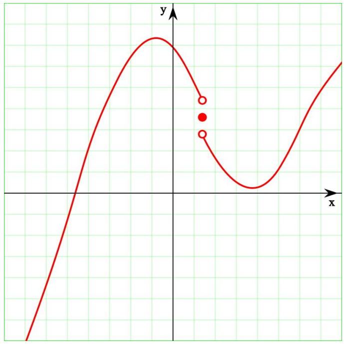
Обозначения: $A = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $f(x) \to A,\ \ x \to a-0$

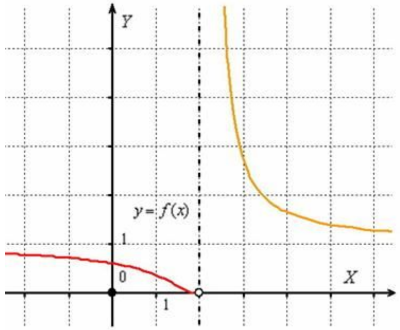
$$\boxed{f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x)}$$

Определение 13. (символическая запись определения 12)

$$A = \lim_{x \to a-0} f(x) \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - A| < \varepsilon, \ \forall \ x \in (a - \delta; a).$$







Односторонние пределы функции в точке

Теорема 7 (критерий существования предела функции в точке)

$$\exists A \in R: \lim_{x\to a} f(x) = A, A \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A, \\ \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A. \end{cases}$$

<u>***Доказательство.***</u> 1) *(Необходимость)*. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$$

$$\overset{\circ}{U}_\delta(a) = (a-\delta; a) \cup (a; a+\delta)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \quad \forall x \in (a; a+\delta) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \quad \forall x \in (a-\delta; a) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = A$$

2) *(Достаточность)*. Пусть $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A, \\ \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A. \end{cases}$ Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A \quad \Rightarrow \quad \exists \delta_1(\varepsilon) > 0: \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \quad \forall x \in (a; a+\delta_1);$$

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A \quad \Rightarrow \quad \exists \delta_2(\varepsilon) > 0: \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \quad \forall x \in (a-\delta_2; a);$$

$$\delta = min\{\delta_1(\varepsilon); \delta_2(\varepsilon)\}$$

$$\forall x \in (a-\delta; a) \cup (a; a+\delta) = \overset{\circ}{U}_\delta(a) \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

В силу произвольности выбора ε, результат будет справедлив для любого $\varepsilon > 0$.

Замечание. Функции, имеющие предел при $x \to a+0$ или при $x \to a-0$, обладают теми же свойствами, что и функции, имеющие предел при $x \to a$. Только эти свойства выполняются не в проколотой окрестности точки a, на интервалах, где точка a является соответственно левым или правым концом интервала.

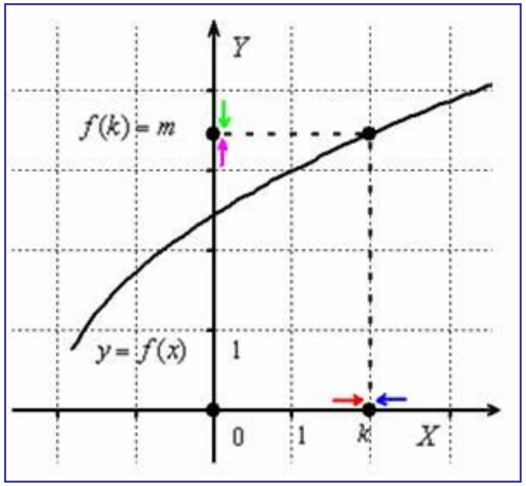
Непрерывные функции

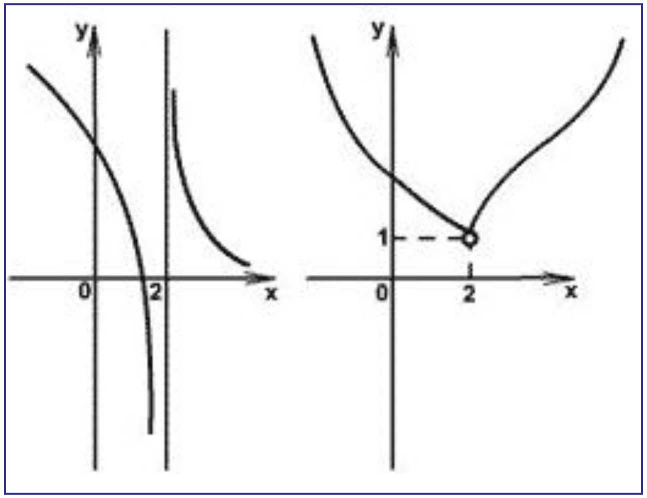
Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(a)$.

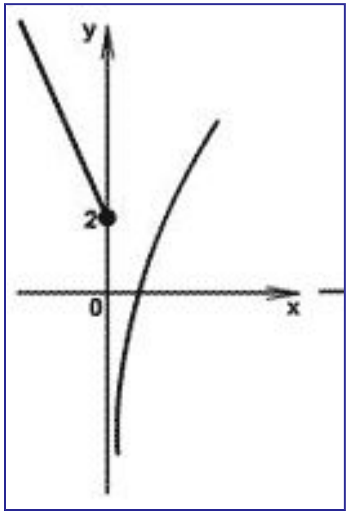
Определение 14. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Обозначение: $f(x) \in C(a)$.

Определение 15.
$f(x) \in C(a) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon, \quad \forall x: |x - a| < \delta$.







Задание 7. Докажите, что если $f(x) = C$, $C \in R$, $\forall x \in U(a)$, то $f(x) \in C(a)$.

Непрерывные функции

Теорема 8 *(о непрерывности суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций)*.

Если функции $f(x),\ g(x) \in C(a)$, то

1) $\varphi(x) = f(x) + g(x) \in C(a)$; 2) $\varphi(x) = f(x) - g(x) \in C(a)$;

3) $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x) \in C(a)$; 4) $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \in C(a),\ g(a) \neq 0$.

Доказательство.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),\quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

1) $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = f(a) + g(a) = \varphi(a) \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) \in C(a)$

2) $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = f(a) - g(a) = \varphi(a) \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) \in C(a)$

3) $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = f(a) \cdot g(a) = \varphi(a) \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) \in C(a)$

4) $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)} = \varphi(a), \mathrm{g(a)} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) \in C(a)$

Следствие 5.

Если $f(x) \in C(a)$, то

1) $\forall C \in R \quad \varphi(x) = C \cdot f(x) \in C(a)$;

2) $\forall k \in N \quad \varphi(x) = (f(x))^k \in C(a)$.

Следствие 6.

Если $f_i(x) \in C(a), i = 1,2,\ldots,n$, то

1) $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) \in C(a)$;

2) $\varphi(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x) \in C(a)$.

Непрерывные функции

Теорема 9 (о непрерывности композиции двух непрерывных функций)

Пусть $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Если $f(x) \in C(a)$, $g(y) \in C(b)$, $b = f(a)$, то $F(x) = g(f(x)) \in C(a)$.

Доказательство. Изучите самостоятельно.

Следствие 7. Если $f(x) \in C(a)$, $g(y) \in C(b)$, $b = f(a)$, то

1) $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g\left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)$;

2) $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = \lim\limits_{y \to b} g(y)$, $y = f(x)$.

Замечание. Правила остаются справедливыми и тогда, когда функции $f(x)$ и $g(y)$ не являются непрерывными в соответствующих точках, а лишь существуют $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{y \to b} g(y)$, причем $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

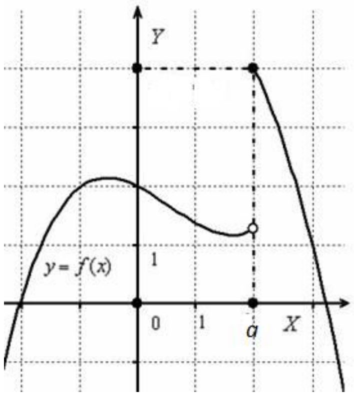
Односторонняя непрерывность функции в точке

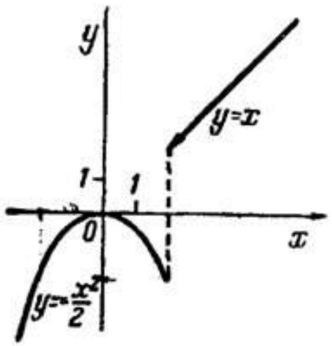
Пусть функция $f(x)$ определена на $[a:b)$.

Определение 16. Функция $f(x)$ называется *непрерывной справа в точке* a, если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$. ***Обозначение:*** $f(x)\in C(a+0)$.

Пусть функция $f(x)$ определена на $(c:a]$.

Определение 17. Функция $f(x)$ называется *непрерывной слева в точке* a, если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a)$. ***Обозначение:*** $f(x)\in C(a-0)$.





Теорема 10 (о связи непрерывности функции в точке с односторонней непрерывностью функции в точке).

$$f(x)\in C(a) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x)\in C(a+0), \\ f(x)\in C(a-0). \end{cases}$$

Доказательство. Проведите самостоятельно.

Непрерывность простейших (основных) элементарных функций

Определение. Функции $y = C,\ C \in R$, $y = x^{\alpha},\ \alpha \in R$, $y = a^{x},\ a \in R_{+}$, $y = \log_a x,\ a \in R_{+} \setminus \{1\}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$ называются *основными* или простейшими *элементарными* функциями.

Теорема 11 *(о непрерывности основных (простейших) элементарных функции).* Все основные элементарные функции ($y = C, C \in R$; $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$; $y = a^{x}, a \in R_{+} \setminus \{1\}$; $y = \log_a x, a \in R \setminus \{1\}$; $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = tgx$; $y = ctgx$; $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = arctgx$; $y = arcctgx$) непрерывны в каждой точке своей области определения (в граничных точках речь идет об односторонней непрерывности).

Доказательство. С доказательством данной теоремы можно ознакомиться в учебнике Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 2-томах. М: Высшая школа, 1981, т.1. – С.131 – 140.

Непрерывность элементарных функций

Определение. Функция, которая может быть явным образом задана с помощью формулы, содержащей лишь конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций, *называется элементарной функцией.*

Примеры: $y = |x| = \sqrt{x^2}$, $\quad y = tg(ln\, x)$

Теорема 12 *(о непрерывности элементарных функций).* Все элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения (в граничных точках речь естественно идет об односторонней непрерывности).

Доказательство.

Справедливость данного утверждения следует из определения элементарной функции, как функции, получающейся с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций, и теорем 11, 8 и 9.

Некоторые практические правила вычисления предела функции в точке

1) Если $f(x)$ - элементарная функция и $a \in D(f)$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Если точка a – граничная точка области определения, то естественно, что речь может идти только о соответствующем одностороннем пределе.

2) Если $f(x)$ - элементарная функция и $a \notin D(f)$, то в тех случаях, когда это возможно, функцию $f(x)$ заменяют функцией $\tilde{f}(x)$: $f(x) = \tilde{f}(x), \forall x \in \mathring{U}(a)$ и $\tilde{f}(x) \in C(a)$, в этом случае $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(a)$. В случае вычисления односторонних пределов совпадение функций должно быть на некоторых промежутках $[a; b)$ или $(c; a]$, и функция $\tilde{f}(x)$ должна быть соответственно непрерывной справа или слева в соответствующей точке.

3) Кроме того, в случаях когда $f(x)$ - элементарная функции и $a \notin D(f)$, при вычислении пределов могут быть использованы свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций

Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства

Пусть функция $f(x)$ определена в $\overset{\circ}{U}(a)$.

Определение 18. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, т.е. если $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ |f(x)|<\varepsilon,\ \ \forall x\in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$.

Теорема 13 *(о представлении функции, имеющей ненулевой предел)*

$$\lim_{x\to a} f(x)=A,\ A\neq 0 \ \Leftrightarrow\ \exists\ \ \alpha(x):\ \begin{cases}\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0,\\ f(x)=A+\alpha(x),\quad \forall x\in\overset{\circ}{U}(a).\end{cases}$$

Доказательство. Проведите самостоятельно.

Теорема 14 *(о произведении бесконечно малой функции на локально ограниченную функцию)*

Функция, представляющая собой произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции на функцию, ограниченную в некоторой проколотой окрестности точки a, является бесконечно малой при $x \to a$ функцией; т.е. если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $|g(x)|\le C$, $C\in R_{+}$, $\forall x\in\overset{\circ}{U}(a)$, то $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=0$.

Доказательство. Проведите самостоятельно.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства

Следствие 8. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, то

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=0$; 2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=0$; 3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=0$.

Доказательство. Проведите самостоятельно.

Используя метод математической индукции легко доказать, что утверждения 1) -2) следствия 8 остаются справедливыми для любого конечного числа слагаемых, а утверждения 3) для любого конечного числа сомножителей.

Замечание. Функция, представляющая собой частное двух бесконечно малых при $x\to a$ функций, может оказаться как имеющей, так и не имеющей предела функцией. Результат зависит от конкретного способа задания данных функций. Поэтому частное двух бесконечно малых при $x\to a$ иногда называют *неопределенностью вида* «$\frac{0}{0}$».

Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства

Определение 19. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если для любого сколь угодно большого положительного числа M можно указать положительное число δ, зависящее от M, такое что всех x, удовлетворяющих условию: $0<|x-a|<\delta$, выполняется свойство $|f(x)|>M$.

Обозначения: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$; или $f(x)\to\infty$, $x\to a$.

Определение 20 (символический вариант)

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M>0 \ \exists\delta(M)>0: |f(x)|>M, \quad \forall x\in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a).$$

Теорема 15 *(о произведении бесконечно большой функции на функцию, абсолютная величина значений которой ограничена снизу положительным числом).*

Функция, представляющая собой произведение бесконечно большой при $x\to a$ функции на функцию, абсолютная величина значений которой ограничена снизу положительным числом для всех x из некоторой проколотой окрестности точки a, является бесконечно большой при $x\to a$ функцией; т.е. если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $|g(x)|\geq C$, $C\in R_{+}$, $\forall x\in \overset{\circ}{U}(a)$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\infty$.

<u>Доказательство.</u> Проведите самостоятельно.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства

Следствие 9 *(о произведении бесконечно большой функции на функцию, имеющую ненулевой предел).*

Функция, представляющая собой произведение бесконечно большой при $x \to a$ функции на функцию, имеющую ненулевой предел, является бесконечно большой функцией; т.е. если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A, A \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \infty$.

Доказательство. Проведите самостоятельно.

Теорема 16 *(о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций)*

1) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $f(x) \neq 0, \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

2) Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Доказательство. Проведите самостоятельно.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства

Определение 20 *(символический вариант)*

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0 \;\; \exists \delta(M) > o: \quad f(x) > M, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a).$$

Определение 21 *(символический вариант)*

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0 \;\; \exists \delta(M) > o: \quad f(x) < -M, \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a).$$

Следствие 10. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются при $x \to a$ бесконечно большими функциями одного знака, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ (или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$), то

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = -\infty\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = +\infty\right)$.

Замечание. Функции, представляющие собой разность или частное двух бесконечно больших при $x \to a$ функций одного знака, могут оказаться как имеющими, так и не имеющими предела при $x \to a$ функциями: результат в каждом случае зависит от способа задания соответствующих функций. Данные ситуации соответственно называются *неопределенностями вида* «$\infty - \infty$» *и* «$\dfrac{\infty}{\infty}$».

Следствие 11. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются при $x \to a$ бесконечно большими функциями разного знака, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ (или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$), то

1) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) - g(x)\right) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) - g(x)\right) = -\infty$);

2) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = -\infty$ ($\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = -\infty$).

Замечание. Функции, представляющие собой сумму или частное двух бесконечно больших при $x \to a$ функций разного знака, могут оказаться как имеющими, так и не имеющими предела при $x \to a$ функциями: результат в каждом случае зависит от конкретного способа задания соответствующих функций. Данные ситуации соответственно называются *неопределенностями вида* «$\infty - \infty$» *и* «$\dfrac{\infty}{\infty}$».

Замечание. Понятие бесконечно малых (бесконечно больших) при $x \to a + 0$ $(x \to a - 0)$ функций вводятся аналогично, свойства сохраняются.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства

Теорема 17. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty, \\ \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty. \end{cases}$

Следствие 12. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty, \\ \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = +\infty. \end{cases}$

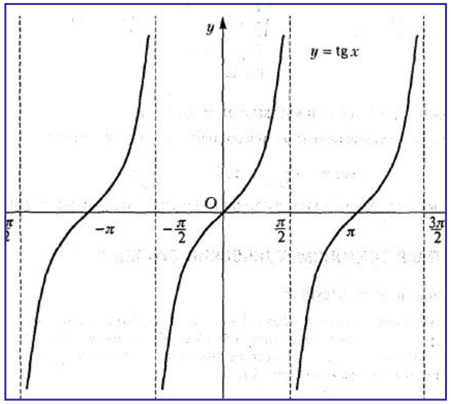
Следствие 13. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = -\infty, \\ \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = -\infty. \end{cases}$

Доказательство. Проведите самостоятельно.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства

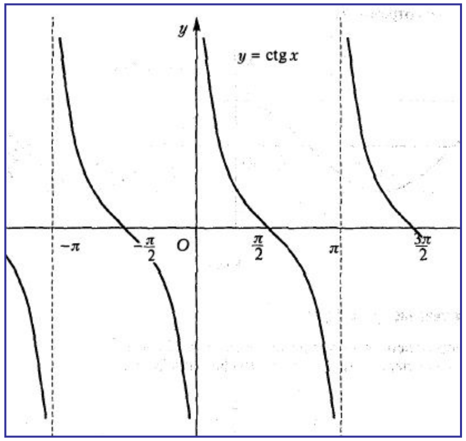
Теорема 18.

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} tgx=+\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} tgx=-\infty$.



Теорема 19.

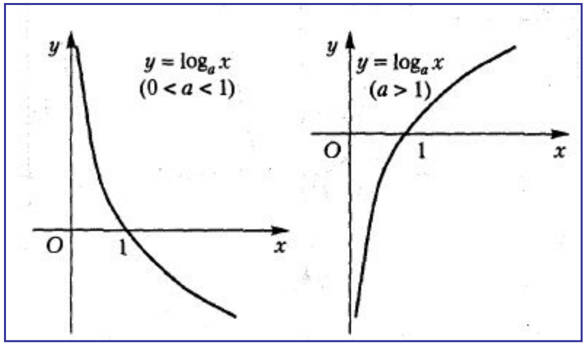
1) $\lim\limits_{x\to 0+0} ctgx=+\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to \pi-0} ctgx=-\infty$.



Теорема 20.

1) $\lim\limits_{x\to 0+0} \log_a x=+\infty,\quad a\in R_+ : 0<a<1;$

2) $\lim\limits_{x\to 0+0} \log_a x=-\infty,\quad a\in R_+ : a>1.$



Доказательство. Проведите самостоятельно.

Список использованных источников

1 http://compendium.su/mathematics/algebra10/38.html
2 http://www.academiaxxi.ru/WWW_Books/HM/Ma/01/02/t.htm
3 https://it.rfei.ru/course/~Eyun/~I8wki7/~OvpMiq
4 http://ru.solverbook.com/spravochnik/predely/odnostoronnie-predely/
5 http://mathprofi.absolom.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html
6 http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1059801
7 http://mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html
8 http://festival.1september.ru/articles/211285/
9 http://math-helper.ru/vyisshaya-matematika/nepreryivnost-i-tochki-razryiva-funktsii-primeryi-praktikum-po-matematicheskomu-analizu-urok-23
10 http://natalibrilenova.ru/blog/1261-elementarnye-funkcii.html