

# Степени вершин графа

## Определение 1

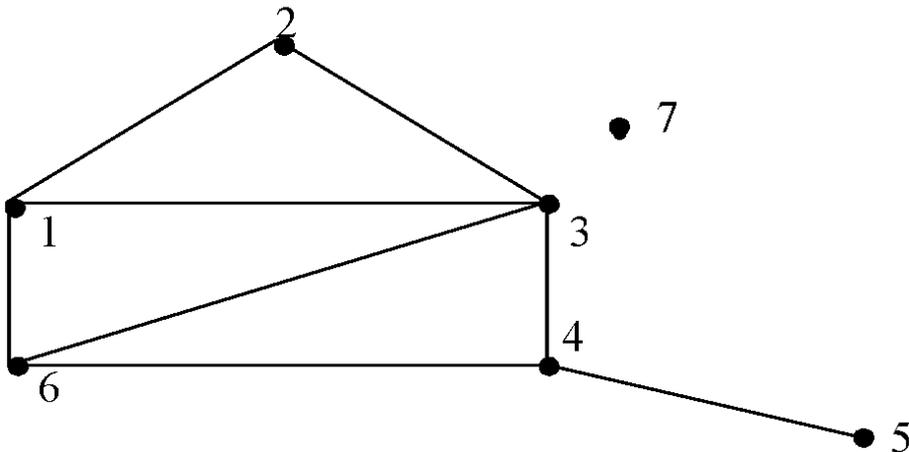
Степенью (валентностью) вершины называется число инцидентных ей ребер.

$$o(V), \deg(V).$$

## Определение 2

Вершина степени 0 называется изолированной.

## Пример



5 –

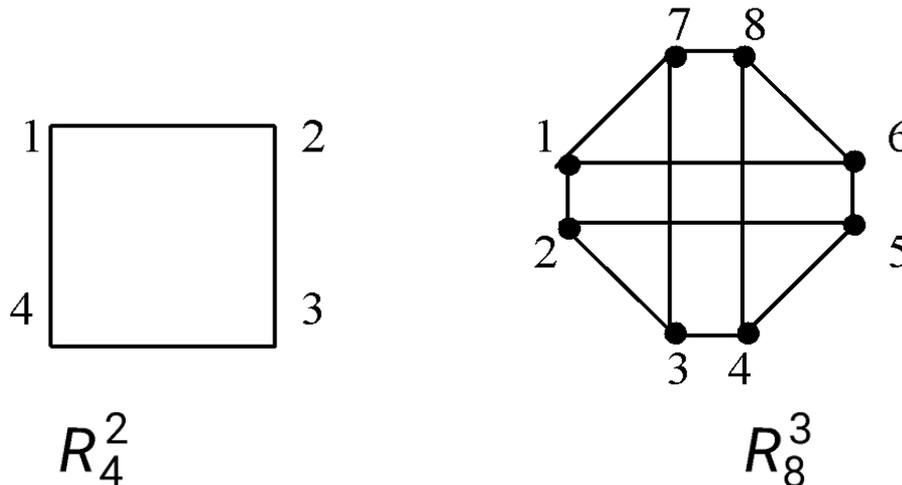
7 – висячая вершина.

изолированная вершина

## Определение 3

Граф называется однородным (регулярным), если степени всех его вершин равны. Обозначают:  $R_n^k$ , где  $k$  – степень каждой вершины графа,  $n$  – число вершин графа. Число, которому равны степени всех вершин, называется степенью данного однородного графа.

## Пример



## Теорема 5

Сумма степеней всех вершин графа есть четное число, равное удвоенному количеству ребер.

## Теорема 6

## Теорема 7

В любом графе обязательно найдутся две вершины, имеющие одинаковую степень.

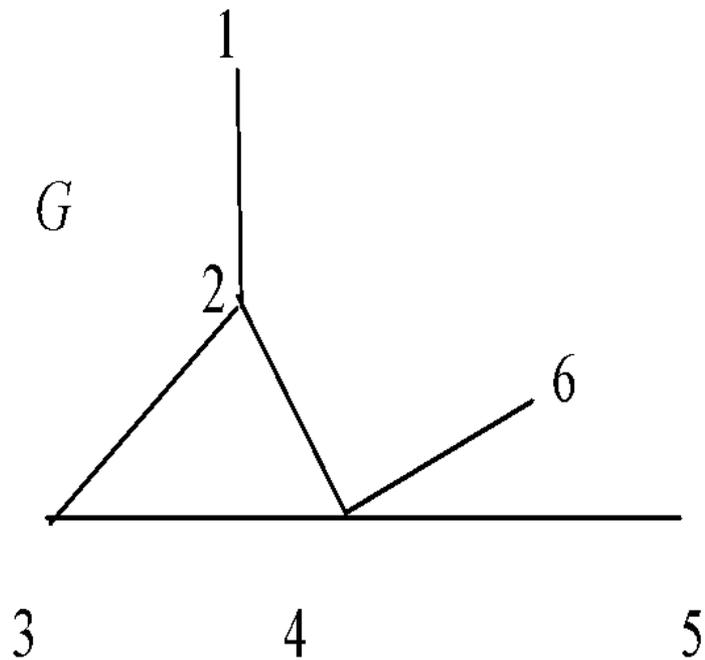
## Теорема 8

В любом однородном графе либо его порядок, либо его степень — четное число.

## Определение 9

Последовательность степеней всех вершин графа называется степенной последовательностью графа.

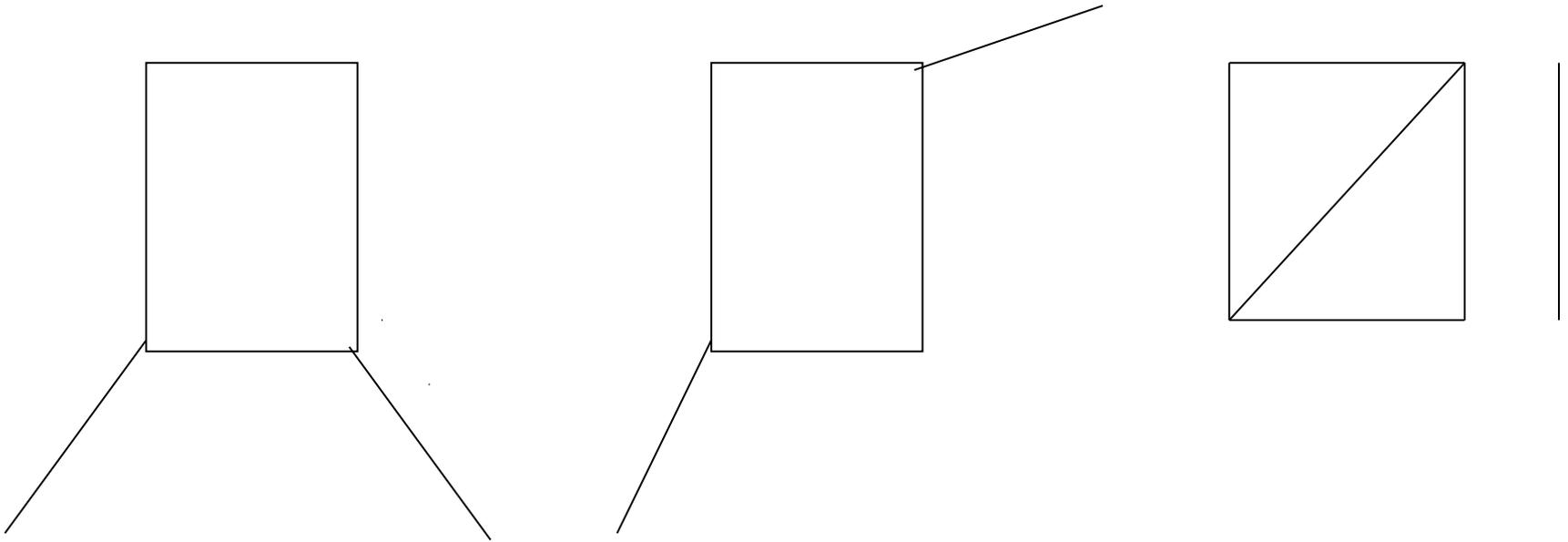
# Пример



$(1, 3, 2, 4, 1, 1)$  или  $(1^3, 2, 3, 4)$  - степенная последовательность графа  $G$ .

# Пример

По степенной последовательности  $(1^2, 2^2, 3^2)$  можно построить графы



# Задача 1

Доказать, что если в графе с  $n$  вершинами ( $n > 2$ ) ровно две вершины имеют одинаковую степень, то в этом графе либо в точности одна вершина степени 0, либо в точности одна вершина степени  $(n-1)$ .

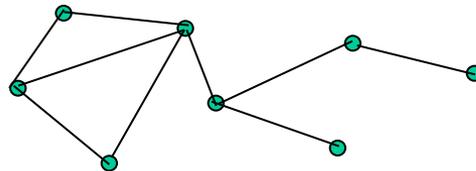
**Решение.** Допустим противное.

1) В графе ровно две вершины одинаковой степени, и это вершины степени 0. Тогда, удалив из графа эти изолированные вершины, получим граф, степени всех вершин которого различны, что невозможно по теореме 3.

2) Если же в графе ровно две вершины одинаковой степени, и это вершины степени  $(n-1)$ , то перейдя к дополнению, получим противоречие, аналогично пункту 1).

# Задача 2

- Существуют ли графы с данной степенной последовательностью? Ответ пояснить.
- 1)  $(1;2;3;4)$ ;
- 2)  $(1^3;2^2;3;5)$ ;
- 3)  $(0;1;2;3;4^2)$ ;
- 4)  $(1^2;2^3;3^2;4)$ ;
- 5)  $(1^2;3^2;4)$ .
- **Решение.**
- 1) Не существует, так как все степени различные (смотри теорему 7).
- 2) Не существует, так как число вершин нечетной степени нечетно, а именно 5 (смотри теорему 6).
- 3) Не существует(смотри задачу 1).
- 4) Построим граф, имеющий данную степенную последовательность



- 5) Не существует, так как, соединив вершину степени 4 с четырьмя из оставшихся вершин, убеждаемся, что для вершин степени 3 не достаточно смежных вершин.

## Задача 3

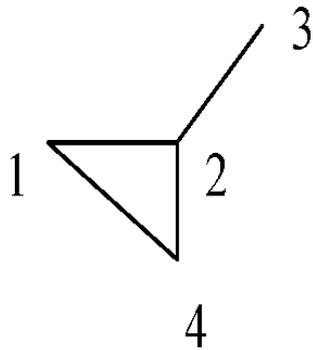
- а) Опишите  $n$  вершинный однородный граф степени 2.
- б) Опишите  $n$  вершинный однородный граф степени  $n-1$ .
- **Решение.**
- а) Многоугольник с  $n$  вершинами.
- б) Полный  $n$  вершинный граф.

Подграфы.  
Операции над графами

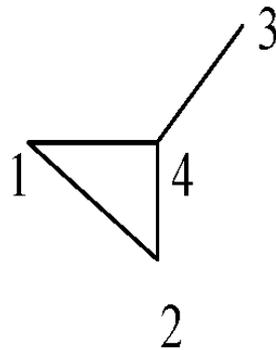
# Определение 1

Граф порядка  $n$  называется помеченным, если его вершинам присвоены некоторые метки, например, номера  $1, 2, \dots, n$ .

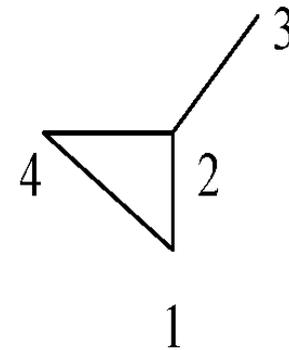
## Пример



$G_1$



$G_2$



$G_3$

$G_1 \neq G_2, G_1 = G_3,$   $G_1, G_2, G_3$  – помеченные графы.

$G_1 = G_2 = G_3,$  где  $G_1, G_2, G_3$  – непомеченные (абстрактные) графы.

## Определение 2

Пусть дан граф  $G = (V, E)$ .  $G_1 = (V_1, E_1)$   
(Граф  $G$ ),  $V_1 \subseteq V$ ,  $E_1 \subseteq E$ . называется подграфом  
частью графа  $G$  если  $V_1 = V$ ,  
Если при этом  $V_1 = V$ ,

## Определение 3

Пусть дан граф  $G = (V, E)$ .  $G_1 = (V_1, E_1)$   $G$   
Подграф  $G_1$  называется порожденным,  
если для любых вершин  $u, v \in V_1$   $(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (u, v) \in E$ .

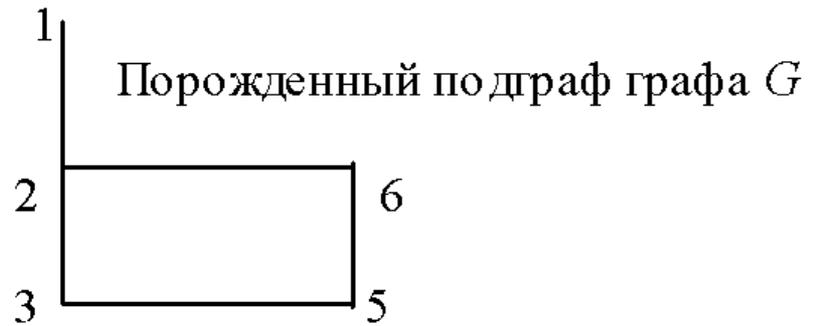
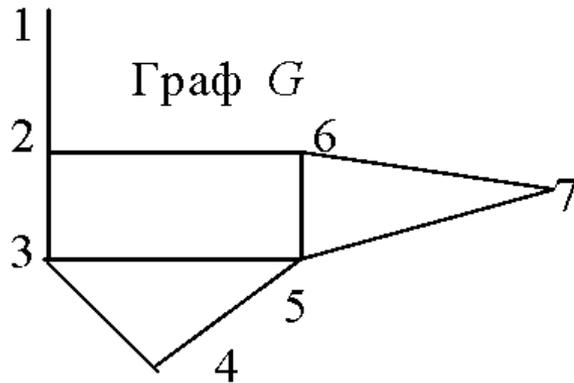
## Определение 4

Объединением графов  $G_1 = (V_1, E_1)$   $G_2 = (V_2, E_2)$  называют граф  
 $G = (V, E) = G_1 \cup G_2$   $V = V_1 \cup V_2$ ,  $E = E_1 \cup E_2$ .

Объединение графов  $G_1$   $G_2$  такой, что называется дизъюнктивным, если  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

Обозначают:  $G = G_1 + G_2$ .

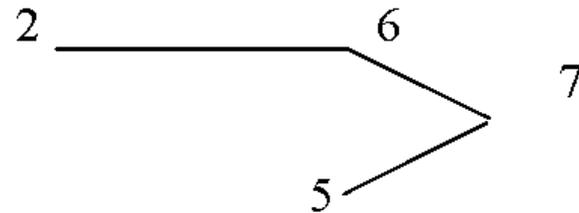
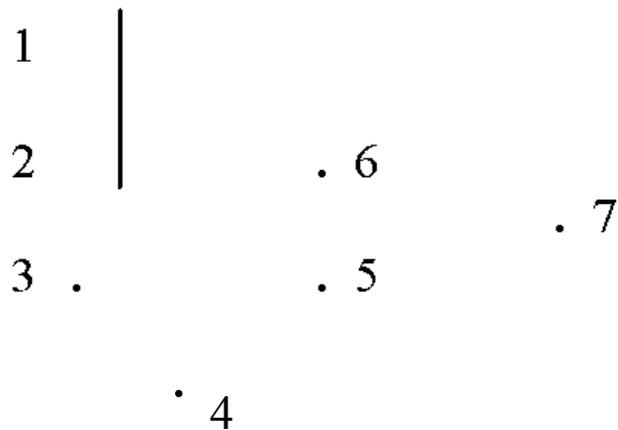
# Пример



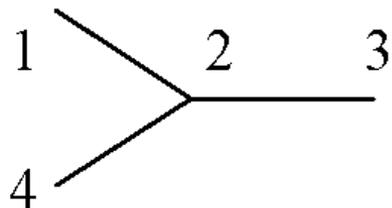
Остовный подграф графа  $G$

Подграф графа  $G$ ,  
ни остовным, ни порожденным

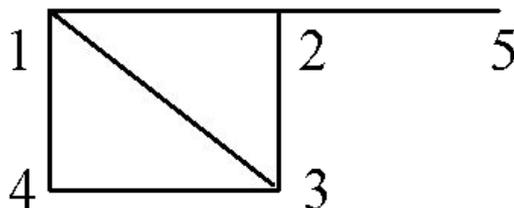
$G$ ,  
не являющийся



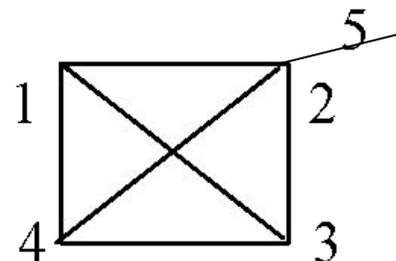
# Примеры



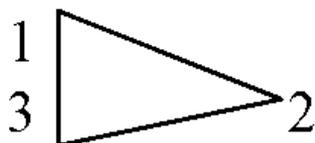
$G_1$



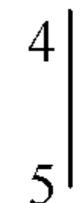
$G_2$



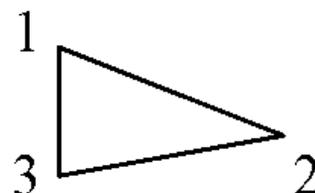
$G_1 \cup G_2$



$G_1$



$G_2$



$G_1 + G_2$

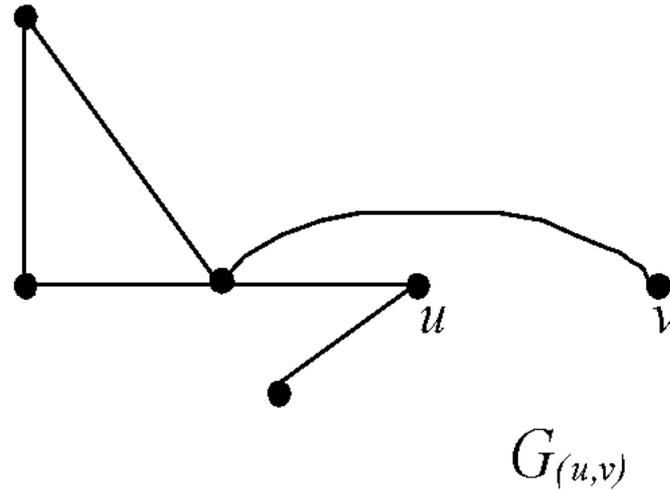
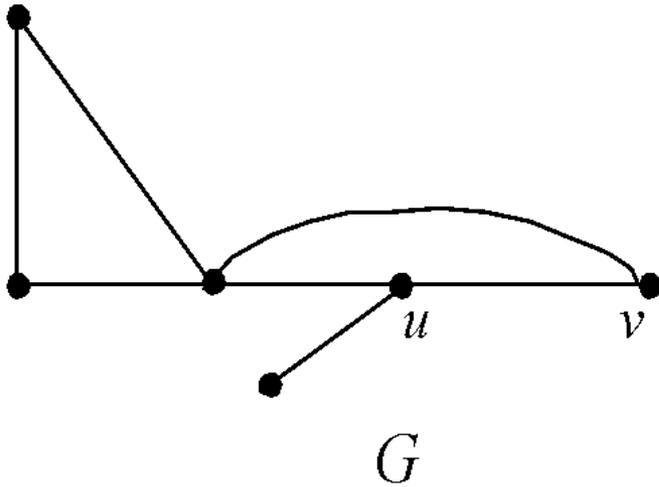


# Определение 5

Пусть  $(u, v)$  - ребро графа  $G = (V, E)$ .

Граф  $G_{(u,v)}$  получается из графа  $G$  в результате удаления ребра  $(u, v)$ , т. е.  $V(G_{(u,v)}) = V(G)$ ,  $E(G_{(u,v)}) = E(G) \setminus \{(u, v)\}$ .

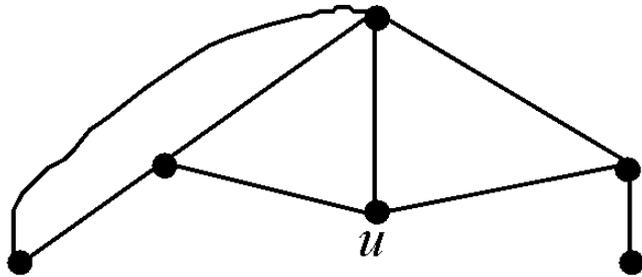
## Пример



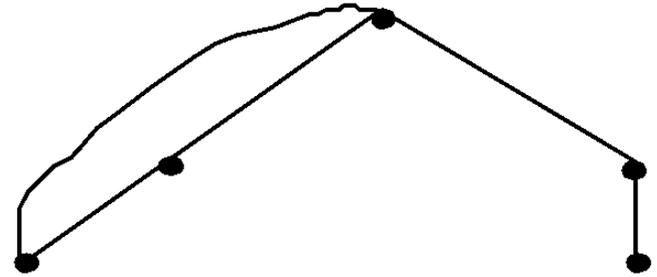
## Определение 6

Пусть  $v$  - вершина графа  $G$ . Граф  $G_{(v)} = G - v$  получается из графа  $G$  в результате удаления вершины  $v$  и всех инцидентных ей ребер,  
$$V(G_{(v)}) = V(G) \setminus \{v\}, E(G_{(v)}) = E(G) \setminus \{(v, u) \mid u \in V(G)\}.$$

## Пример



$G$



$G_{(u)}$

# Определение 7

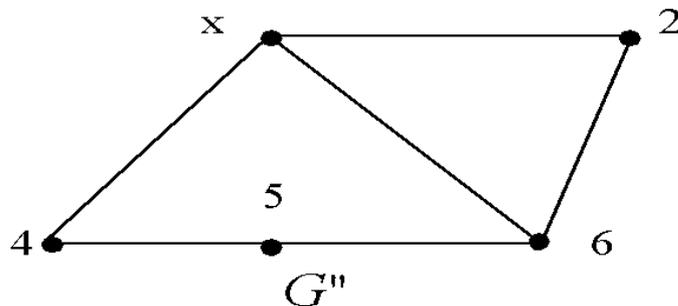
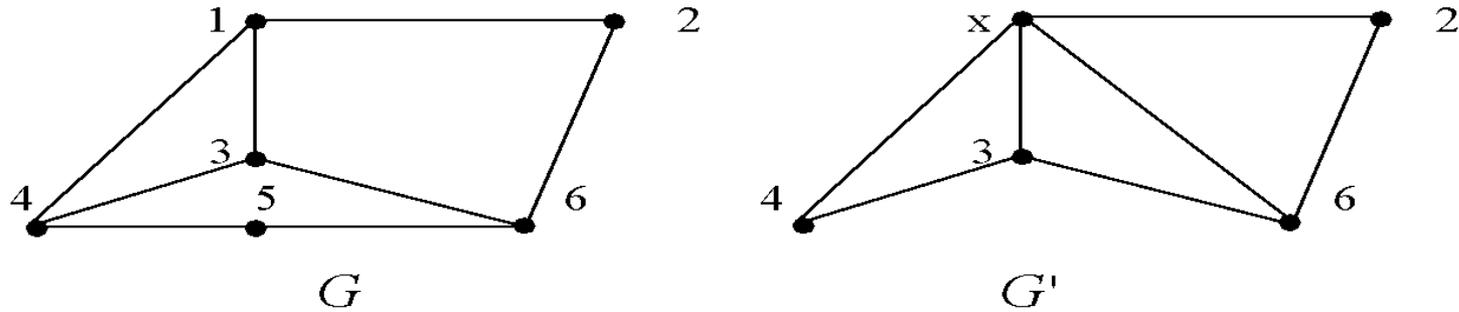
Пусть  $u$  и  $v$  - две вершины графа  $G = (V, E)$ .

Удалим эти вершины из графа  $G$  и добавим новую вершину  $x$ , соединив ее ребром с каждой вершиной, входящей в объединение окружений вершин  $u$  и  $v$  в исходном графе  $G$ .

Построенный граф получился из графа  $G$  стягиванием ребра  $(u, v)$ .

Отождествление вершин  $u$  и  $v$  называется стягиванием ребра  $(u, v)$ ,  $(u, v) \in E(G)$ .

## Пример





## Определение 9

Пусть  $v$  - вершина графа  $G$ . Рассмотрим два множества  $N_1(v)$  и  $N_2(v)$ , объединение которых совпадает с окружением  $N(v)$  вершины  $v$ .

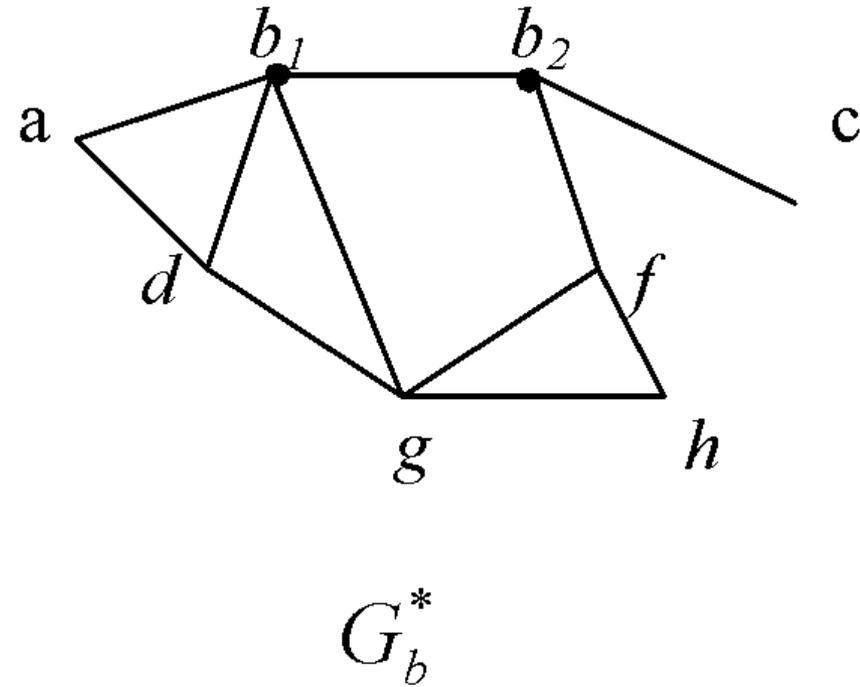
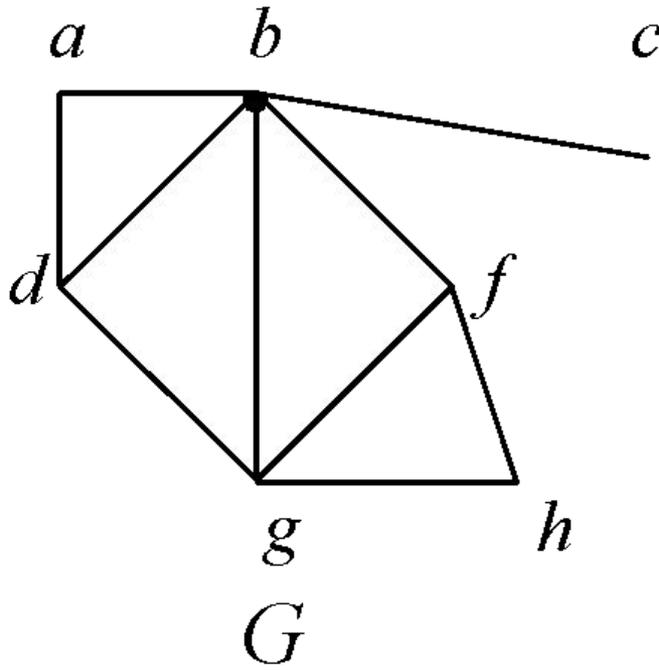
Удалив вершину  $v$ , добавим новые вершины  $v_1, v_2$  и ребро  $(v_1, v_2)$ .

Соединим  $v_1$  с каждой вершиной из  $N_1(v)$ , а  $v_2$  - с каждой вершиной из  $N_2(v)$ .

Произведенная операция называется расщеплением вершины  $v$ ,

а полученный граф обозначается  $G_v^*$ .

# Пример



$G_b^*$  получился из  $G$

$b$ .

расщеплением вершины

$$N(b) = \{a, c, d, f, g\}, N_1(b) = \{a, d, g\}, N_2(b) = \{f, c\}.$$

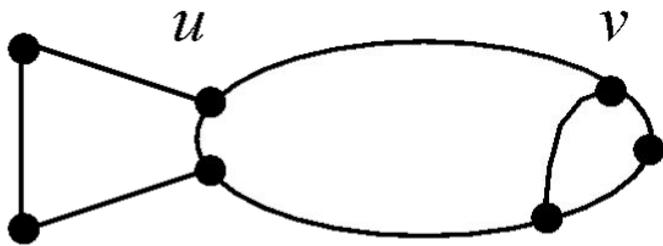
# Определение 10

Пусть  $(u, v)$  - ребро графа  $G = (V, E)$ .

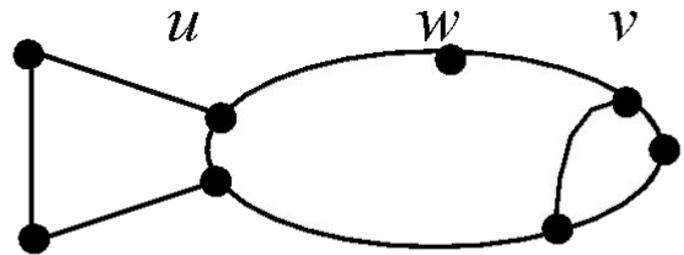
Удалим ребро  $(u, v)$  и добавим два новых ребра  $(u, w)$  и  $(w, v)$ , где  $w$  - новая вершина.

Произведенная операция называется подразбиением ребра  $(u, v)$ .

## Пример



$G$



$H$

# Определение 11

1. *Декартовым произведением*  $G_1 \square G_2$  называется граф  $G$ ,

для которого  $V(G) = V_1 \times V_2$  -

декартово произведение множеств вершин

исходных графов, а  $E(G)$  определяется следующим образом: вершины  $(u_1, u_2)$  и  $(v_1, v_2)$  смежны в графе  $G$  тогда и только тогда,

когда или  $u_1 = v_1$ , а  $u_2$  и  $v_2$  смежны в  $G_2$ , или  $u_2 = v_2$ , а  $u_1$  и  $v_1$  смежны в  $G_1$ .

2. *Категорийным произведением*  $G_1 \times G_2$  называется граф  $G$ ,

для которого  $V(G) = V_1 \times V_2$  - декартово произведение

множеств вершин исходных графов, а  $E(G)$  определяется следующим образом:

вершины  $(u_1, u_2)$  и  $(v_1, v_2)$  смежны в графе  $G$  тогда и только тогда,

когда  $u_1$  и  $v_1$  смежны в  $G_1$  и  $u_2$  и  $v_2$  смежны в  $G_2$ .

3. *Сильным произведением*  $G \boxtimes G_2$  называется граф  $G$ ,

для которого  $V(G) = V_1 \times V_2$  - декартово произведение

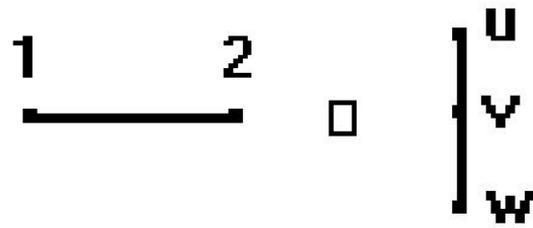
множеств вершин исходных графов, а  $E(G)$  определяется следующим образом:

вершины  $(u_1, u_2)$  и  $(v_1, v_2)$  смежны в графе  $G$  тогда и только тогда,

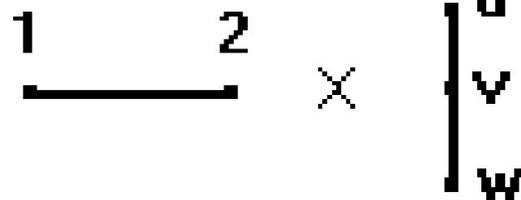
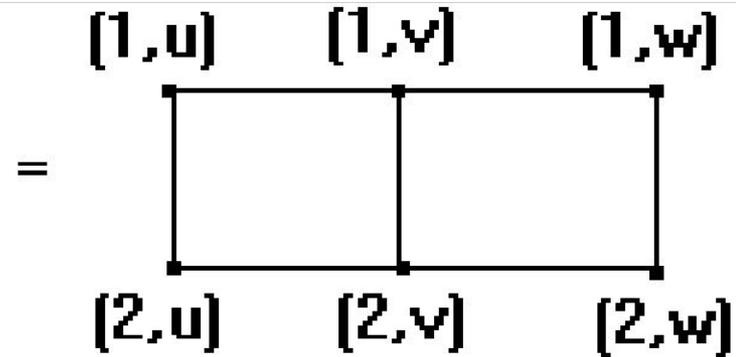
когда  $u_1, v_1$  смежны в  $G_1$ , а  $u_2, v_2$  смежны в  $G_2$  или  $u_2 = v_2$ ,

или  $u_2, v_2$  смежны в  $G_2$ , а  $u_1, v_1$  смежны в  $G_1$  или  $u_1 = v_1$ .

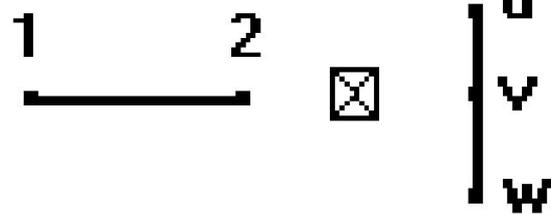
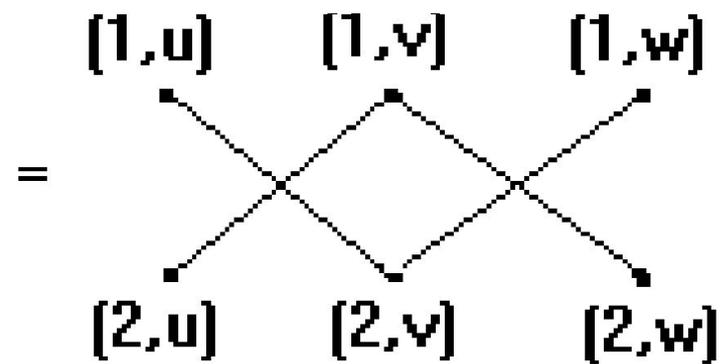
# Пример



$\square$



$\times$



$\boxtimes$

