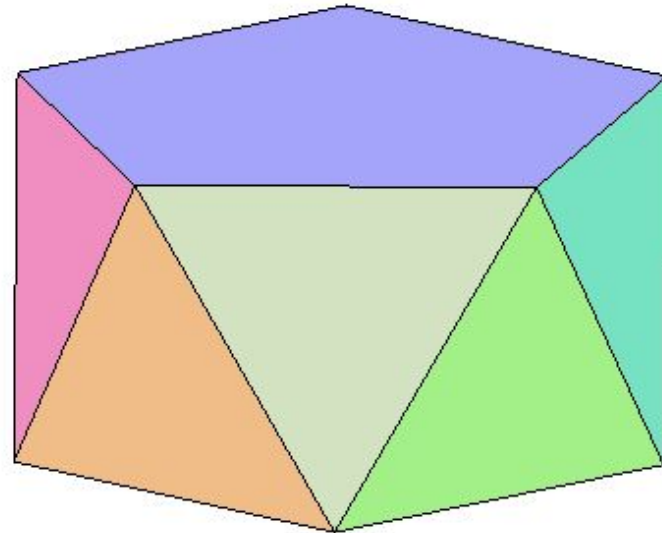
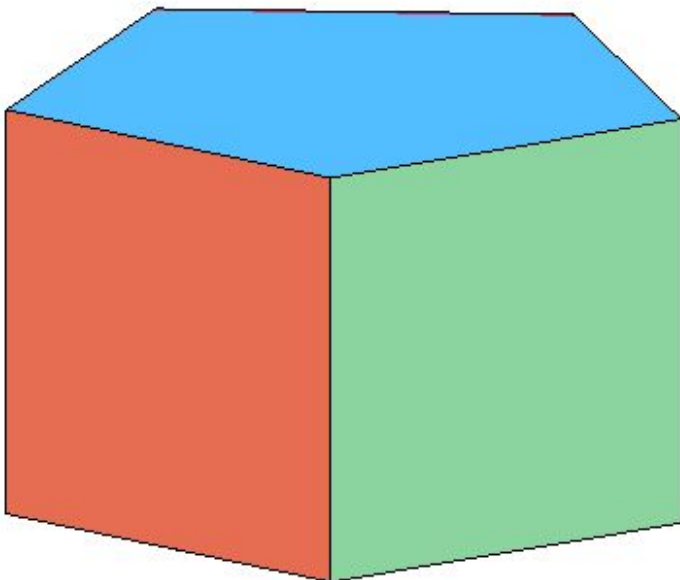


# ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

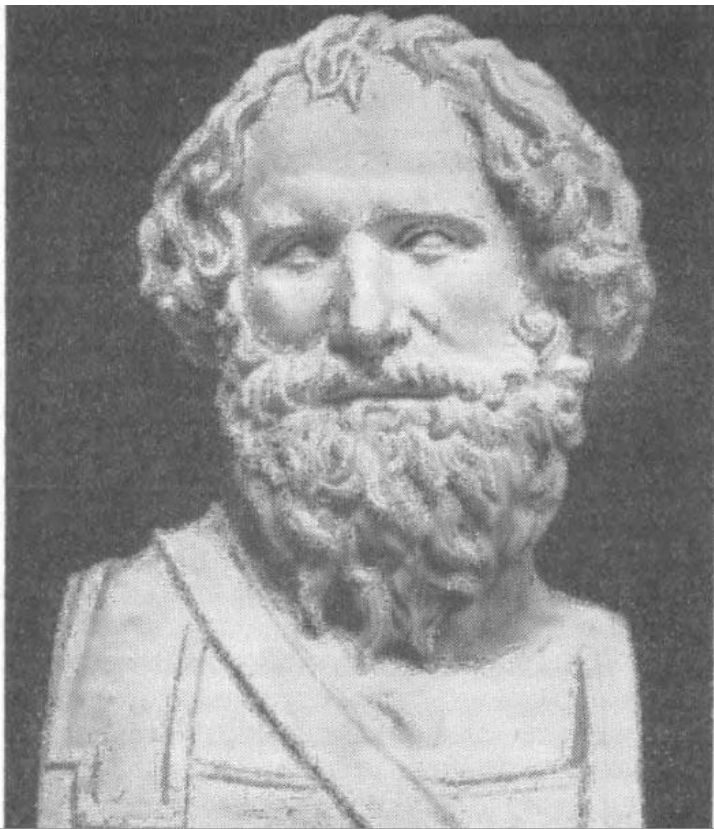
Выпуклый многогранник называется **полуправильным**, если его гранями являются правильные многоугольники, возможно, с разным числом сторон, и все многогранные углы равны, причем один из них в другой можно перевести движением самого многогранника.

К полуправильным многогранникам относятся **правильные  $n$ -угольные призмы**, все ребра которых равны, и, так называемые, **антипризмы** с равными ребрами. На рисунке изображены правильная пятиугольная призма и пятиугольная антипризма.



## ТЕЛА АРХИМЕДА

Кроме этих двух бесконечных серий полуправильных многогранников, имеется еще 13 полуправильных многогранников, которые впервые открыл и описал Архимед (287 – 212 гг. до н. э.) - это **тела Архимеда**.



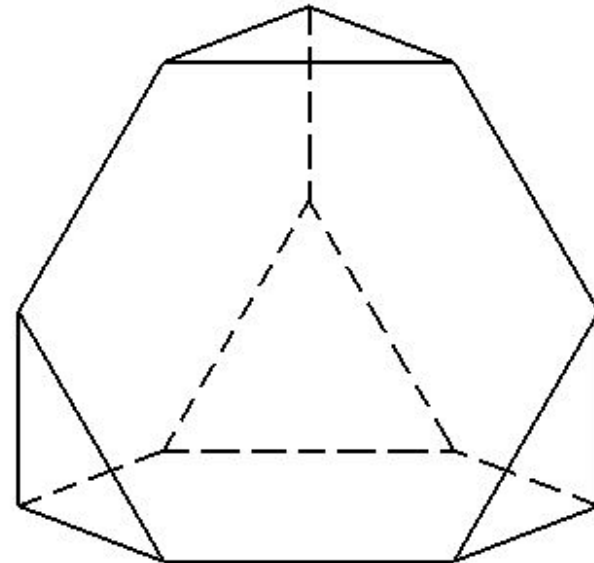
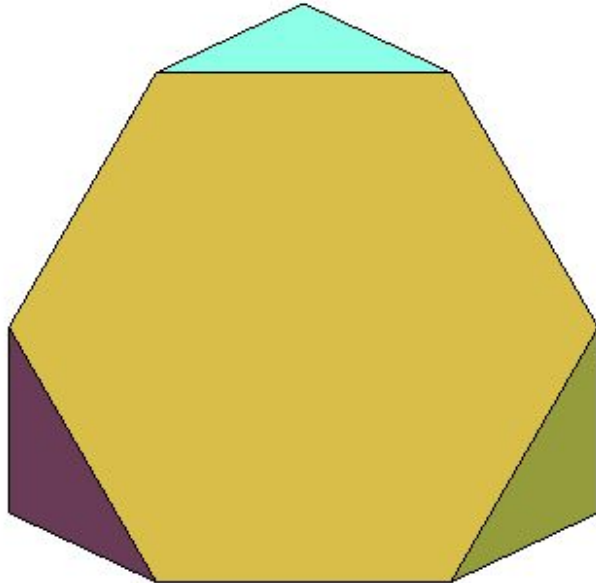
Областью интересов Архимеда была не только математика, но и физика, оптика, астрономия и др. Он был изобретателем многих машин и механизмов, дошедших до наших дней. С помощью изобретенного им метода исчерпывания он вычислил длину окружности и получил приближения числа  $\pi$ ,  $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ . Он вычислил площадь круга, объем и площадь поверхности шара и мн. др.

Цилиндр с вписанным в него шаром изображены на его надгробном камне в Сиракузах.

## Усеченный тетраэдр

Кроме этих двух бесконечных серий полуправильных многогранников, имеется еще 13 полуправильных многогранников, которые впервые открыл и описал Архимед - это **тела Архимеда**.

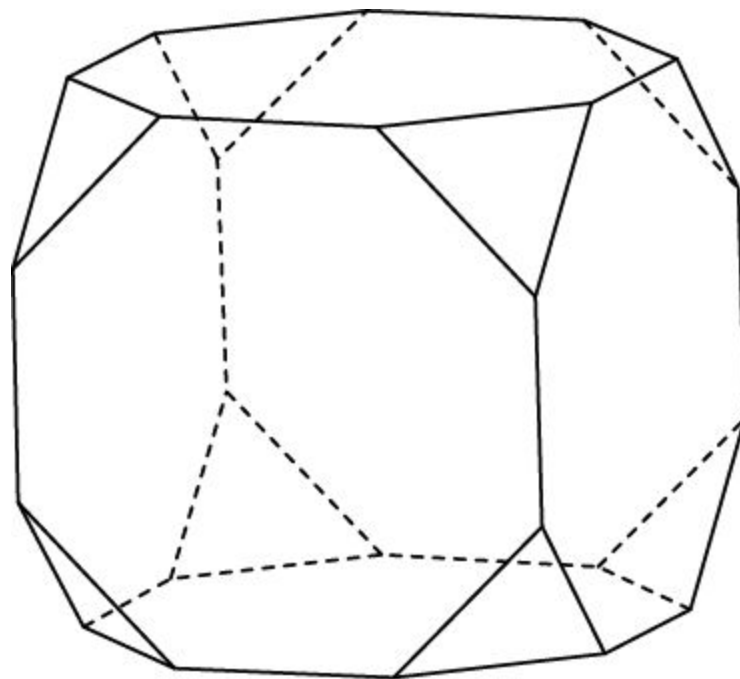
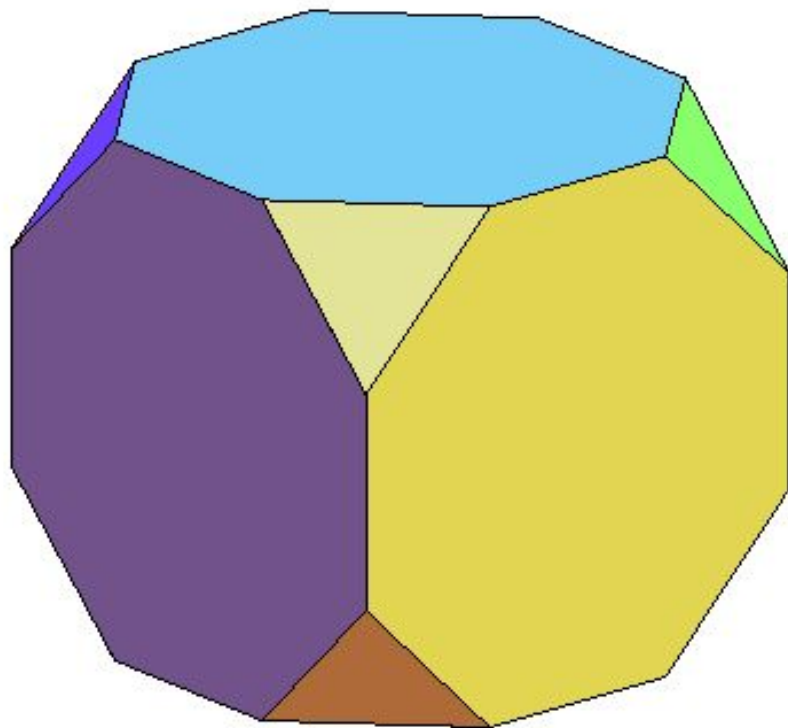
Самые простые из них получаются из правильных многогранников операцией "усечения", состоящей в отсечении плоскостями углов многогранника. Какую часть ребер нужно отсекать плоскостями от вершин тетраэдра, чтобы полученный многогранник был полуправильным, называемым **усеченный тетраэдр**?



Ответ.  $1/3$ .

## Усеченный куб

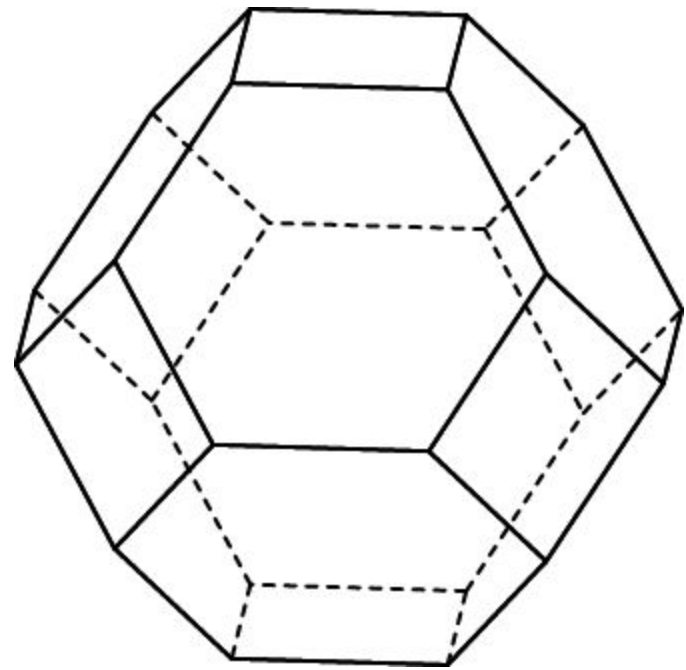
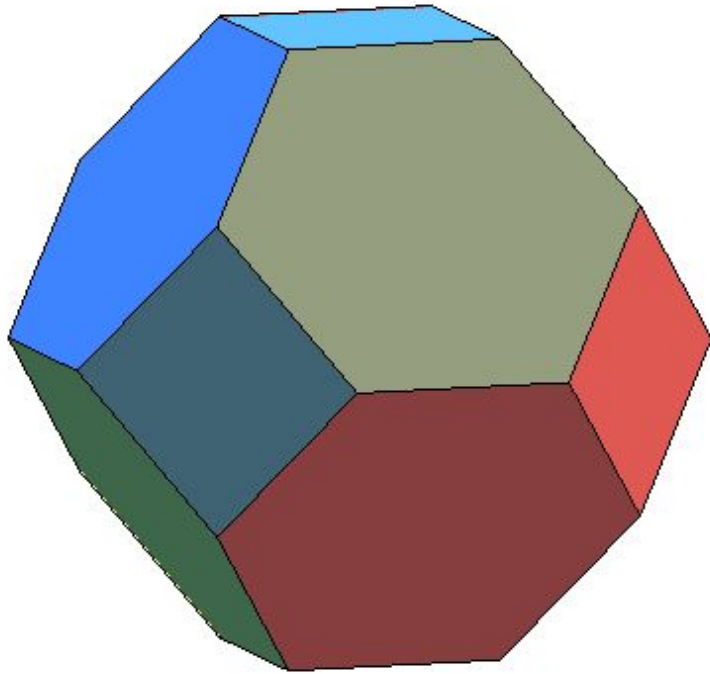
Какую часть ребер нужно отсекать плоскостями от вершин куба, чтобы полученный многогранник был полуправильным, называемым **усеченный куб**?



Ответ.  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

## Усеченный октаэдр

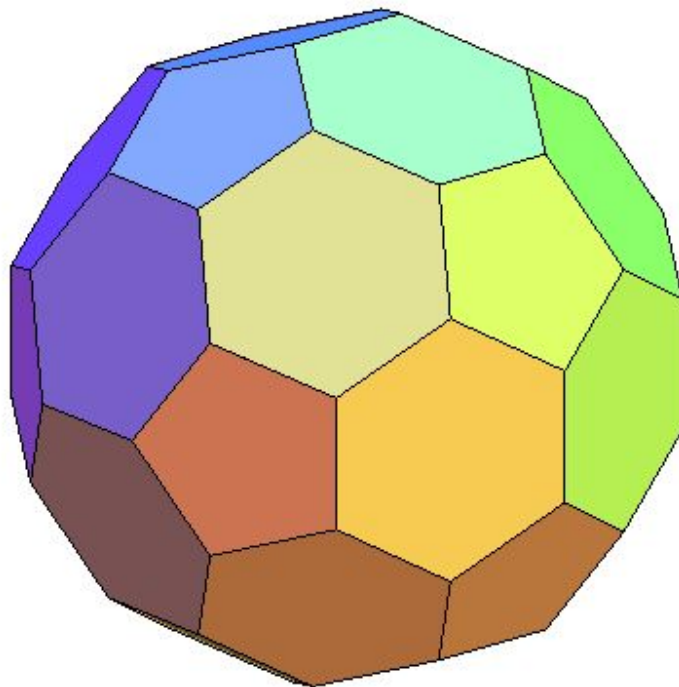
Какую часть ребер нужно отсекать плоскостями от вершин октаэдра, чтобы полученный многогранник был полуправильным, называемым **усеченный октаэдр**?



Ответ.  $1/3$ .

## Усеченный икосаэдр

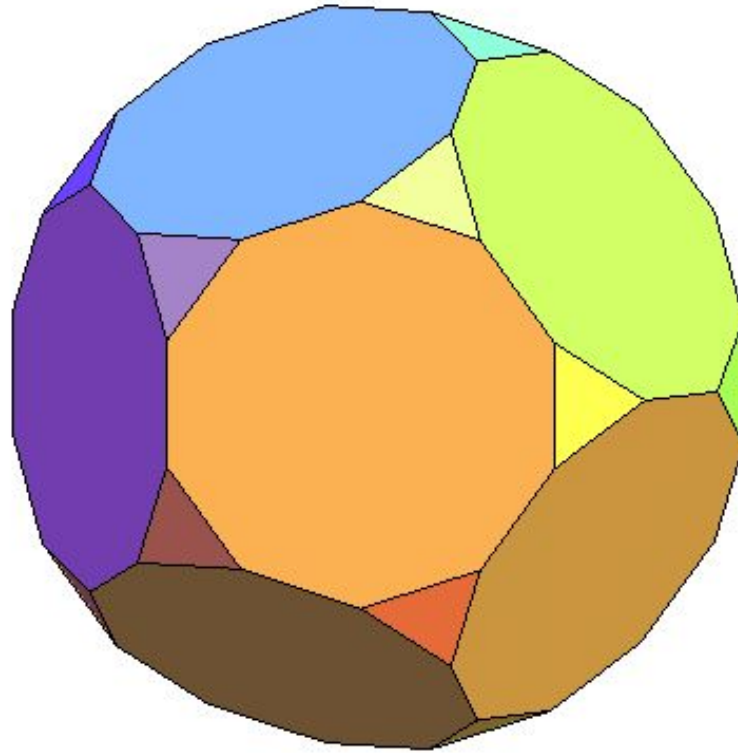
Какую часть ребер нужно отсекать плоскостями от вершин икосаэдра, чтобы полученный многогранник был полуправильным, называемым **усеченный икосаэдр**? Обратите внимание на то, что поверхность футбольного мяча изготавливают в форме поверхности усеченного икосаэдра.



Ответ.  $1/3$ .

## Усеченный додекаэдр

Какую часть ребер нужно отсекать плоскостями от вершин икосаэдра, чтобы полученный многогранник был полуправильным, называемым **усеченный додекаэдр**?

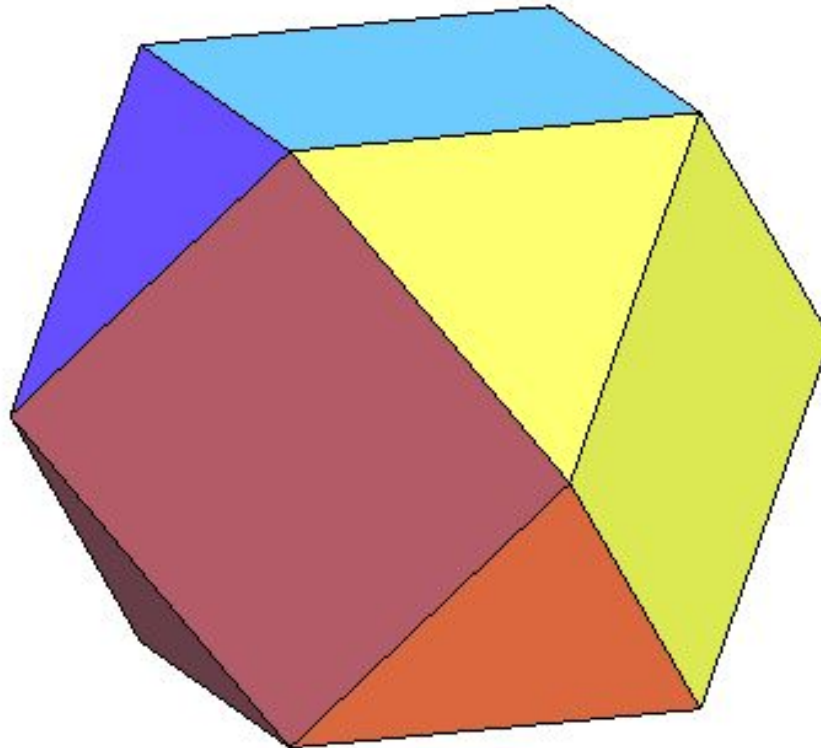


Ответ.  $\frac{5 - \sqrt{5}}{10}$ .



## Кубооктаэдр

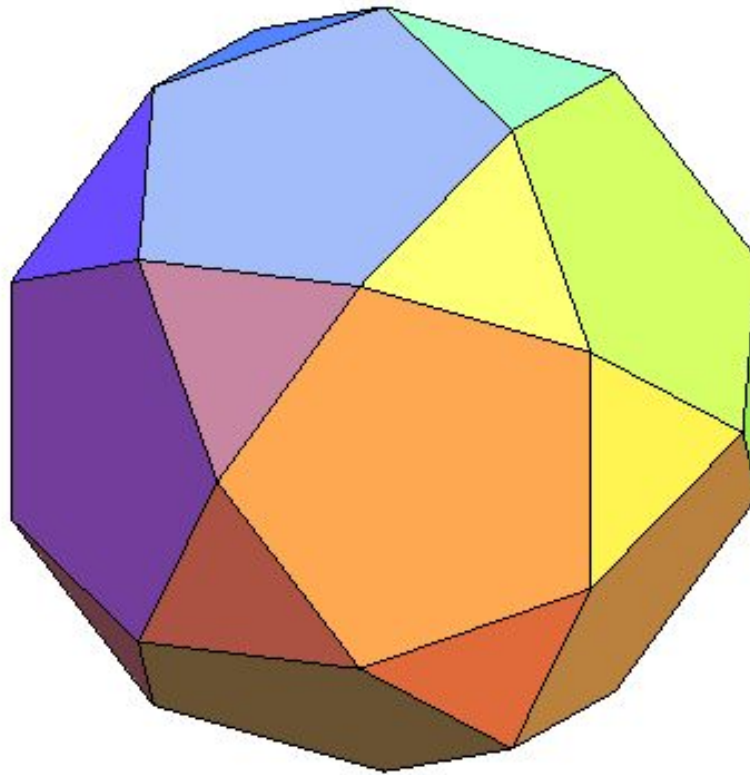
Для того чтобы получить еще один полуправильный многогранник, проведем в кубе отсекающие плоскости через середины ребер, выходящих из одной вершины. В результате получим полуправильный многогранник, который называется **кубооктаэдр**. Его поверхность состоит из граней куба и октаэдра.





## Икосододекаэдр

Аналогично, если в икосаэдре отсекающие плоскости провести через середины ребер, выходящих из одной вершины, то получим многогранник, который называется **икосододекаэдр**. Его поверхность состоит из граней икосаэдра и додекаэдра.



## Упражнение 1

Какой многогранник получится, если в тетраэдре отсекающие плоскости провести через середины ребер, выходящих из одной вершины?

**Ответ.** Октаэдр.

## Упражнение 2

Какой многогранник получится, если в октаэдре отсекающие плоскости провести через середины ребер, выходящих из одной вершины?

**Ответ.** Кубооктаэдр.

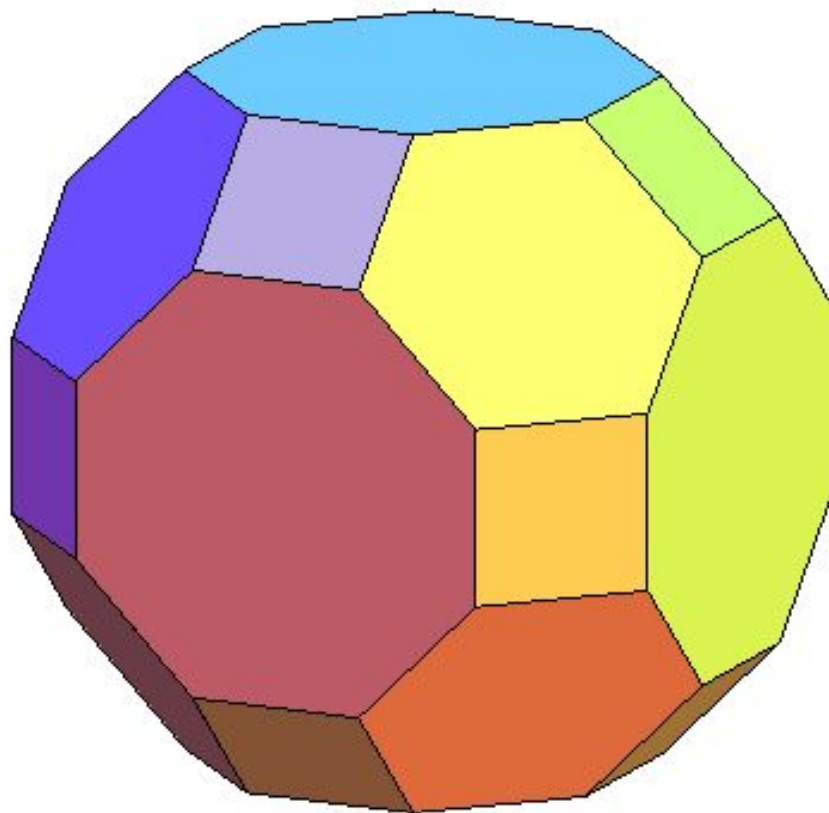
## Упражнение 3

Какой многогранник получится, если в додекаэдре отсекающие плоскости провести через середины ребер, выходящих из одной вершины?

**Ответ.** Икосододекаэдр.

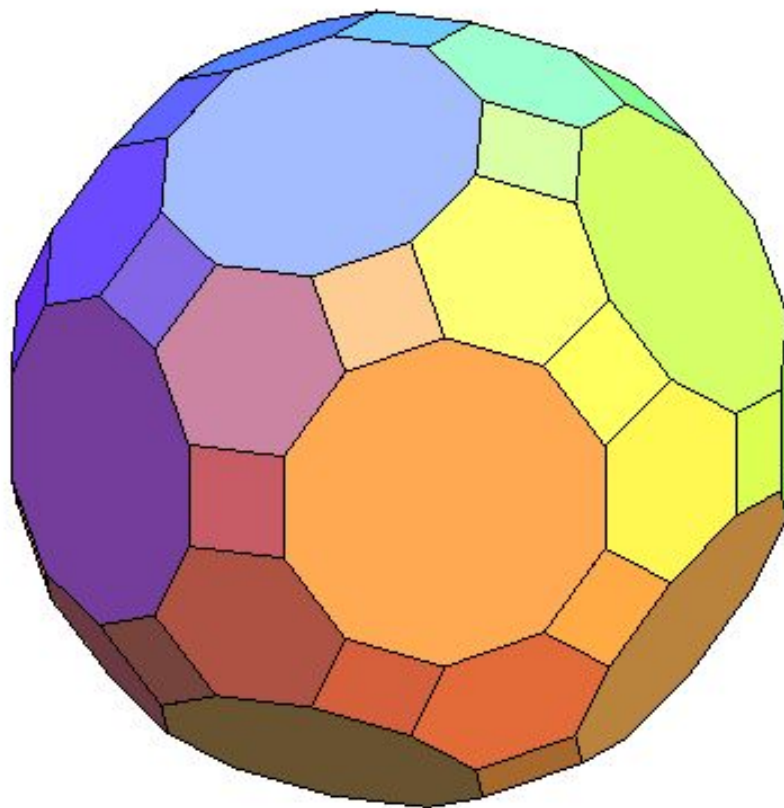
## Усеченный кубоктаэдр

Полуправильный многогранник, изображенный на рисунке называют **усеченный кубоктаэдр**, хотя он и не получается усечением кубоктаэдра. Его поверхность состоит из правильных восьмиугольников, шестиугольников и квадратов.



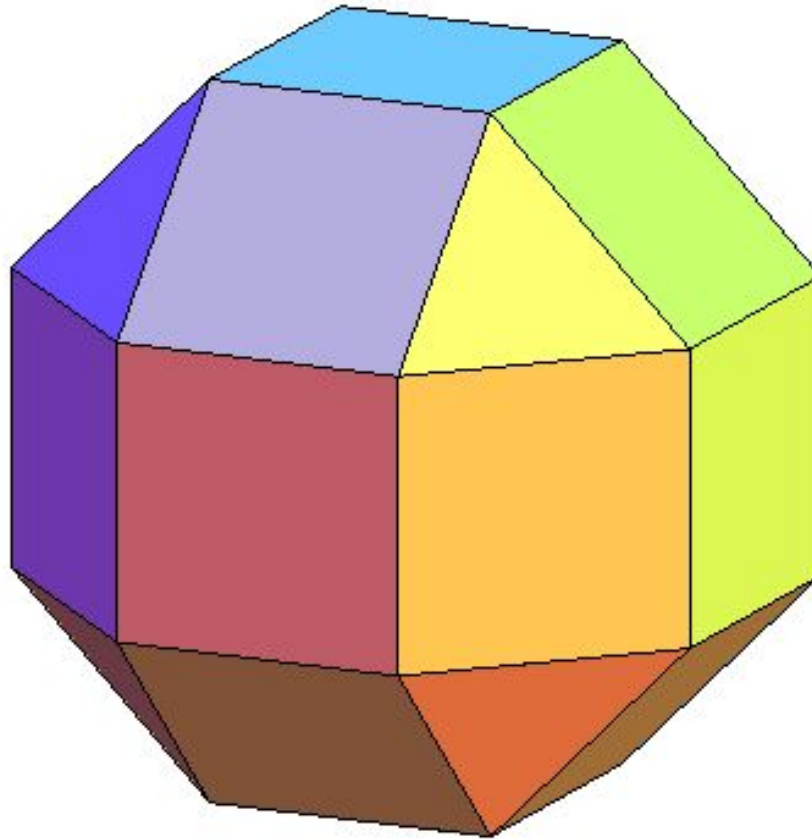
## Усеченный икосододекаэдр

Полуправильный многогранник, изображенный на рисунке называют **усеченный икосододекаэдр**, хотя он и не получается усечением икосододекаэдра. Его поверхность состоит из правильных десятиугольников, шестиугольников и квадратов.



## Ромбокубооктаэдр

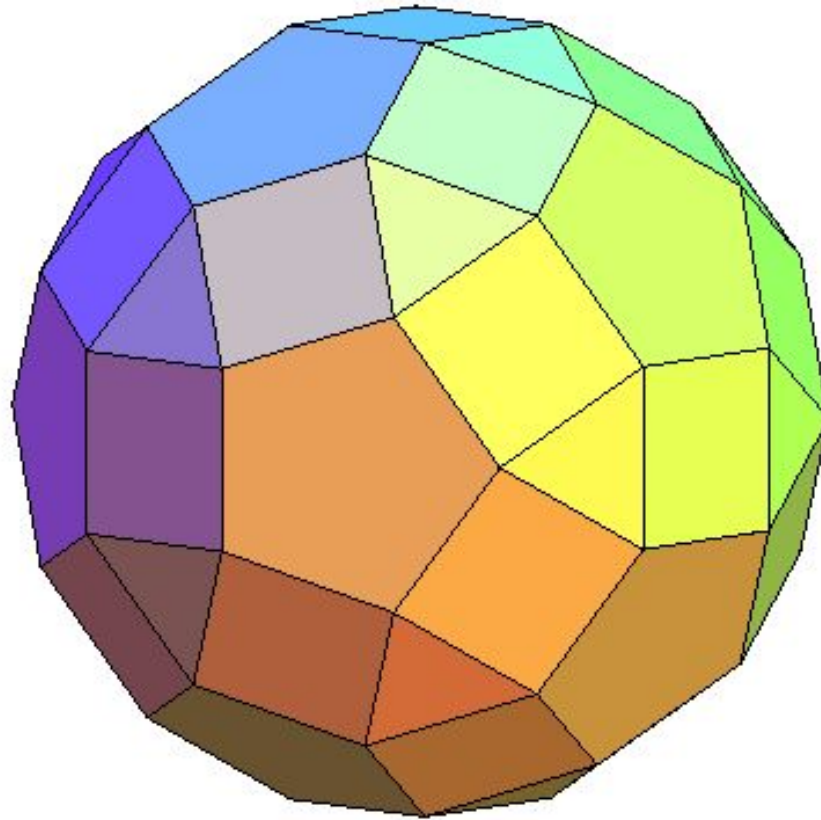
На рисунке изображен многогранник, называемый **ромбокубооктаэдр**. Его поверхность состоит из граней куба и октаэдра, к которым добавлены еще 12 квадратов.





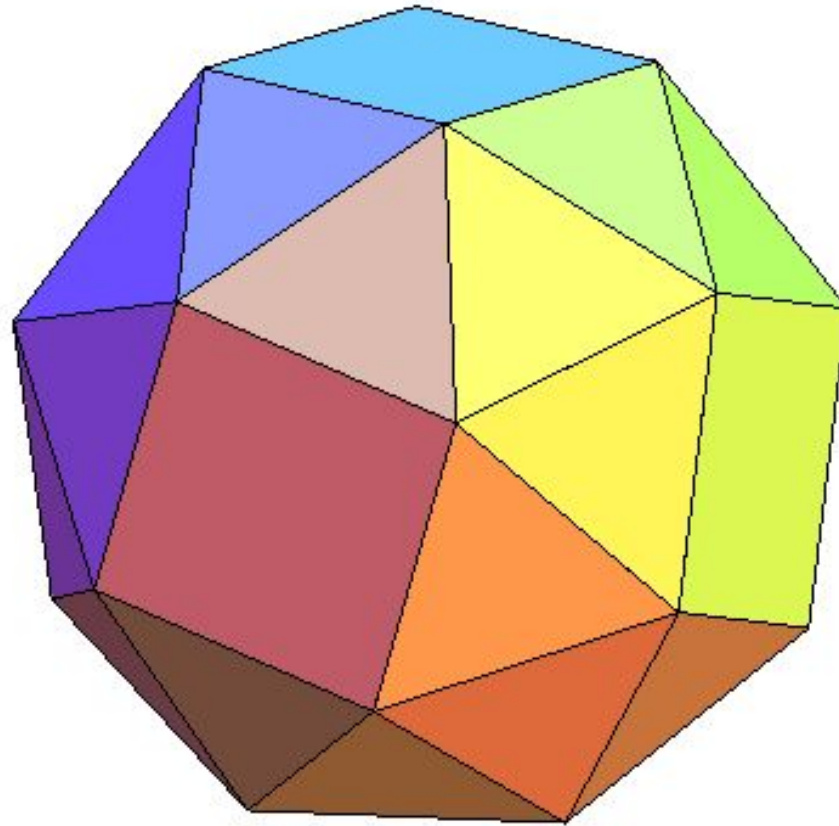
## Ромбоикосододекаэдр

На рисунке изображен многогранник, называемый **ромбоикосододекаэдр**. Его поверхность состоит из граней икосаэдра, додекаэдра и еще 30 квадратов.



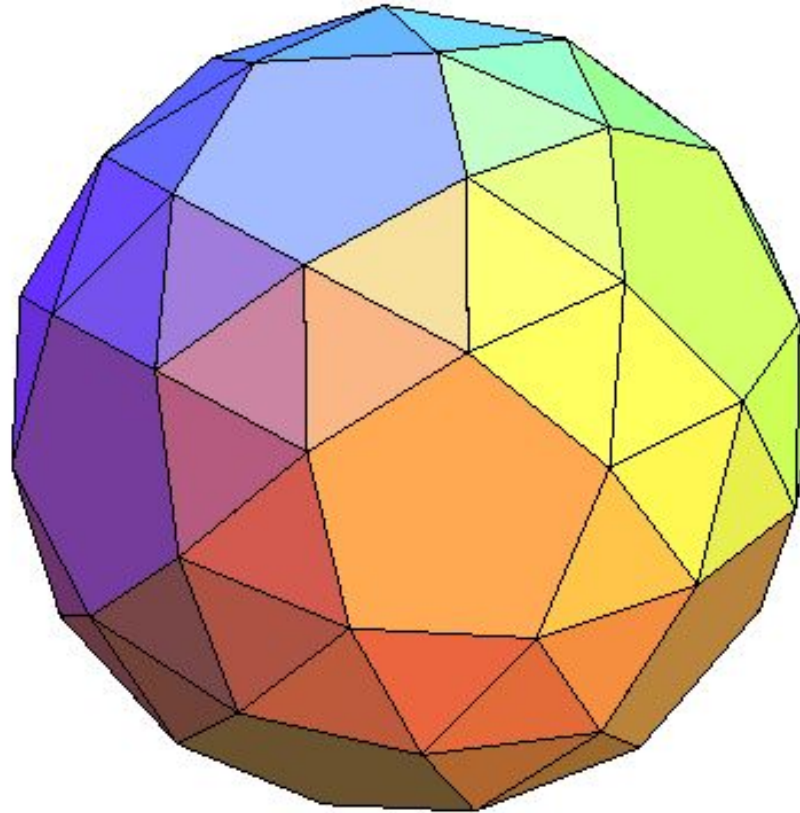
## Курносый куб

На рисунке изображен многогранник, называемый **курносый** (иногда называют **плосконосый**) **куб**. Его поверхность состоит из граней куба, окруженных правильными треугольниками.



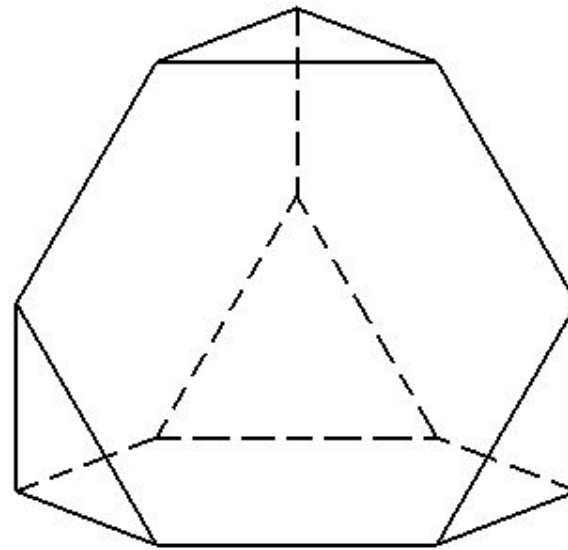
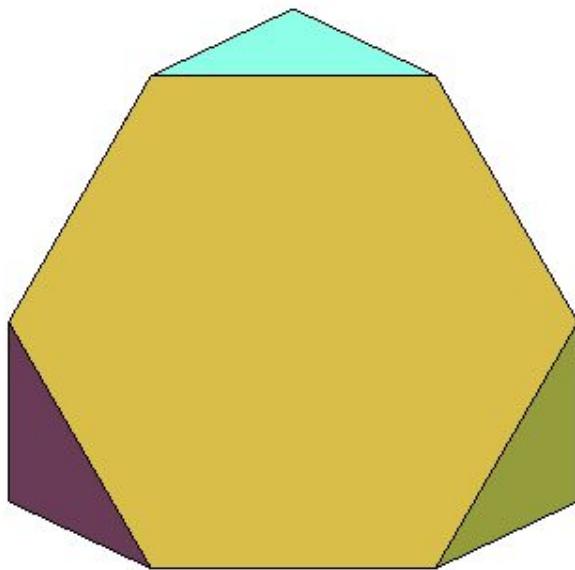
## Курносый додекаэдр

Последний многогранник Архимеда называется **курносый (плосконосый) додекаэдр**. Его поверхность состоит из граней додекаэдра, окруженных правильными треугольниками.



## Упражнение 4

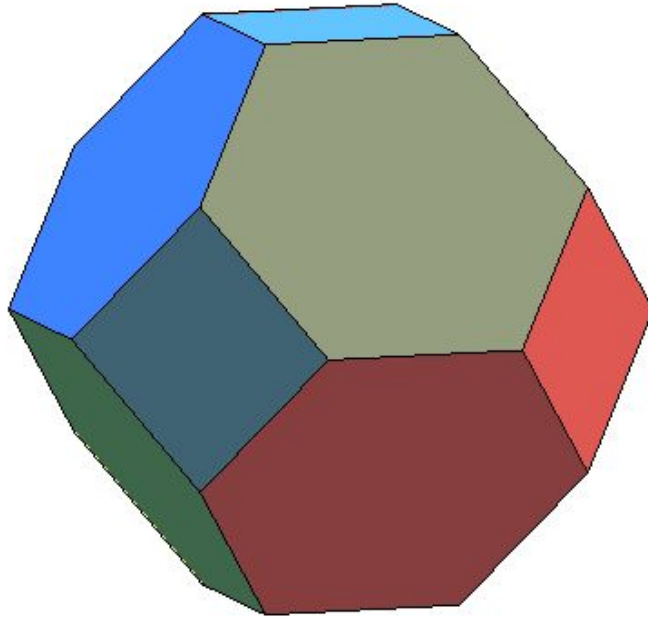
Из каких граней состоит усеченный тетраэдр? Сколько у него вершин (В), ребер (Р) и граней (Г)?



**Ответ:** Четыре шестиугольных и четыре треугольных граней;  $V = 12$ ,  $P = 18$ ,  $G = 8$ .

## Упражнение 5

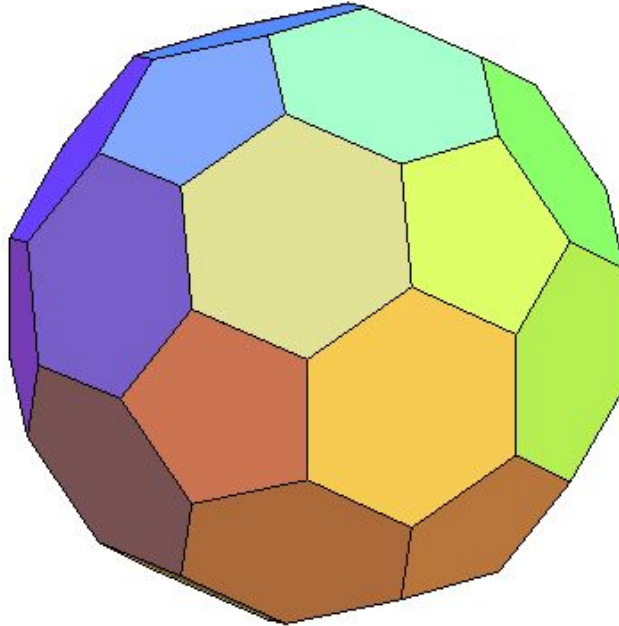
Из каких граней состоит усеченный октаэдр? Сколько у него вершин (В), ребер (Р) и граней (Г)?



**Ответ:** Восемь шестиугольных и шесть квадратных граней;  $V = 24$ ,  $P = 36$ ,  $G = 14$ .

## Упражнение 6

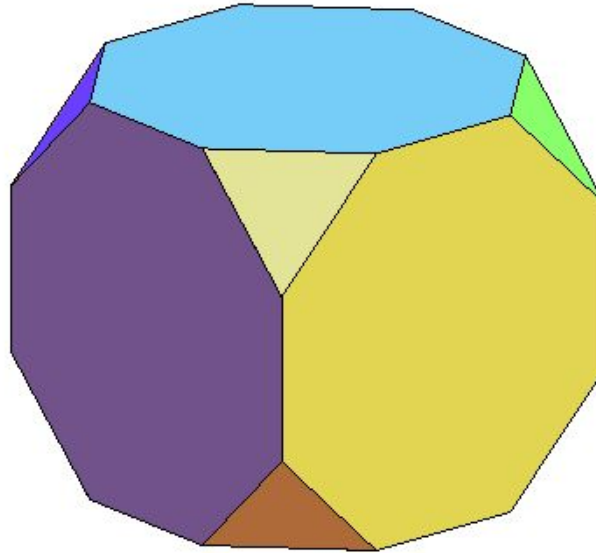
Из каких граней состоит усеченный октаэдр? Сколько у него вершин (В), ребер (Р) и граней (Г)?



**Ответ:** Двадцать шестиугольных и двенадцать пятиугольных граней;  $V = 60$ ,  $P = 90$ ,  $G = 32$ .

## Упражнение 7

Ребро куба равно 1. Найдите ребро полученного из него усеченного куба.

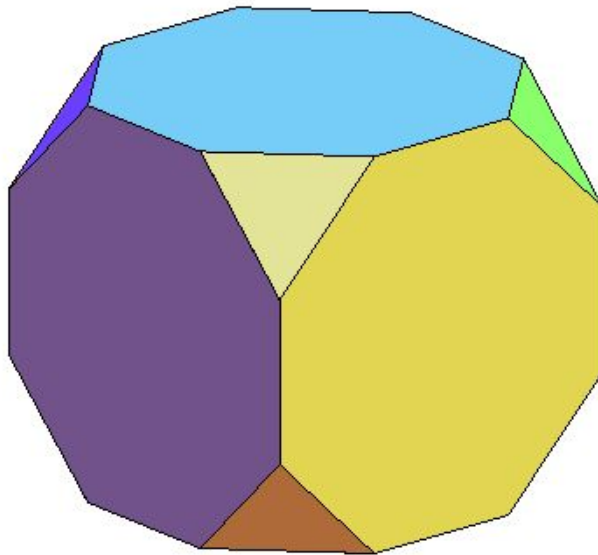


Ответ:  $\sqrt{2} - 1$ .



## Упражнение 8

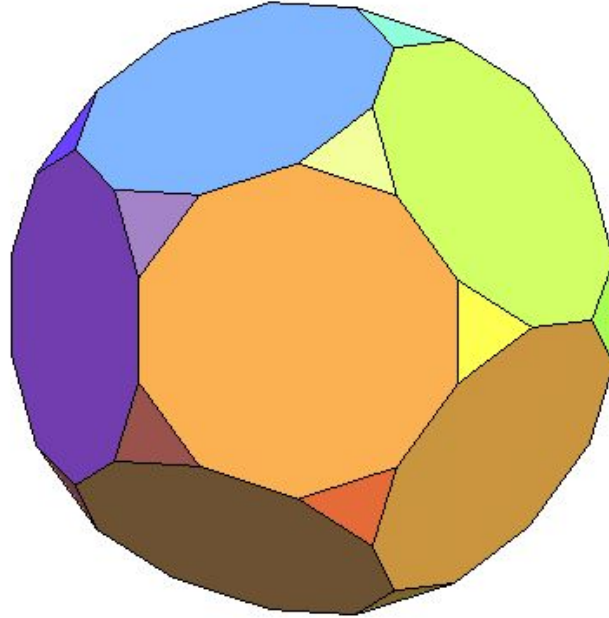
Из каких граней состоит усеченный куб? Сколько у него вершин (В), ребер (Р) и граней (Г)?



**Ответ:** Шесть восьмиугольных и восемь треугольных граней;  $V = 24$ ,  $P = 36$ ,  $G = 14$ .

## Упражнение 9

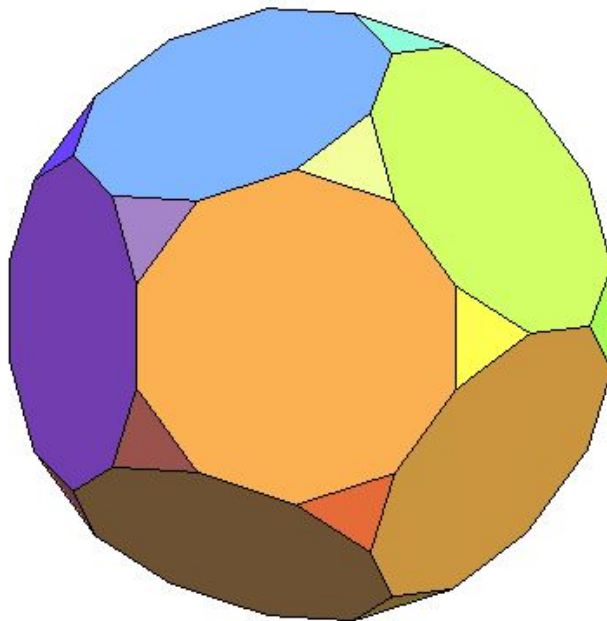
Ребро додекаэдра равно 1. Найдите ребро полученного из него усеченного додекаэдра.



Ответ:  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

## Упражнение 10

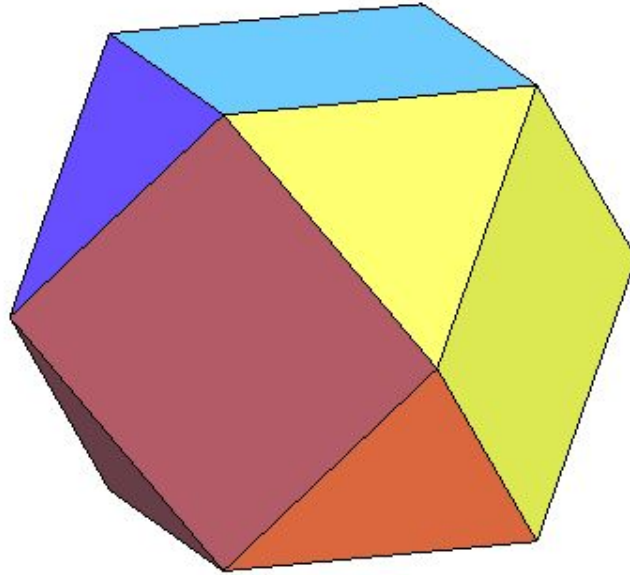
Из каких граней состоит усеченный додекаэдр? Сколько у него вершин (В), ребер (Р) и граней (Г)?



**Ответ:** Двенадцать десятиугольных и двадцать треугольных граней;  $V = 60$ ,  $P = 90$ ,  $G = 32$ .

## Упражнение 11

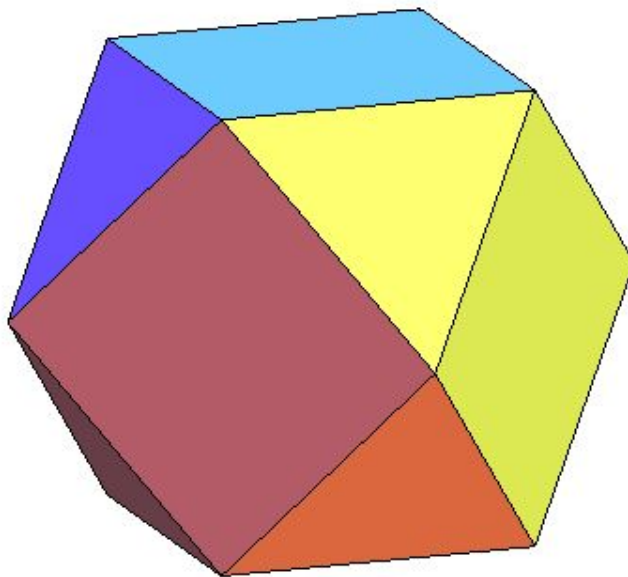
Ребро куба равно 1. Найдите ребро полученного из него кубооктаэдра.



Ответ:  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

## Упражнение 12

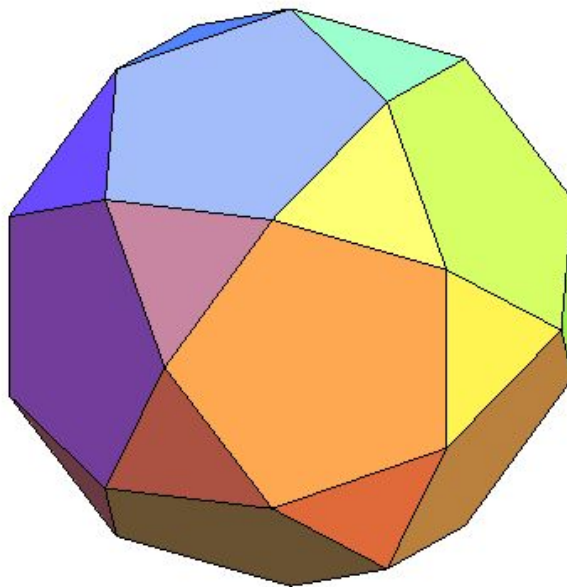
Из каких граней состоит кубоктаэдр? Сколько у него вершин (В), ребер (Р) и граней (Г)?



**Ответ:** Шесть квадратных и восемь треугольных граней;  $V = 12$ ,  
 $P = 24$ ,  $G = 14$ .

## Упражнение 13

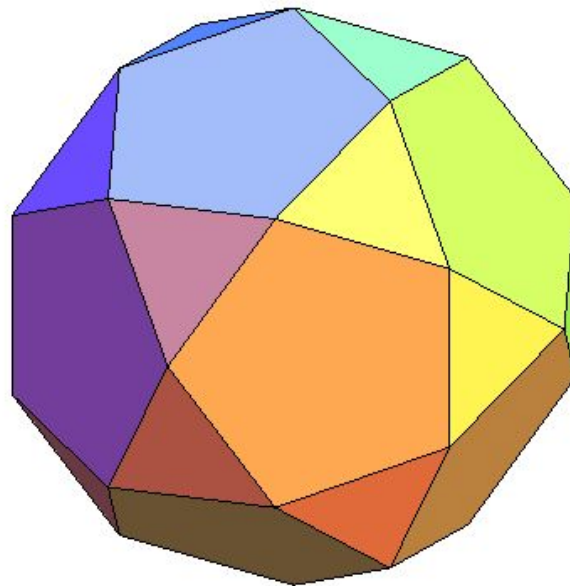
Ребро додекаэдра равно 1. Найдите ребро полученного из него икосододекаэдра.



Ответ:  $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ .

## Упражнение 14

Из каких граней состоит икосододекаэдр? Сколько у него вершин (В), ребер (Р) и граней (Г)?

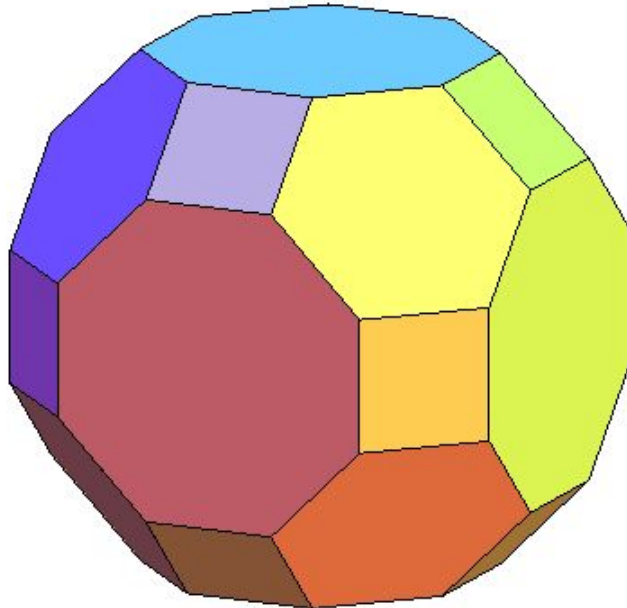


**Ответ:** Двенадцать пятиугольных и двадцать треугольных граней;  $V = 30$ ,  $P = 60$ ,  $G = 32$ .



## Упражнение 15

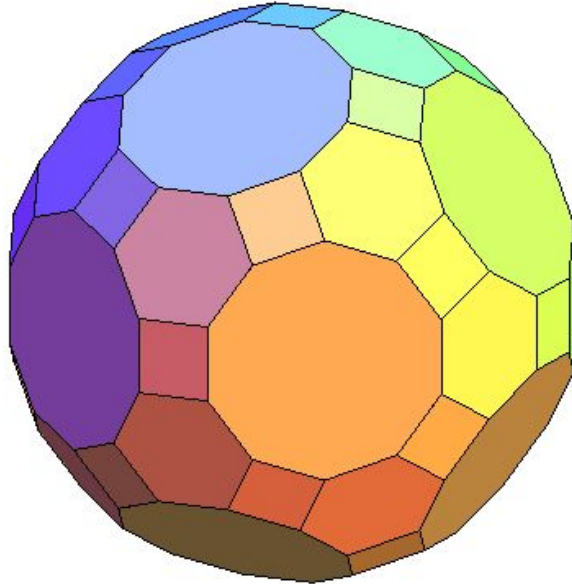
Из каких граней состоит усеченный кубookтаэдр? Сколько у него вершин (В), ребер (Р) и граней (Г)?



**Ответ:** Шесть восьмиугольных, восемь шестиугольных и двенадцать квадратных граней;  $V = 48$ ,  $P = 72$ ,  $G = 26$ .

## Упражнение 16

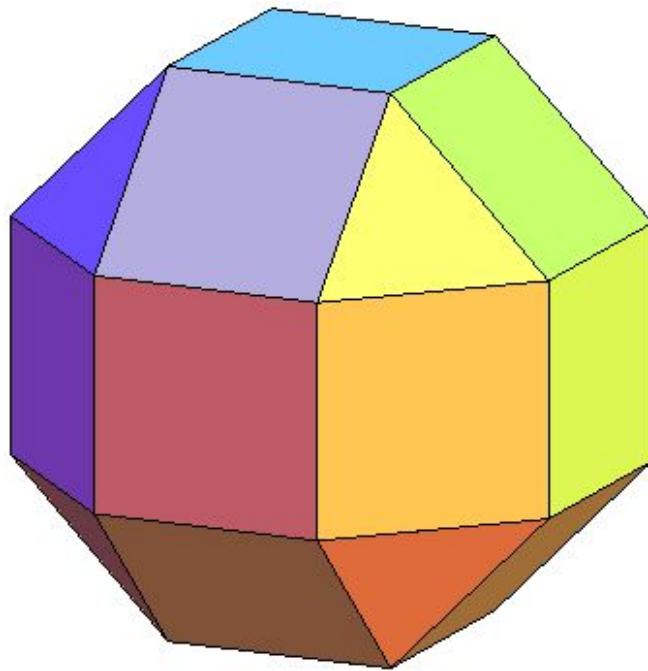
Из каких граней состоит усеченный икосододекаэдр? Сколько у него вершин (В), ребер (Р) и граней (Г)?



**Ответ:** Двенадцать десятиугольных, двадцать шестиугольных и тридцать квадратных граней;  $V = 120$ ,  $P = 180$ ,  $G = 62$ .

## Упражнение 17

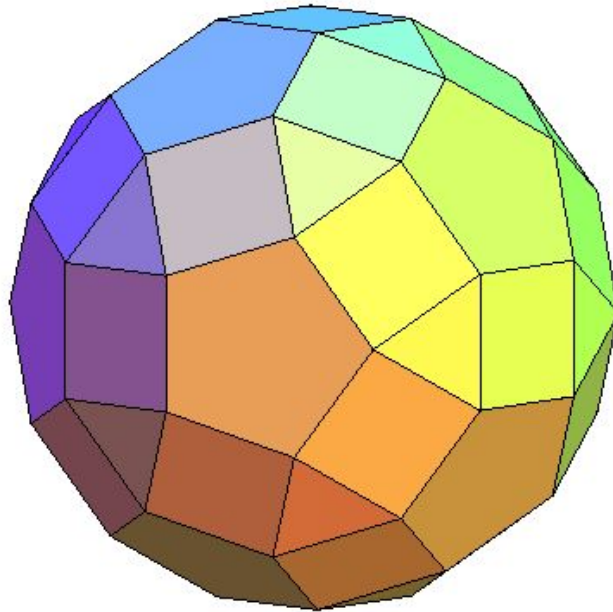
Из каких граней состоит ромбокубооктаэдр? Сколько у него вершин (В), ребер (Р) и граней (Г)?



**Ответ:** Восемнадцать квадратных и восемь треугольных граней;  
 $V = 24$ ,  $P = 48$ ,  $G = 26$ .

## Упражнение 18

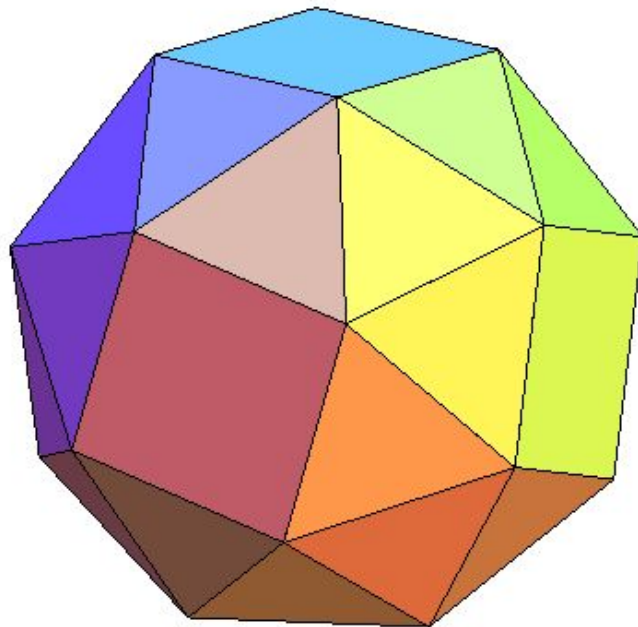
Из каких граней состоит ромбоикосододекаэдр? Сколько у него вершин (В), ребер (Р) и граней (Г)?



**Ответ:** Двенадцать пятиугольных, тридцать квадратных и двадцать треугольных граней;  $V = 60$ ,  $P = 120$ ,  $G = 62$ .

## Упражнение 19

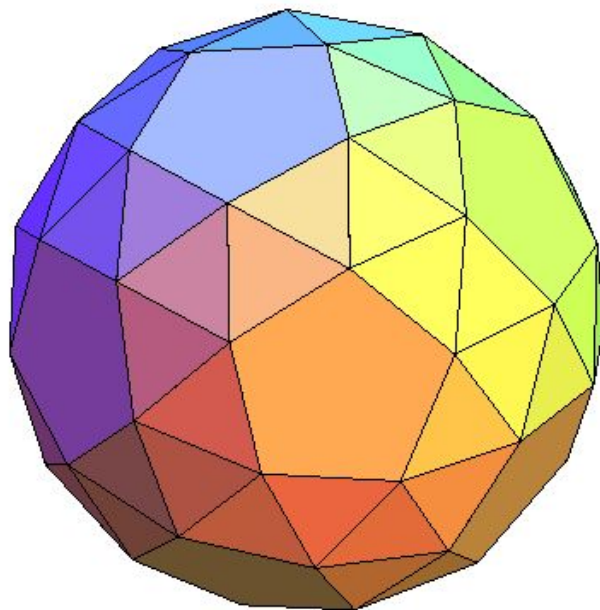
Из каких граней состоит курносый куб? Сколько у него вершин (В), ребер (Р) и граней (Г)?



**Ответ:** Шесть квадратных и тридцать две треугольных граней;  $V = 24$ ,  $P = 60$ ,  $G = 38$ .

## Упражнение 20

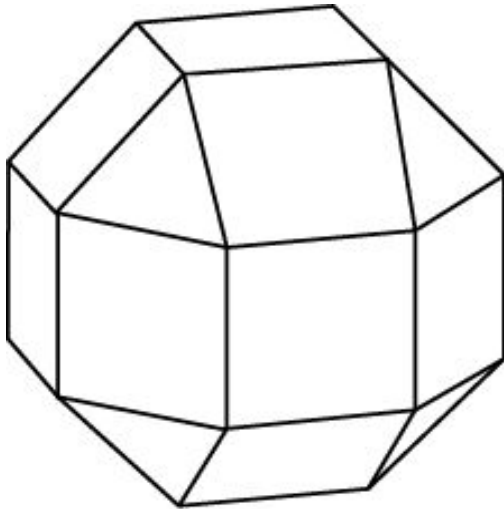
Из каких граней состоит курносый додекаэдр? Сколько у него вершин (В), ребер (Р) и граней (Г)?



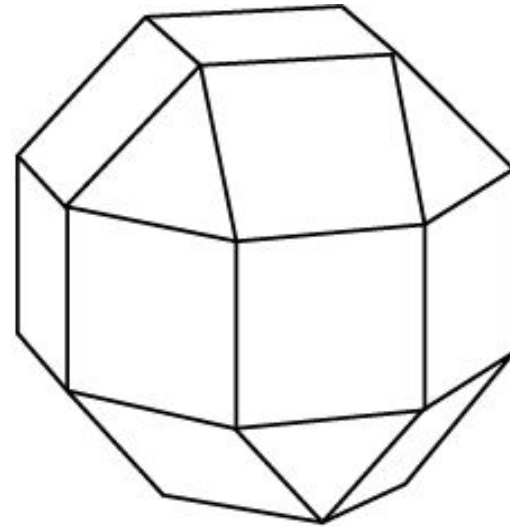
**Ответ:** Двенадцать пятиугольных и восемьдесят треугольных граней;  $V = 60$ ,  $P = 150$ ,  $G = 92$ .

## Упражнение 21

На рисунке б) изображён многогранник, который называется псевдоархимедовым. Как он получен из ромбокубооктаэдра (рис. а)? Является ли он полуправильным многогранником?



а)



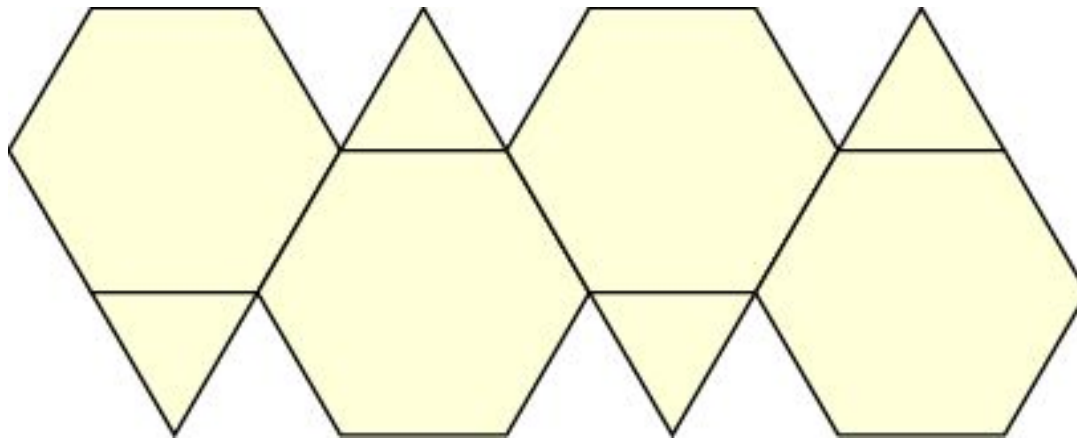
б)

**Ответ:** Этот многогранник получается из ромбокубооктаэдра поворотом нижней восьмиугольной чаши на  $45^\circ$ . Он не является полуправильным многогранником.



## Упражнение 22

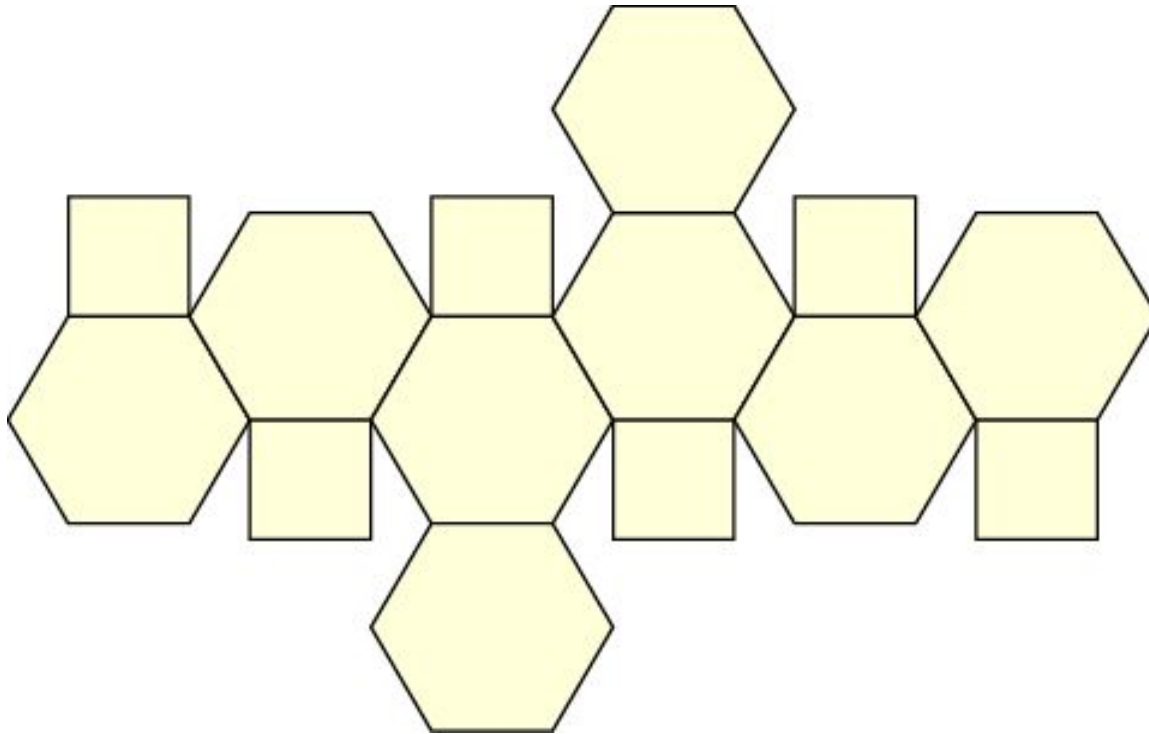
Развертка какого полуправильного многогранника изображена на рисунке?



**Ответ:** Усеченного тетраэдра.

## Упражнение 23

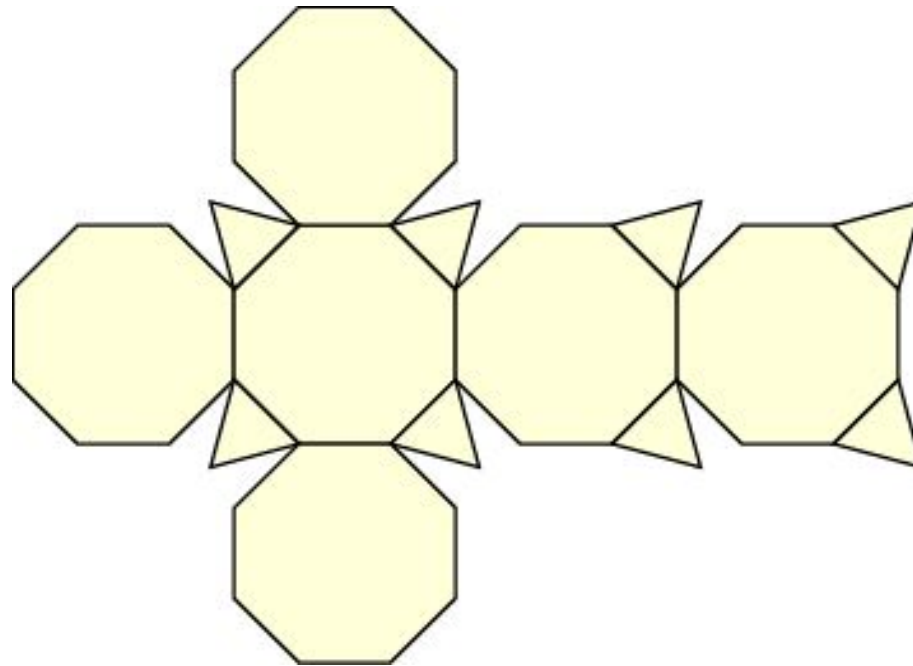
Развертка какого полуправильного многогранника изображена на рисунке?



**Ответ:** Усеченного октаэдра.

## Упражнение 24

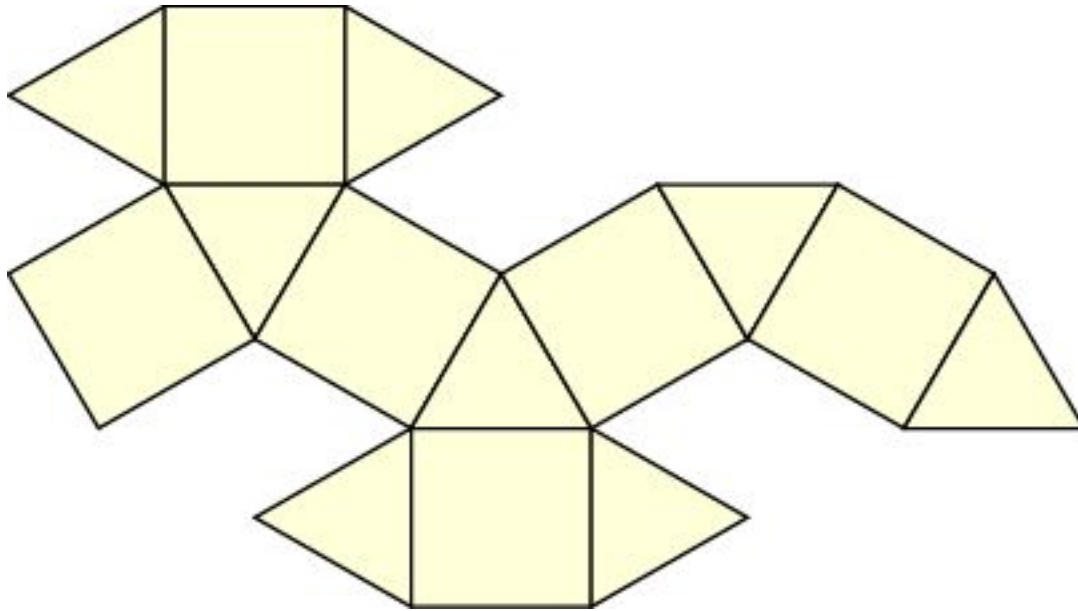
Развертка какого полуправильного многогранника изображена на рисунке?



**Ответ:** Усеченного куба.

## Упражнение 25

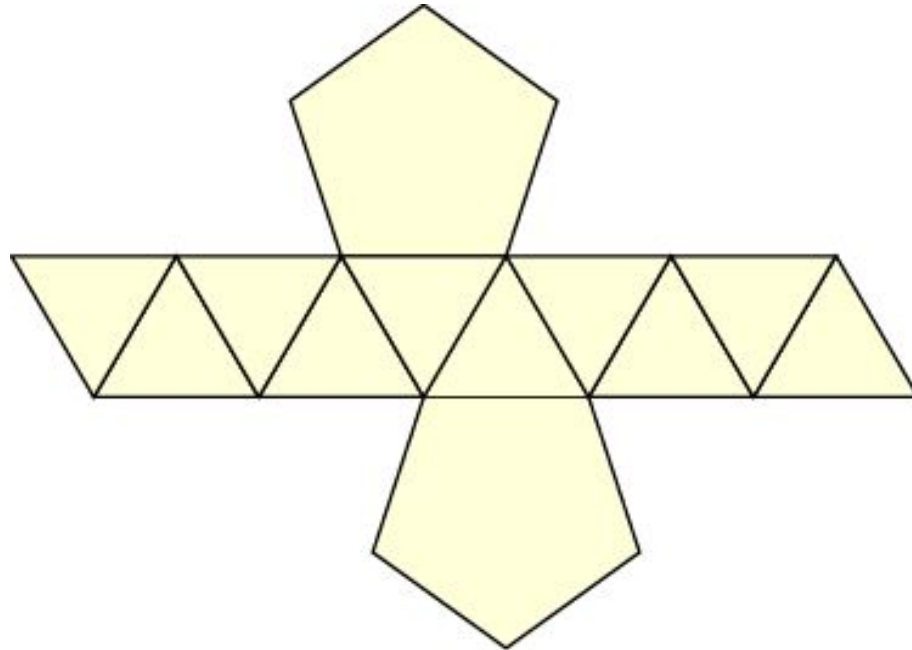
Развертка какого полуправильного многогранника изображена на рисунке?



**Ответ:** Кубооктаэдра.

## Упражнение 26

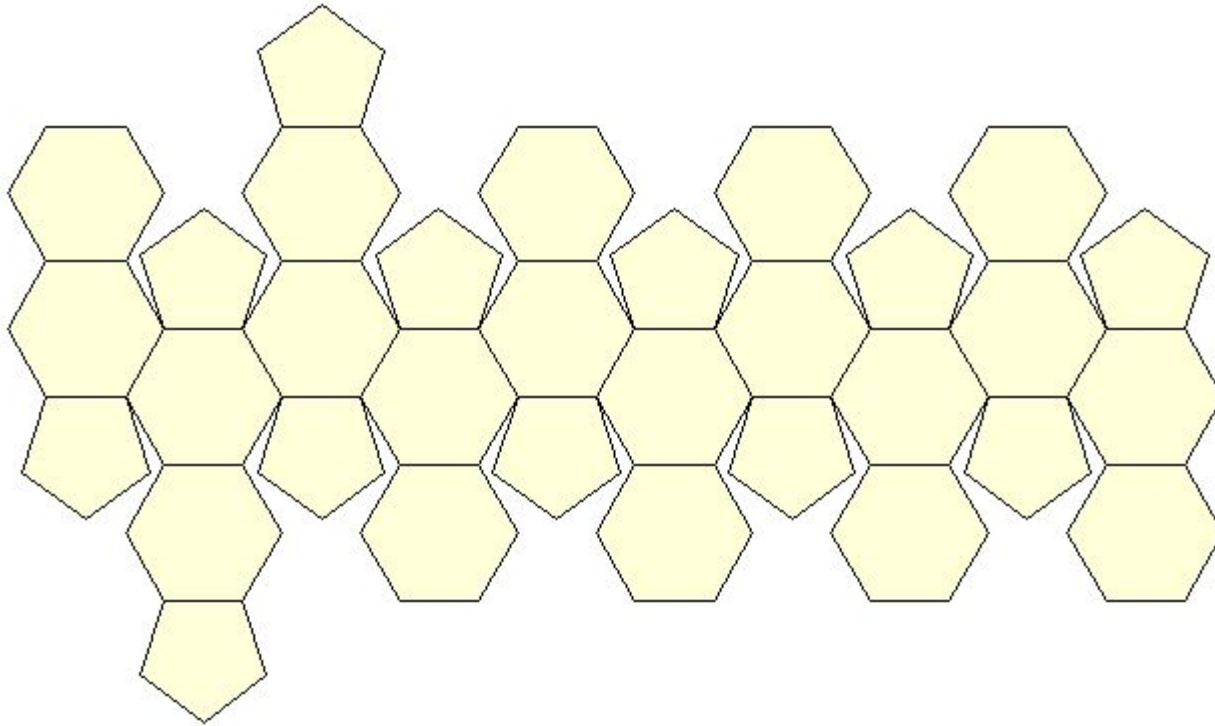
Развертка какого полуправильного многогранника изображена на рисунке?



**Ответ:** Пятиугольной антипризмы.

## Упражнение 27

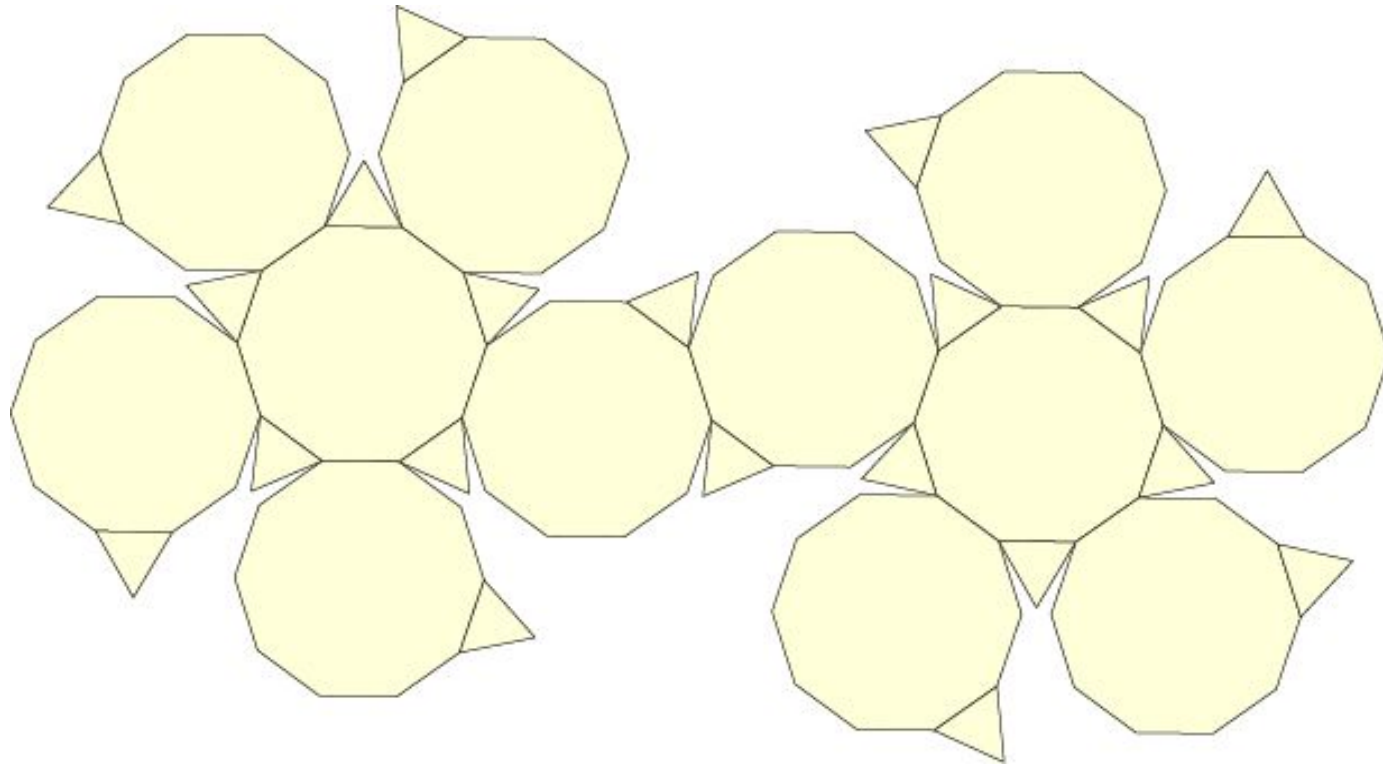
Развертка какого полуправильного многогранника изображена на рисунке?



**Ответ:** Усеченный икосаэдр.

## Упражнение 28

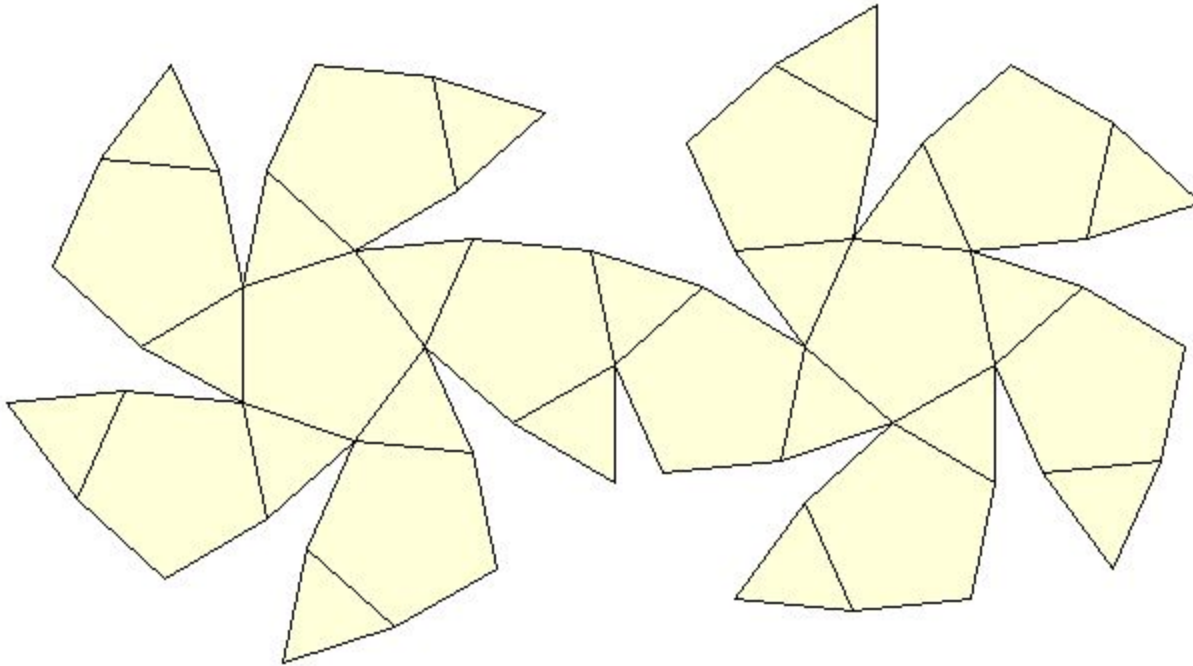
Развертка какого полуправильного многогранника изображена на рисунке?



**Ответ:** Усеченный додекаэдр.

## Упражнение 29

Развертка какого полуправильного многогранника изображена на рисунке?

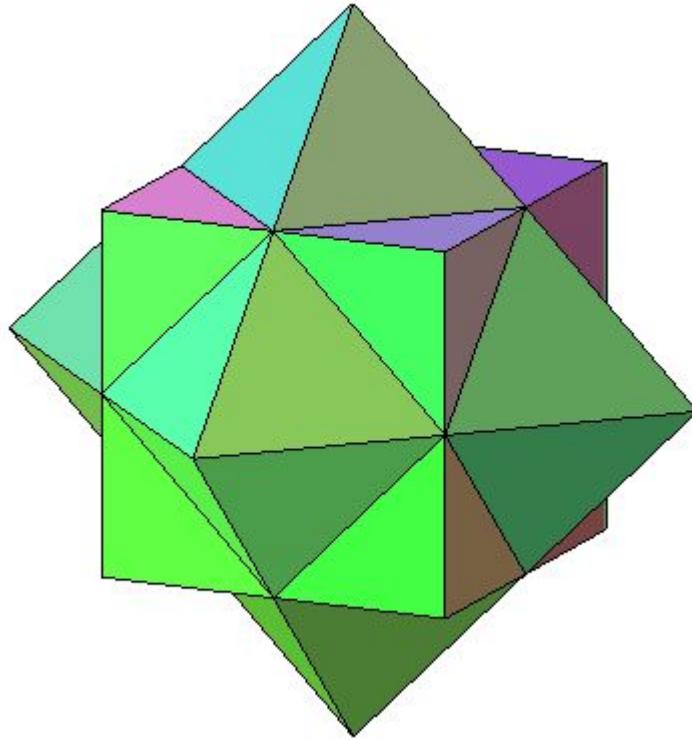


**Ответ:** Икосододекаэдр.



## Упражнение 30

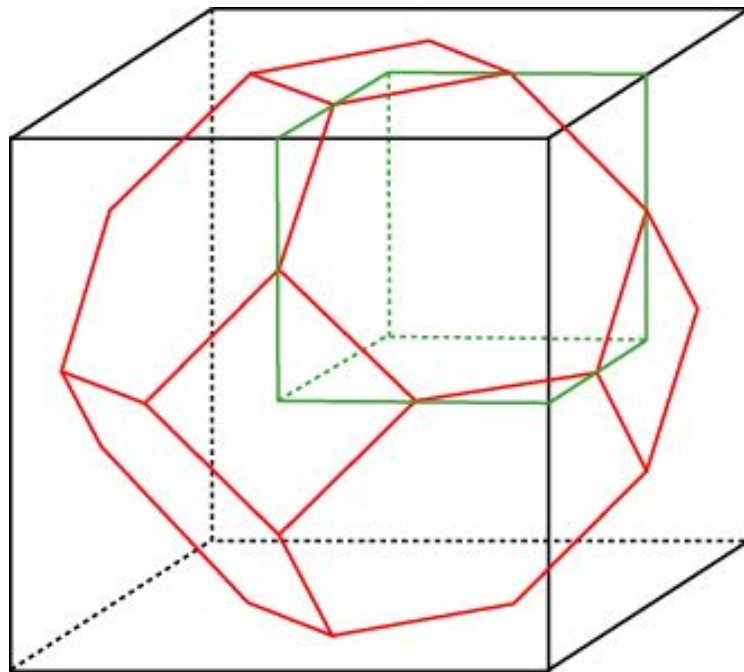
Объединением каких многогранников является многогранник, представленный на рисунке? Какой многогранник является их пересечением?



**Ответ:** Куб и октаэдр. Их пересечением является кубооктаэдр.

## Упражнение 31

Разрежьте четыре равных куба на две части каждый и сложите из них усеченный октаэдр.

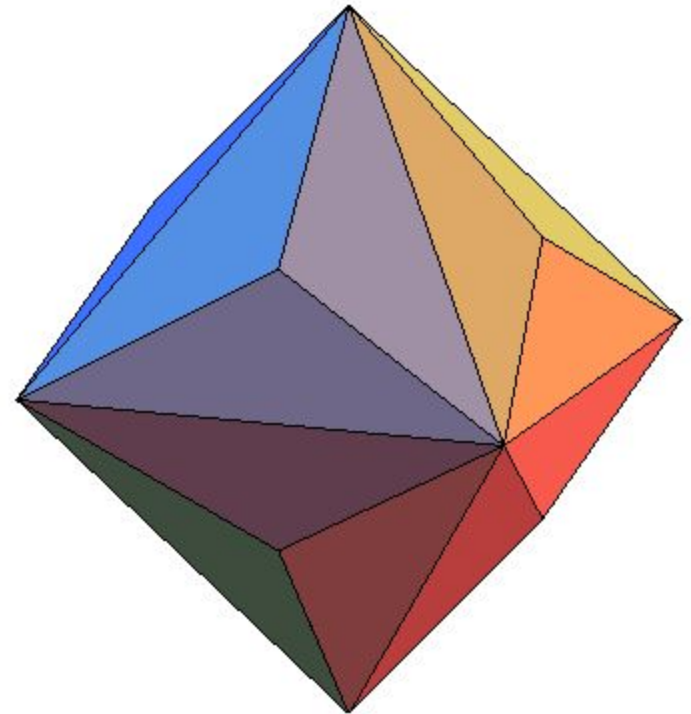
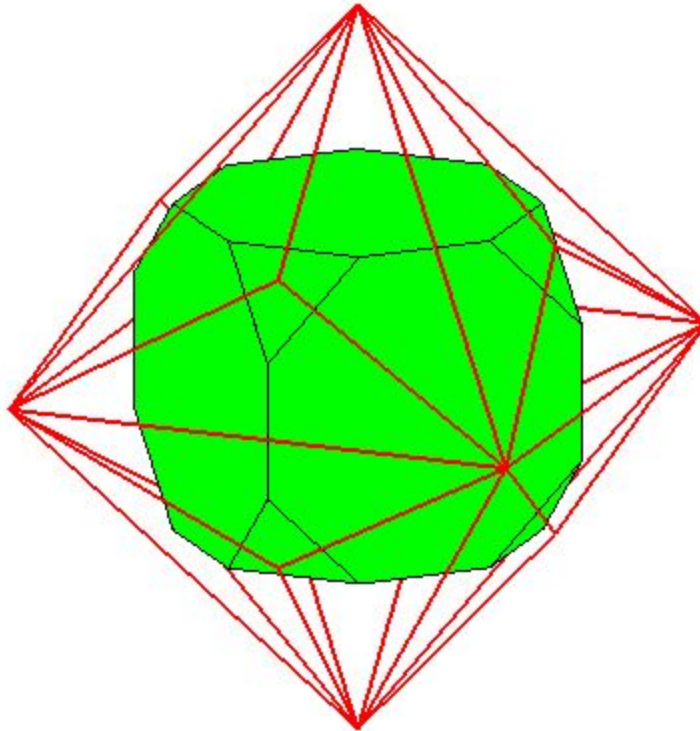


**Ответ:** Решение представлено на рисунке. Каждый куб разрезается на две равные части так, что сечениями являются правильные шестиугольники.

## Усеченный куб'

Выпуклый многогранник называется **равногранно полуправильным**, если его гранями являются равные многоугольники и все многогранные углы – правильные. Эти многогранники двойственны полуправильным многогранникам.

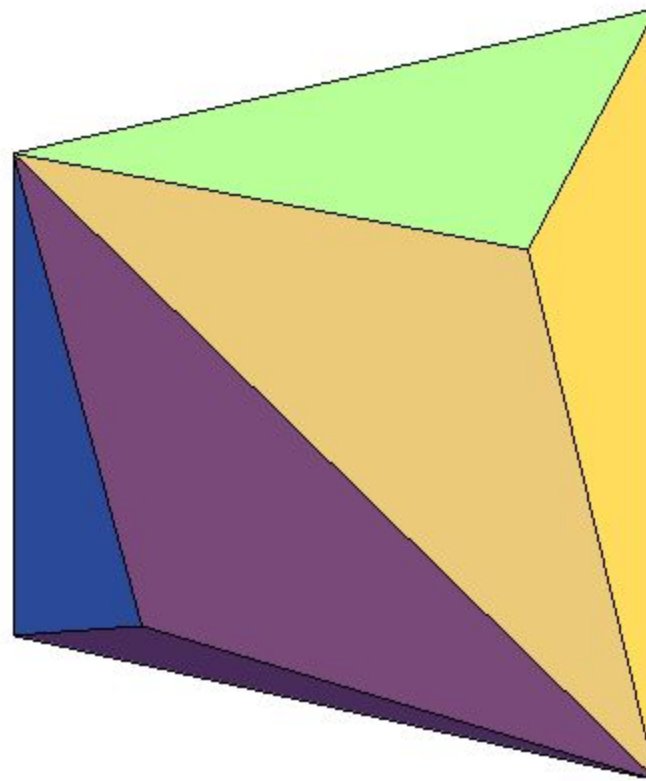
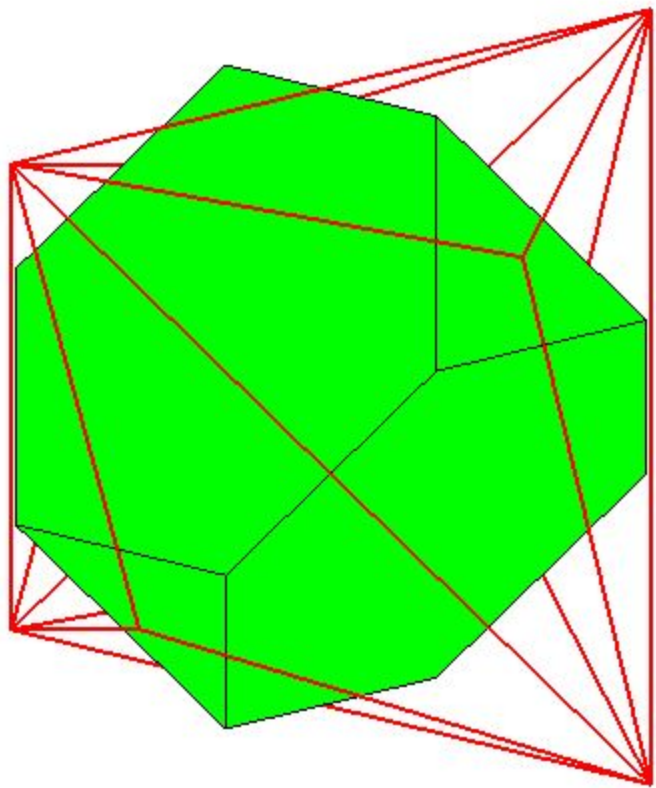
На рисунке показан многогранник, двойственный усеченному кубу. Его гранями являются равные треугольники. Сколько их?



Ответ: 24.

## Усеченный тетраэдр'

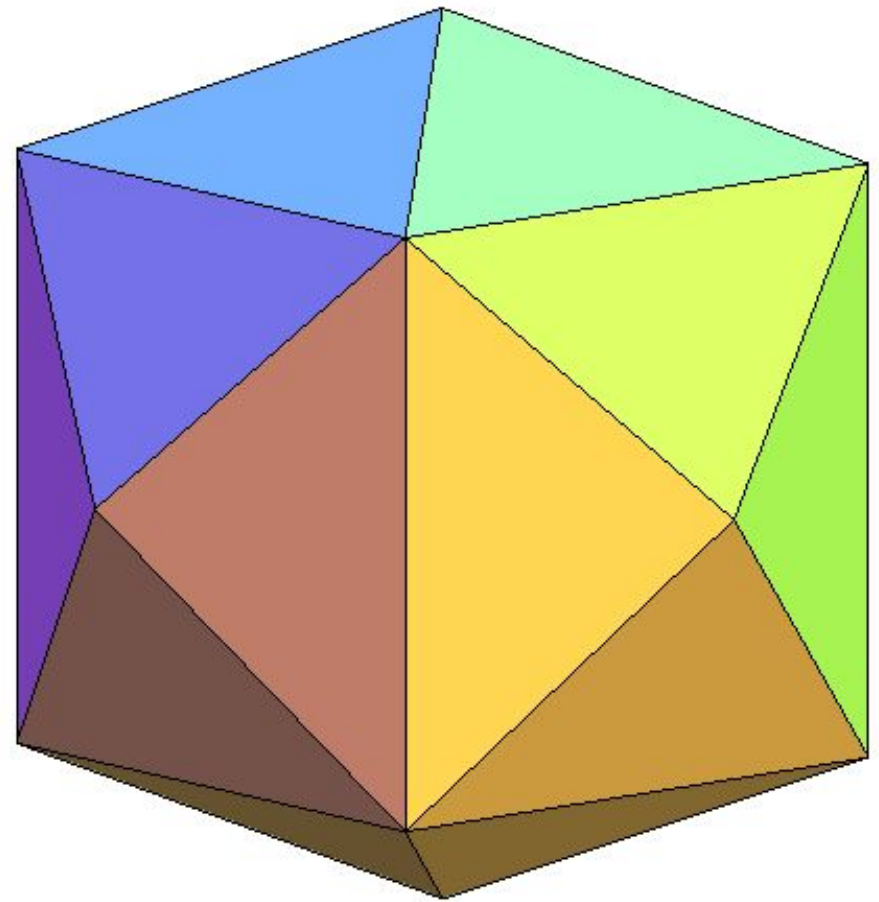
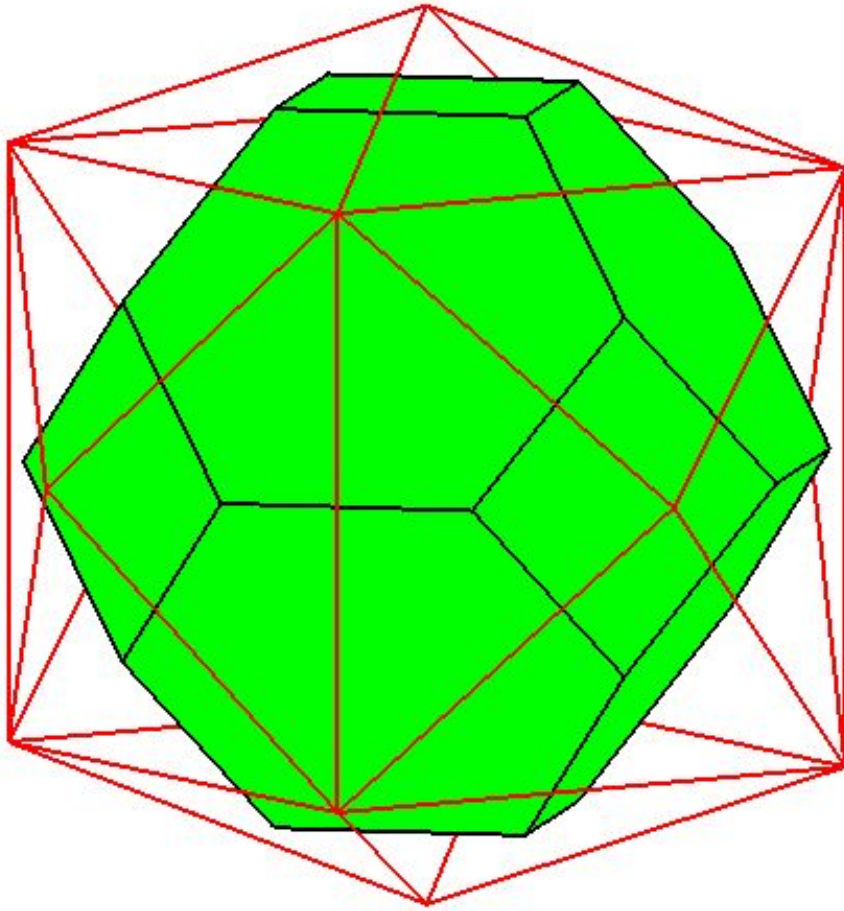
На рисунке показан многогранник, двойственный усеченному тетраэдру. Его гранями являются равные треугольники. Сколько их?



Ответ: 12.

## Усеченный октаэдр'

На рисунке показан многогранник, двойственный усеченному октаэдру. Его гранями являются равные треугольники. Сколько их?

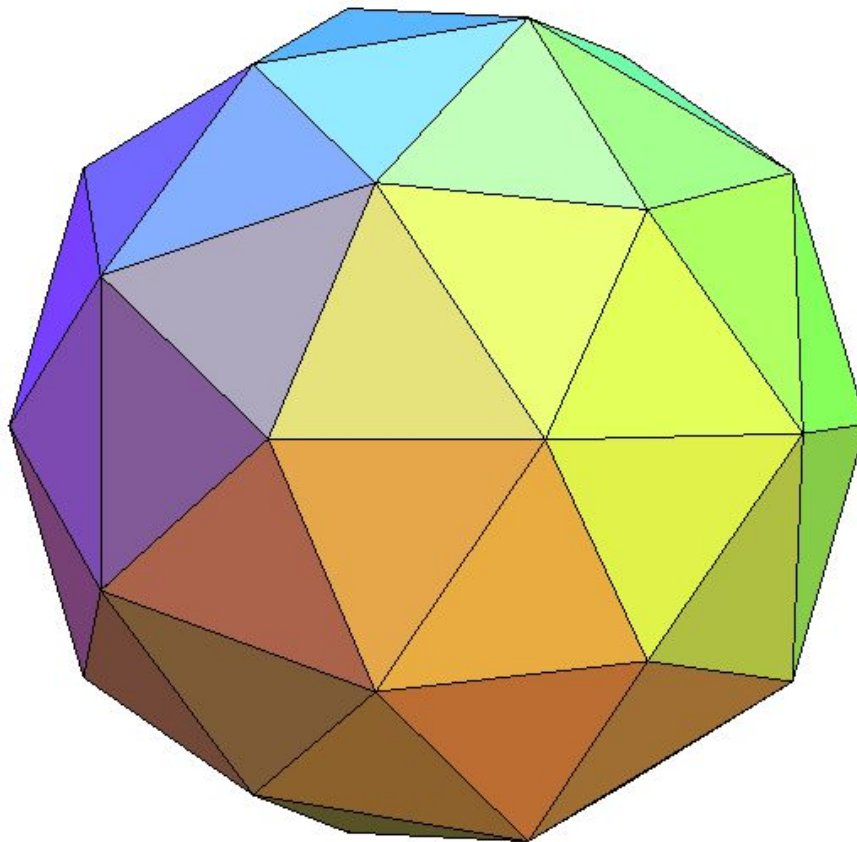
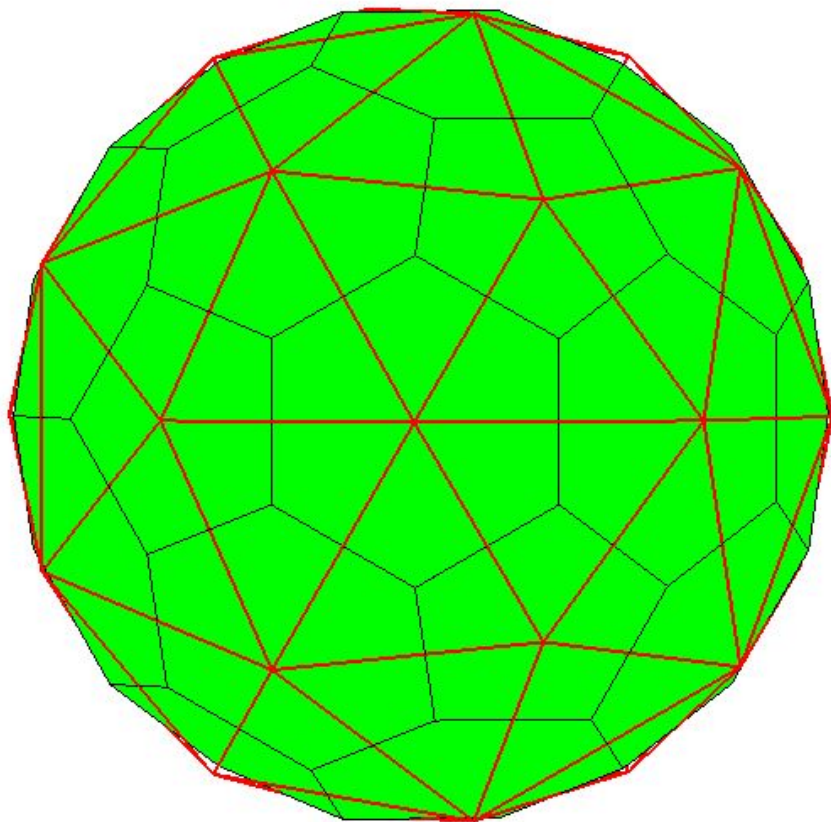


Ответ: 24.



## Усеченный икосаэдр'

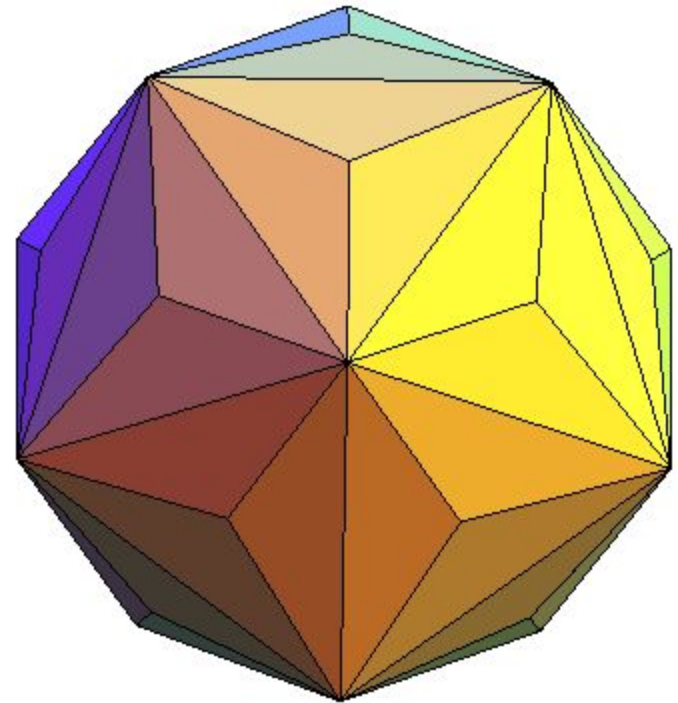
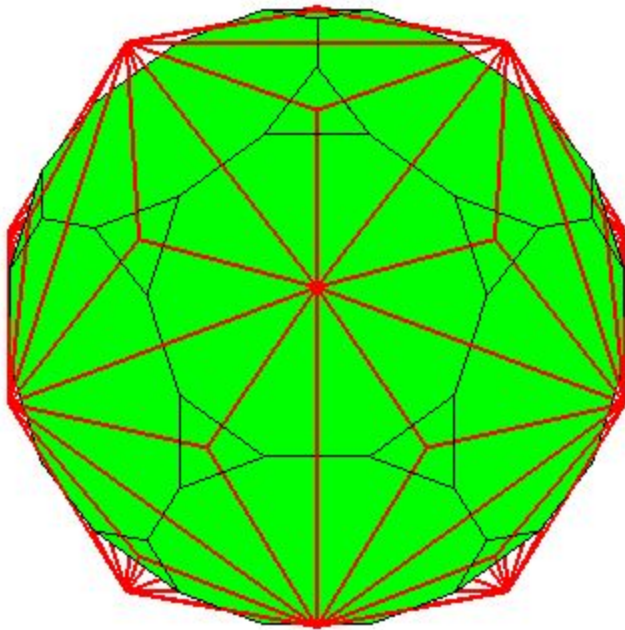
На рисунке показан многогранник, двойственный усеченному икосаэдру. Его гранями являются равные треугольники. Сколько их?



Ответ: 60.

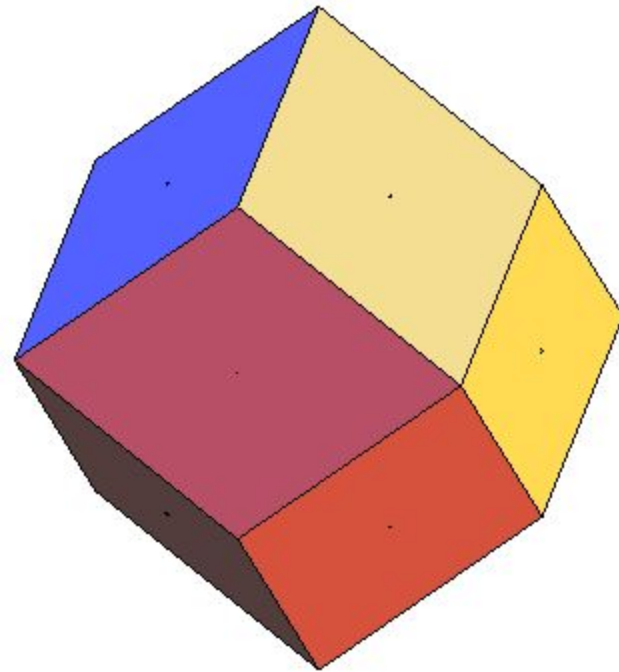
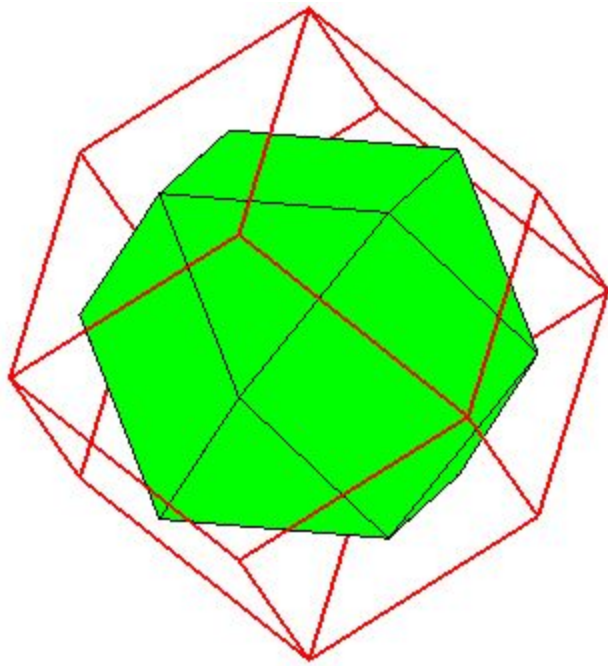
## Усеченный додекаэдр'

На рисунке показан многогранник, двойственный усеченному додекаэдру. Его гранями являются равные треугольники.



## Кубооктаэдр'

На рисунке показан многогранник, двойственный кубооктаэдру. Его гранями являются равные ромбы. Сколько их?

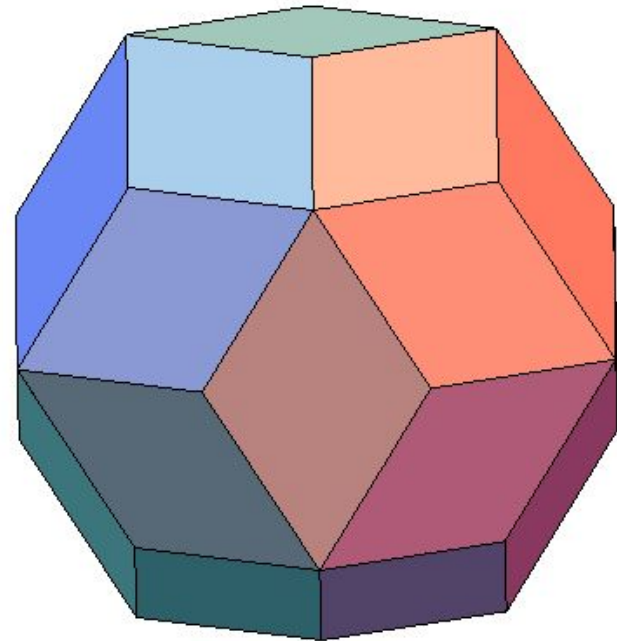
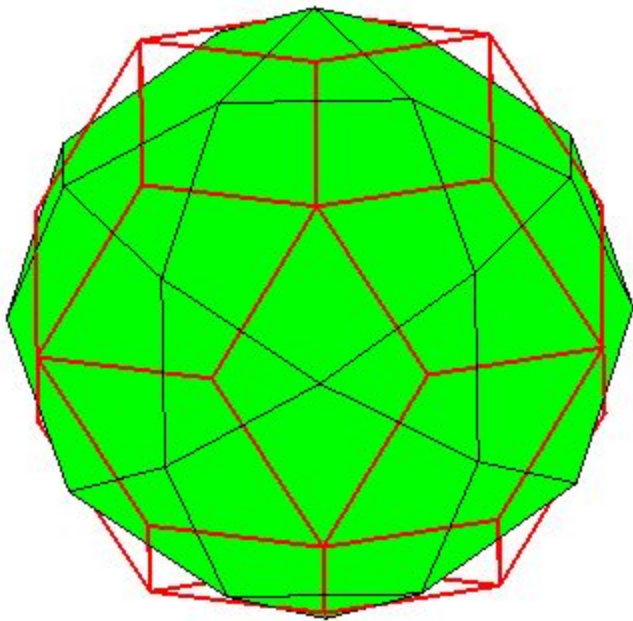


Ответ: 12.



## Икосододекаэдр'

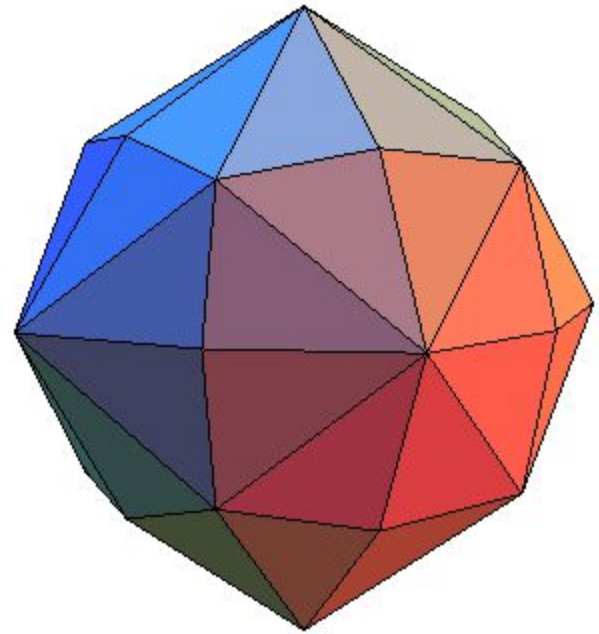
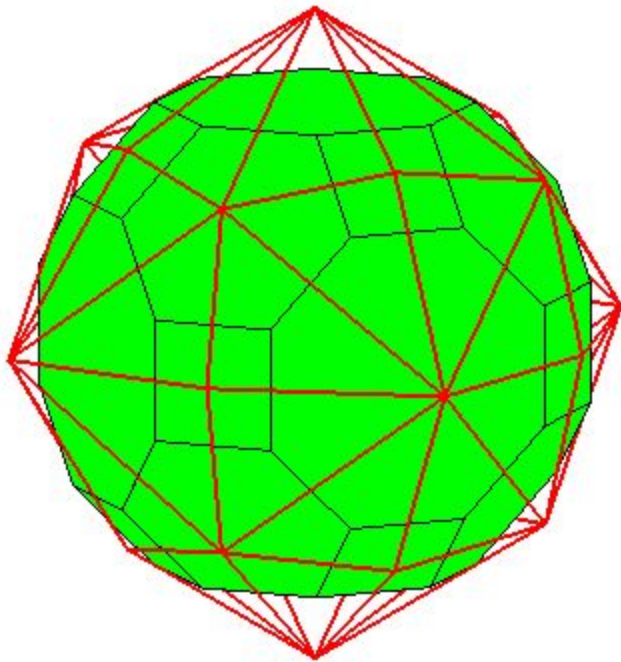
На рисунке показан многогранник, двойственный икосододекаэдру. Его гранями являются равные ромбы. Сколько их?



Ответ: 30.

## Усеченный кубоктаэдр'

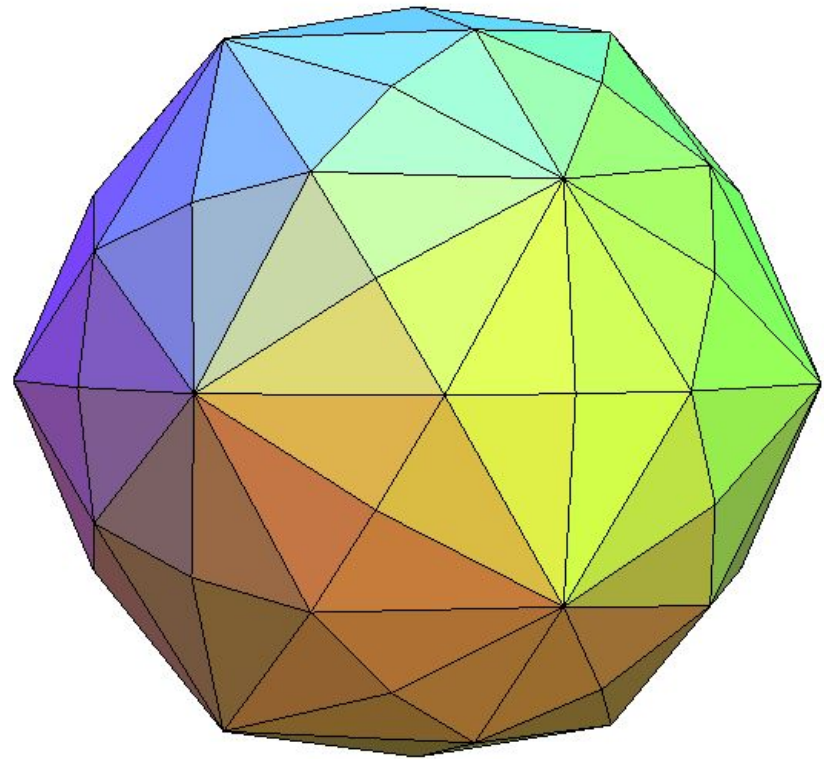
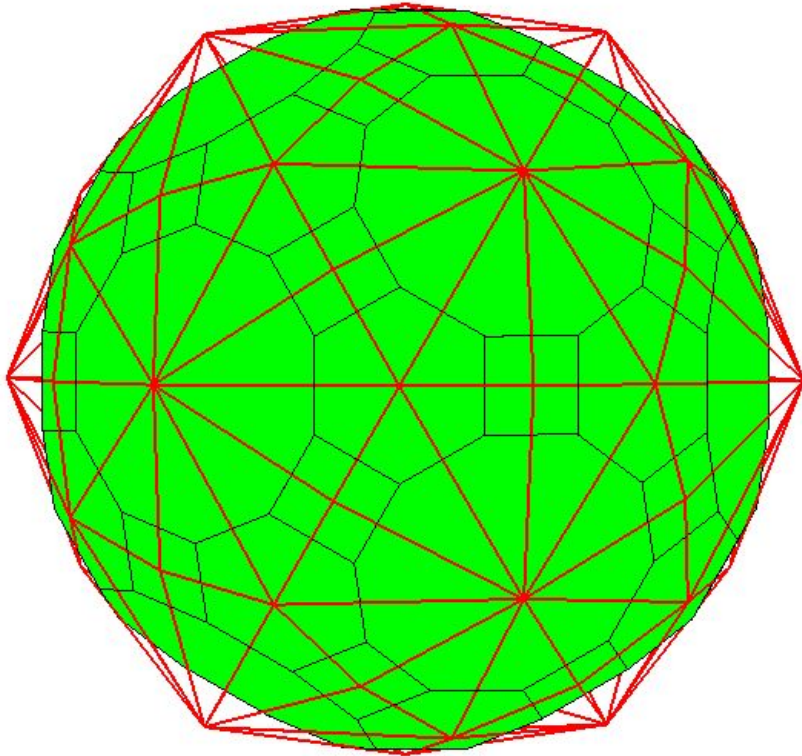
На рисунке показан многогранник, двойственный усеченному кубоктаэдру. Его гранями являются равные ромбы. Сколько их?



Ответ: 48.

## Усеченный икосододекаэдр'

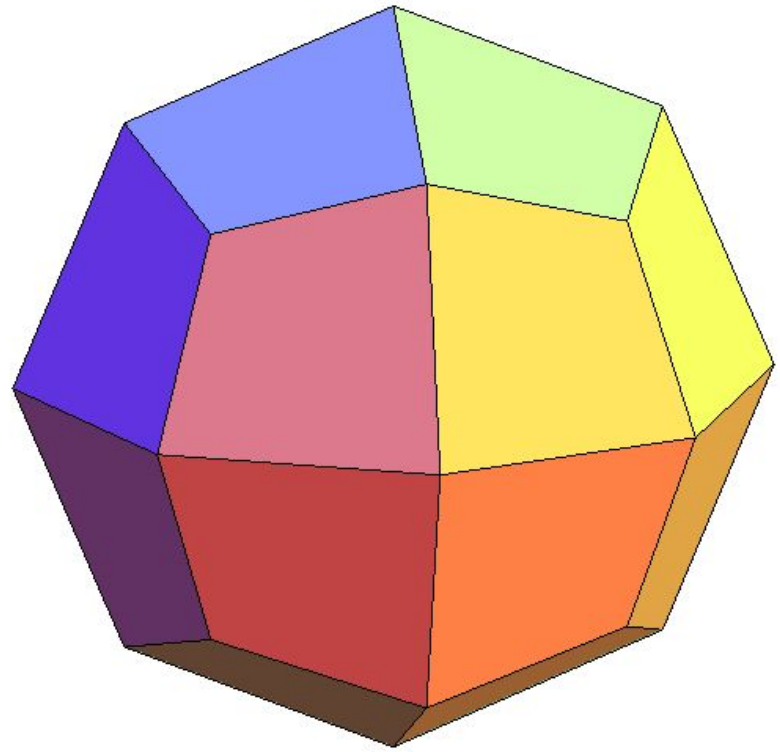
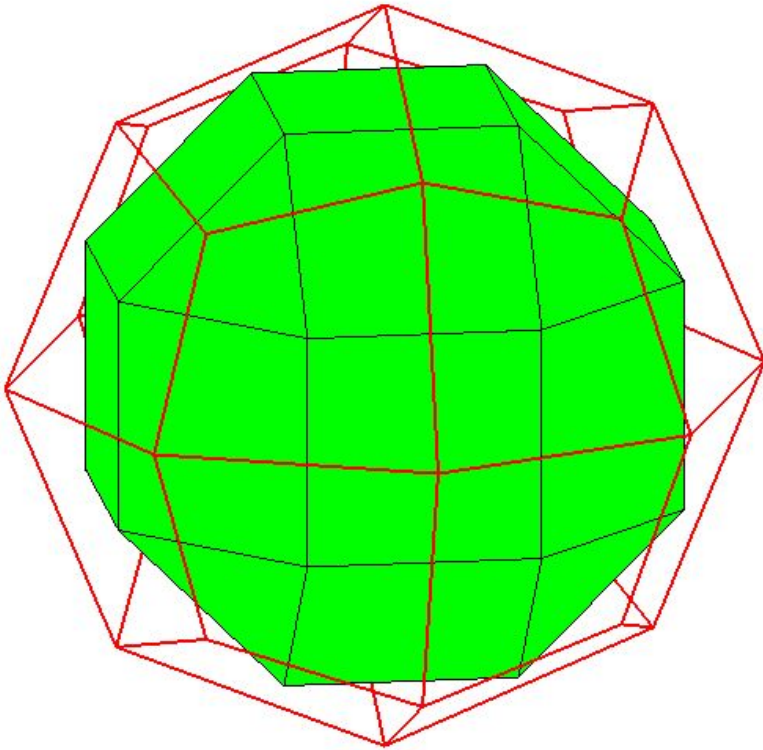
На рисунке показан многогранник, двойственный усеченному икосододекаэдру. Его гранями являются равные ромбы. Сколько их?



Ответ: 120.

## Ромбокубооктаэдр'

На рисунке показан многогранник, двойственный ромбокубооктаэдру. Его гранями являются равные четырехугольники. Сколько их?

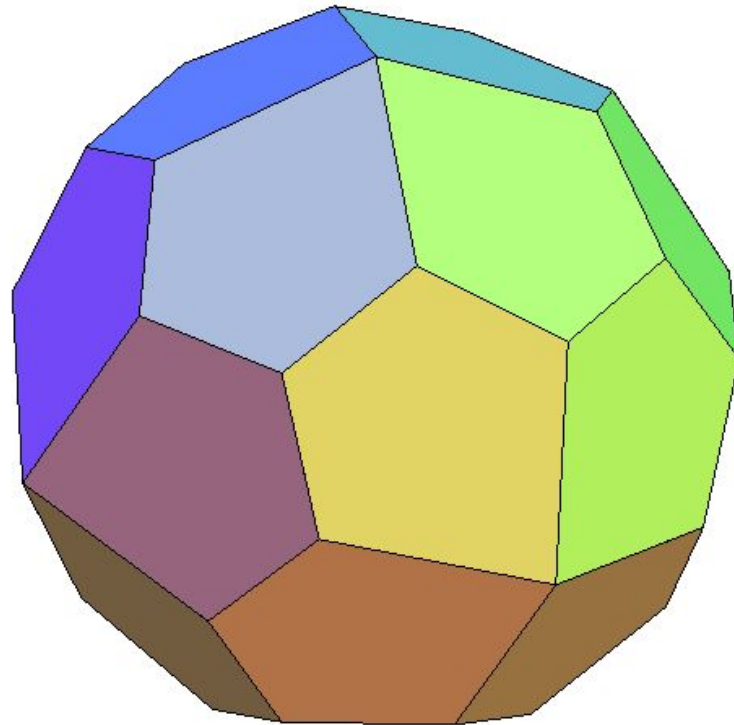
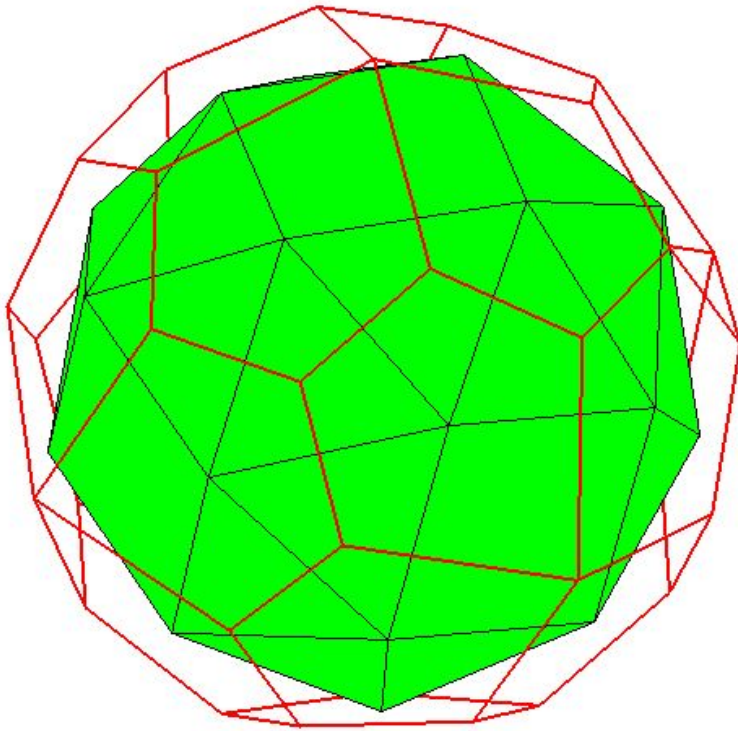


Ответ: 24.



## Курносый куб'

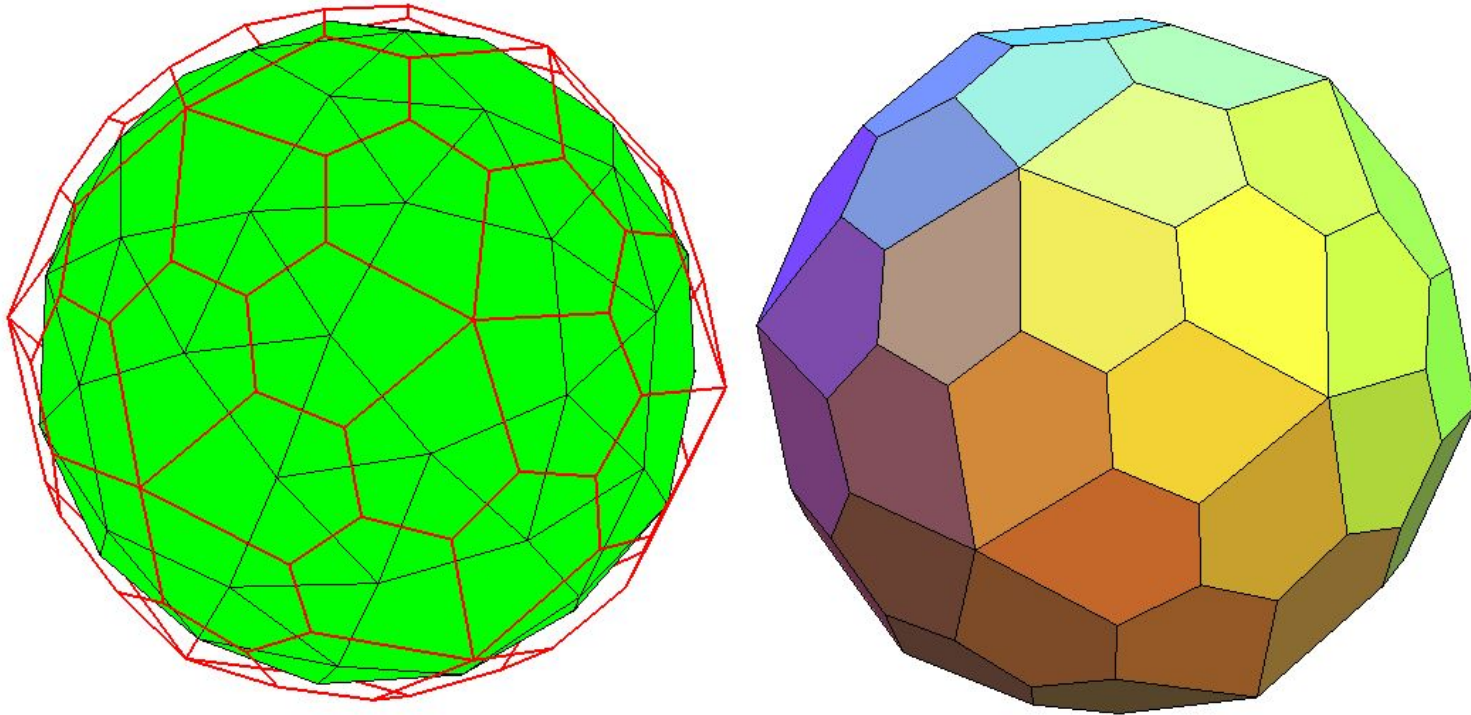
На рисунке показан многогранник, двойственный курносому кубу. Его гранями являются равные пятиугольники. Сколько их?



Ответ: 24.

## Курносый додекаэдр'

На рисунке показан многогранник, двойственный курносому додекаэдру. Его гранями являются равные пятиугольники. Сколько их?



Ответ: 60.