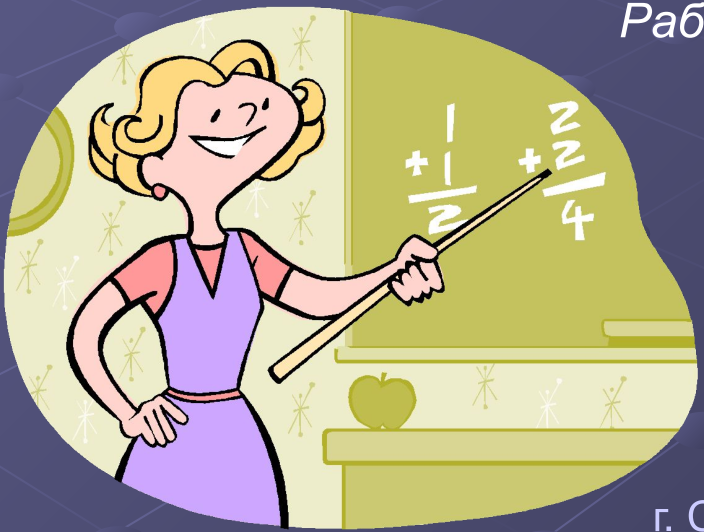
Муниципальное образовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа №44»

Теорема Виета для кубического уравнения.

Работа выполнена учениками 11 «А» класса
Емельяновым Тимофеем и
Вдовенковой Алёной

Крамаренко Елена Андреевна,
учитель математики
высшей категории



г. Саратов
2016 год

Историческая справка

Виет Франсуа родился в 1540 году в Фонте-ле-Конт французской провинции Пуату – Шарант. Отец Виета был юристом (прокурором), а мать (Маргарита Дюпон) происходила из знатной семьи, что облегчило дальнейшую карьеру её сына.

Получив юридическое образование, он с девятнадцати лет успешно занимался адвокатской практикой в родном городе. Он был широко образованным человеком. Знал астрономию и математику и все свободное время отдавал этим наукам.

Но главной страстью Виета была математика.

Виет сделал принципиально новое открытие, поставив перед собой цель изучать не числа, а действия над ними. Виета называют «отцом» алгебры, основоположником буквенной символики. Особенно гордился Франсуа всем известной теперь теоремой о выражении коэффициентов уравнения через его корни.

Виет первый обозначил буквами не только неизвестные, но и данные величины, т.е. коэффициенты соответствующих уравнений

Виет сначала решает задачи в общем виде, и только потом приводит числовые параметры. В общей части он обозначает буквами не только неизвестные, что уже встречалось ранее, но и все прочие параметры, для которых он придумал термин «коэффициенты». Виет использовал для этого только заглавные буквы – гласные для неизвестных, согласные для коэффициентов.

Теорема Виета

Сумма корней приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна коэффициенту p, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену q:

$$x_1 + x_2 = -p \qquad x_1 x_2 = q$$

В общем случае (для неприведенного квадратного уравнения):

$$x_1 + x_2 = -\frac{в}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Особый интерес представляет исследование Виета по составлению уравнений из линейных множителей и по установлению связей между корнями уравнения и его коэффициентами.

Пусть x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$

Перемножим двучлены $(x - x_1)$ и $(x - x_2)$:

$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$,

Тогда, сравнивая с исходным уравнением можно записать систему :

$$\begin{cases} p = -(x_1 + x_2) \\ q = x_1 x_2 \end{cases}$$

Выполняя аналогичные действия для приведенного кубического уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$, считая x_1, x_2, x_3 корнями исходного кубического уравнения, получаем: $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3 - (x_1+x_2+x_3)\, x^2+(x_1x_2+ x_1x_3 + x_2,x_3)x - x_1x_2x_3$

следовательно, имеет место следующая система равенств:

$$\begin{cases} a = -(x_1 + x_2 + x_3), \\ в = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\ c = -x_1x_2x_3 \end{cases}$$

Если x_1, x_2, x_3 - корни неприведённого кубического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, то

$$x_1+x_2+x_3=- b/a$$

$$(x_1*x_2+x_1*x_3+x_2*x_3)= c/a$$

$$x_1*x_2*x_3=-d/a$$

есть суть теоремы Виета для кубического уравнения.

Решить уравнение $x^3-4x^2+x+6=0$.

1 способ: при а=1 свободный член этого уравнения раскладывают на простые множители, затем поочередно выбирают значения «х», равные одному из этих множителей с различными знаками. Эти значения х проверяют, подставляя их в исходное равенство. Таким способом иногда удается найти первый корень кубического уравнения x_1. Для нахождения остальных корней кубического уравнения надо соответствующий многочлен разделить на выражение $(x-x_1)$, при этом в частном получается квадратный трехчлен. Корни получившегося квадратного трехчлена также являются корнями кубического уравнения. Таким образом 6=1*2*3, т.е.корни уравнения могут быть числа 1 или -1,2 или-2,3 или-3. Способом подстановки выясняем, что $x_1=-1$.Разделим многочлен x^3-4x^2+x+6 на $(x+1)$ и получим трехчлен x^2-5x+6, т.е.$x^3-4x^2+x+6=(x+1)*(x^2-5x+6)=0$.

Найдем корни квадратного уравнения $x^2-5x+6=0$ по теореме Виета: $x_1=2$ и $x_2=3$.

Таким образом исходное кубическое уравнение имеет три действительных корня:

$x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=3$.

2 способ: применение теоремы Виета для решения кубического уравнения

Итак, если $x^3-4x^2+x+6=0$,

то $x_1+x_2+x_3=4$

$X_1*x_2+x_1*x_3+x_2*x_3=1$,

$X_1*x_2*x_3=-6$

Методом подбора находим: $(-1)*2*3=-6$

$(-1)+2+3=4$

$(-1)*2+(-1)*3+2*3=1$,

т.е корни уравнения

$x_1=-1, x_2=2, x_3=3$.

Задача: вычислить, используя теорему Виета, сумму квадратов корней уравнения $x^3-6x^2+11x-6=0$

Согласно теореме Виета имеем:

$x_1+x_2+x_3=6$

$x_1*x_2+x_1*x_3+x_2*x_3=11$

$x_1*x_2*x_3=6$

Т.к. $(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1*x_2+x_1*x_3+x_2*x_3)$

то получим $6^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2*11$

$36-22= x_1^2+x_2^2+x_3^2$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=14$

Ответ: 14

Задача: Составить кубическое уравнение, корнями которого являются числа -5;3;4

Решение:

Пусть $x_1=-5$, $x_2=3$, $x_3=4$, тогда

$$\begin{cases} a=-(-5+3+4), \\ в=-5*3+(-5)*4+3*4, \\ c=-(-5)*3*4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-2, \\ в=-23, \\ c=60; \end{cases}$$

А теперь составим приведенное кубическое уравнение вида $x^3+ax^2+bx+c=0$, корнями которого являются -5, 3, 4. Им будет $x^3-2x^2-23x+60=0$

Посвящение теореме Виета:

- По праву достойна в стихах быть воспета

  О свойствах корней теорема Виета.

  Что лучше, скажи постоянства такого:

  Умножишь ты корни - и дробь уж готова:

  В числителе с, в знаменателе а,

  А сумма корней тоже дроби равна

  Хоть с минусом дробь эта, что за беда

  В числителе в, в знаменателе а.

Спасибо за внимание.