

## Пример транспортной задачи

	Стр. пл.1	Стр. пл.2	Стр. пл.3	Стр. пл.4	Стр. пл.5	Запасы
Карьер 1	5	3	4	6	4	40
Карьер 2	3	4	10	5	7	20
Карьер 3	4	6	9	3	4	40
Потребности	25	10	20	30	15	



Компания, занимающаяся ремонтом автомобильных дорог, в следующем месяце будет проводить ремонтные работы на **пяти участках** автодорог.

Песок на участки ремонтных работ может доставляться из **трех карьеров**, месячные объемы предложений по карьерам известны.

Из планов производства ремонтных работ известны месячные объемы потребностей по участкам работ. Имеются экономические оценки транспортных затрат (в у.е.) на перевозку 1 тонны песка с карьеров на ремонтные участки.

**Требуется** предложить **план перевозок** песка на участки ремонта автодорог, который обеспечивает минимальные совокупные транспортные издержки.

## Математическая модель транспортной задачи

	Стр. пл.1	Стр. пл.2	Стр. пл.3	Стр. пл.4	Стр. пл.5	Запасы
Карьер 1	5	3	4	6	4	40
Карьер 2	3	4	10	5	7	20
Карьер 3	4	6	9	3	4	40
Потребности	25	10	20	30	15	

### Переменные:

$x_{ij}$  – количество груза, перевозимого из  $i$ -ого карьера на  $j$ -ую стройплощадку ( $i=1,2,3$ ;  $j=1,2,3,4,5$ )

$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{15}$
$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$x_{25}$
$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$	$x_{35}$

**Целевая функция** – суммарные транспортные издержки, которые необходимо минимизировать:

$$F(x) = 5x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 6x_{14} + 4x_{15} + 3x_{21} + 4x_{22} + 10x_{23} + 5x_{24} + 7x_{25} + 4x_{31} + 6x_{32} + 9x_{33} + 3x_{34} + 4x_{35} \rightarrow \min.$$

### Ограничения:

- По поставщикам (карьерам)

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 40$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 20$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 40$$

- По потребителям (стройплощадкам)

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 10$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 15$$

$$x_{ij} \geq 0$$

трансп задача.xls [Режим совместимо]

Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование Вид

Получить внешние данные Обновить все Подключения Свойства Изменить связи Подключения

Сортировка Фильтр Сортировка и фильтр

Очистить Применить повторно Дополнительно

Текст по столбцам Удалить дубликаты

B5 fx 40

	A	B	C	D	E	F	G	H
		Стр. пл.1	Стр. пл.2	Стр. пл.3	Стр. пл.4	Стр. пл.5	Запасы	
1								
2	Карьер 1	5	3	4	6	4	40	
3	Карьер 2	3	4	10	5	7	20	
4	Карьер 3	4	6	9	3	4	40	
5	Потребности	25	10	20	30	15		
6								
7								
8								
9		0	0	0	0	0	0	0
10		0	0	0	0	0	0	0
11		0	0	0	0	0	0	0
12		0	0	0	0	0	0	0
13								
14		0						
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								
28								
29								
30								
31								
32								
33								
34								

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку: [ ]

Равной:  максимальному значению  значению: 0

минимальному значению

Изменяя ячейки: [ ]

Ограничения: [ ]

Выполнить Закрывать Параметры Восстановить Справка

## ЭММ задачи

$$F(x) = 5x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 6x_{14} + 4x_{15} + 3x_{21} + 4x_{22} + 10x_{23} + 5x_{24} + 7x_{25} + 4x_{31} + 6x_{32} + 9x_{33} + 3x_{34} + 4x_{35} \rightarrow \min.$$

### Ограничения:

- По поставщикам (карьерам)

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 40$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 20$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 40$$

- По потребителям (стройплощадкам)

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 10$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 15$$

$$x_{ij} \geq 0$$

трансп задача.xls [Режим совместимости] - Microsoft Excel

Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование Вид

Получить внешние данные

Обновить все Подключения Свойства Изменить связь

Сортировка Фильтр Очистить Применить повторно Дополнительно

Текст по столбцам Удалить дубликаты Работа с данными

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Стр. пл.1	Стр. пл.2	Стр. пл.3	Стр. пл.4	Стр. пл.5	Запасы		
2	Карьер 1	5	3	4	6	4	40		
3	Карьер 2	3	4	10	5	7	20		
4	Карьер 3	4	6	9	3	4	40		
5	Потребности	25	10	20	30	15			
6									
7									
8									
9		0	10	20	0	10	40		
10		20	0	0	0	0	20		
11		5	0	0	30	5	40		
12		25	10	20	30	15			
13									
14		340							
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									
24									
25									
26									

**Результаты поиска решения**

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Тип отчета  
 Результаты  
 Устойчивость  
 Пределы

Сохранить найденное решение  
 Восстановить исходные значения

OK Отмена Сохранить сценарий... Справка

## Транспортная задача открытого типа

Карьер \ Участки работ	Участки работ					Предложение
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	5	15	3	6	10	9
A2	23	8	13	27	12	11
A3	30	1	5	24	25	14
Потребности	8	9	13	8	12	

$\Sigma$  предложений  $\neq$   $\Sigma$  потребностей  $\rightarrow$  задача открытого типа

$\Sigma$  предложений = 34

$\Sigma$  потребностей = 50

## Задача о назначениях

*Числовой пример.* Перед менеджером фирмы «Стар» стоит задача распределения четырех работников по вакантным должностям по условиям результатов контрольных испытаний. Производительность труда по отдельным видам работ, показанная каждым из работников, приведена в таблице.

Одним из основных условий поставленной задачи является максимизация производительности труда в коллективе при условии, что каждый работник может быть назначен только на одну работу.

Работники	Производительность труда работников по должностям			
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	3	1	5	2
$A_2$	2	4	8	6
$A_3$	8	2	7	6
$A_4$	4	3	5	1

Работники	Производительность труда работников по должностям			
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	3	1	5	2
$A_2$	2	4	8	6
$A_3$	8	2	7	6
$A_4$	4	3	5	1

$x_{ij}$  – назначение  $i$ -ого работника на  $j$ -ую должность

$x_{ij} = 1$  - если работник назначается на данную должность

$x_{ij} = 0$  - если работник не назначается

$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$
$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$
$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$
$x_{41}$	$x_{42}$	$x_{43}$	$x_{44}$

Суммарная производительность труда:

$$F(x) = 3x_{11} + 1x_{12} + 5x_{13} + 2x_{14} + \\ + 2x_{21} + 4x_{22} + 8x_{23} + 6x_{24} + \\ + 8x_{31} + 2x_{32} + 7x_{33} + 6x_{34} + \\ + 4x_{41} + 3x_{42} + 5x_{43} + 1x_{44} \rightarrow \max$$

1. Условия назначения работника

только на одну должность

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

2. Условия назначения на каждую

должность только одного работника

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

# Методы управления запасами

**Товарно-материальный запас** – запас какого-либо ресурса, используемого в организации.

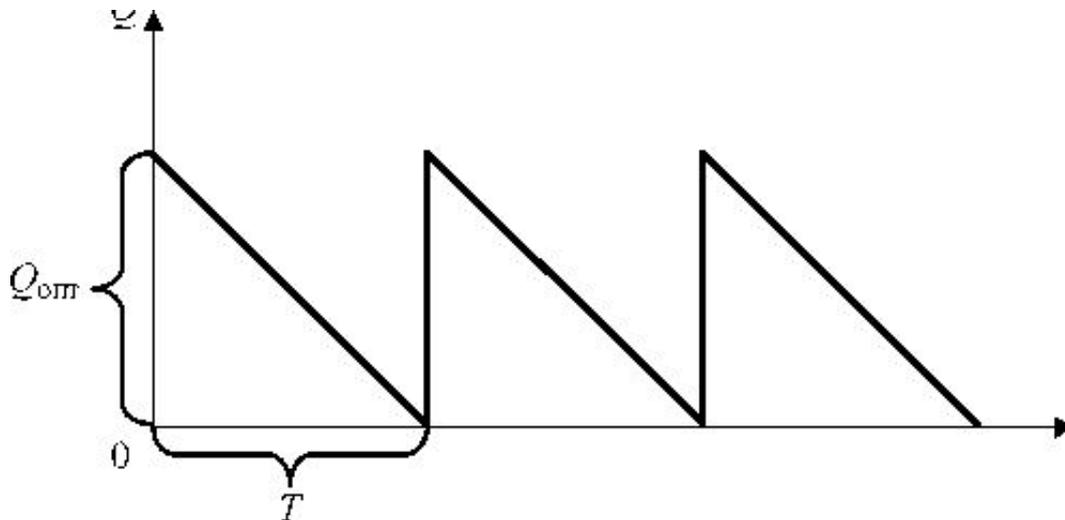
При решении задач управления товарными запасами необходимо получить ответ на 2 основных вопроса:

- 1) **Какое оптимальное количество** товара следует заказать (или произвести), чтобы минимизировать суммарные издержки на заказ и хранение?
- 2) **Когда** целесообразно заказывать товары?

# Модель Уилсона

Основана на следующих принципах:

1. спрос равномерный и постоянный
2. время поставки постоянно
3. отсутствие запасов недопустимо
4. каждый раз заказывается постоянное количество товара - *оптимальный размер заказа* ( $Q_{\text{опт}}$ )



## Модель Уилсона

1. Затраты склада за время T:

$$Z_T(Q) = K + h \cdot T \cdot Q/2 (+ CM)$$

2. Затраты склада в единицу времени:

$$Z_1(Q) = KM / Q + h \cdot Q/2 (+ CM)$$

3. Оптимальный размер партии:

$$Q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot M}{h}}$$

- K - накладные расходы (почтовые, транспортные, ...)
- Q - оптимальный размер заказа
- C - цена единицы товара
- M - спрос на изделие за единицу времени
- h – удельные издержки хранения в единицу времени

## Модель Уилсона

4. Количество циклов, или поступлений товара в единицу времени:  $M / Q_{\text{опт}}$

5. Промежуток времени между последовательными поступлениями заказов:  $Q_{\text{опт}} / M$

6. Уровень повторного заказа, или **точка заказа**, которая опре

$T - M$

$$x = \frac{t \cdot M}{T}$$

$t - x$

## *Замечание*

При решении задач величины **спроса  $M$**  и **удельных издержек  $h$**  следует приводить **к одному и тому же периоду времени.**

В качестве такого периода можно рассматривать один день,  $n$  дней, один год и т.д.

В этом случае выбранный период будет представлять собой единицу времени.

Тогда формула  $Z_1(Q) = KM / Q + h \cdot Q/2 (+ CM)$

позволит определить совокупные издержки на заказ, хранение (и покупку) товара за выбранный период времени.

**Например**, если  $M$  - **это годовой спрос**,  
а  $h$  - издержки на хранение единицы продукции **в год**,  
то величина  $Z_1(Q)$  определяет совокупные издержки на  
заказ, хранение (и покупку) **за один год**.

Если  $M$  - это **спрос** на продукцию **в течение дня**,  
а  $h$  - издержки на хранение единицы продукции **в день**,  
то величина  $Z_1(Q)$  определяет совокупные издержки на  
заказ, хранение (и покупку) товара **за один день**.

**Если необходимо найти совокупные издержки,**  
**например, за 150 дней,**  
то следует воспользоваться формулой  $Z_{150}(Q) = Z_1(Q) \cdot 150$ .

**Пример 1.** Мебельный салон продает наборы мебели для кухни по цене 60 тыс. руб.

Годовой спрос составляет 2000 кухонных гарнитуров.

Издержки на один заказ равны 2500 руб. Годовые издержки хранения - 15% цены набора.

Определить оптимальный размер заказа и совокупные издержки на заказ и хранение в год, если салон работает 300 дней в году.

**Дано:**

$$T = 300 \text{ р.д./год}$$

$$M = 2000 \text{ шт./год}$$

$$C = 60\,000 \text{ руб./шт.}$$

$$h = 0,15 \cdot 60\,000 = 9000 \text{ руб./ед. в год}$$

$$K = 2500 \text{ руб./зак.}$$

**Определить:**  $Q_{\text{опт}}$ ,  $Z_1(Q)$

### Решение.

1. Количество наборов мебели в одном заказе:

$$Q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot M}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2500 \cdot 2000}{9000}} = 33,3 \approx 33 \text{ набора.}$$

2. Совокупные издержки в год на заказ и хранение:

$$Z_1(Q) = \frac{K \cdot M}{Q_{\text{опт}}} + \frac{h \cdot Q_{\text{опт}}}{2} = \frac{2500 \cdot 2000}{33} + \frac{9000 \cdot 33}{2} = 300\,015 \text{ руб.}$$

3. Частота заказов:

$$\frac{M}{Q_{\text{опт}}} = \frac{2000}{33} = 60,6 \approx 60 \text{ заказов в год.}$$

4. Периодичность поступления (интервал между поступлением) заказов:

$$\frac{Q_{\text{опт}}}{M} = \frac{33}{2000} = 0,0165 \text{ лет, или } 0,0165 \cdot 300 = 4,95 \approx 5 \text{ дней.}$$

**Пример 2.** Объем продаж магазина составляет 3000 пакетов супа в год.

Величина спроса равномерно распределяется в течение года.

Цена одного пакета равна 2 руб.

За доставку заказа владелец магазина должен заплатить 50 руб.

Время доставки заказа от поставщика составляет 12 рабочих дней.

По оценкам специалистов, издержки хранения одного пакета составляют 4 руб./год.

Определить, сколько пакетов супа должен заказывать владелец магазина для одной поставки, частоту заказов и точку заказа, если известно, что магазин работает 300 дней в году.

**Пример 2.** Объем продаж магазина составляет 3000 пакетов супа в год.

Величина спроса равномерно распределяется в течение года.

Цена одного пакета равна 2 руб.

За доставку заказа владелец магазина должен заплатить 50 руб.

Время доставки заказа от поставщика составляет 12 рабочих дней.

По оценкам специалистов, издержки хранения одного пакета составляют 4 руб./год.

Определить, сколько пакетов супа должен заказывать владелец магазина для одной поставки, частоту заказов и точку заказа, если известно, что магазин работает 300 дней в году.

**Дано:**

$$T = 300 \text{ р.д./год}$$

$$M = 3000 \text{ пак./год}$$

$$C = 2 \text{ руб./пак.}$$

$$h = 4 \text{ руб./год}$$

$$K = 50 \text{ руб./зак.}$$

$$t = 12 \text{ дней.}$$

**Пример 2.** Объем продаж магазина составляет 3000 пакетов супа в год.

Величина спроса равномерно распределяется в течение года.

Цена одного пакета равна 2 руб.

За доставку заказа владелец магазина должен заплатить 50 руб.

Время доставки заказа от поставщика составляет 12 рабочих дней.

По оценкам специалистов, издержки хранения одного пакета составляют 4 руб./год.

Определить, сколько пакетов супа должен заказывать владелец магазина для одной поставки, частоту заказов и точку заказа, если известно, что магазин работает 300 дней в году.

**Дано:**

$$T = 300 \text{ р.д./год}$$

$$M = 3000 \text{ пак./год}$$

$$C = 2 \text{ руб./пак.}$$

$$h = 4 \text{ руб./год}$$

$$K = 50 \text{ руб./зак.}$$

$$t = 12 \text{ дней.}$$

**Решение.**

1. Количество пакетов супа в одной поставке:

$$Q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot M}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 3000}{4}} = 273,8613 \approx 274 \text{ пак.}$$

2. Общие годовые затраты:

$$Z_1(Q) = \frac{K \cdot M}{Q_{\text{опт}}} + \frac{h \cdot Q_{\text{опт}}}{2} + CM =$$

$$= \frac{50 \cdot 3000}{274} + \frac{4 \cdot 274}{2} + 2 \cdot 3000 = 7095,445 \text{ руб.}$$

4. Частота заказов:

$$\frac{M}{Q_{\text{опт}}} = \frac{3000}{274} = 10,94891 \approx 11 \text{ заказов в год.}$$

5. Периодичность поступления (интервал между поступлением) заказов:

$$\frac{Q_{\text{опт}}}{M} = \frac{274}{3000} = 0,091333 \text{ лет, или } 0,091333 \cdot 300 = 27,4 \approx 27 \text{ дней.}$$

6. Точка заказа:

$$x = \frac{t \cdot M}{T} = \frac{12 \cdot 3000}{300} = 120 \text{ пак.}$$

Каждый раз, когда в магазине остается 120 пакетов супа, делается новый заказ на поставку партии из 274 пакетов.

**Пример 3.** При строительстве участка автодороги длиной 5000 м используют гравий, расход которого составляет 120 кг/м.

Сроки строительства - 150 дней.

Работа идет в одну смену. Расход гравия равномерный. Гравий доставляется грузовыми автомобилями емкостью 8 т в течение 8 часов.

Затраты на один рейс грузовика - 1150 руб. Затраты на хранение гравия на месте строительства - 150 руб. в сутки за тонну.

Определить оптимальный объем заказа, количество грузовых автомобилей, используемых для доставки, период поставок, точку заказа, совокупные затраты на заказ и хранение за весь период строительства.

**Дано:**

$$T = 150 \text{ дней};$$

$$M = 0,120 \text{ т/м} \cdot 5000 \text{ м} / 150 \text{ дн.} = 4 \text{ т/день};$$

$$h = 150 \text{ руб./т в сутки};$$

$$K = 1150 \text{ руб./рейс};$$

$$t = 8 \text{ ч} = 0,33 \text{ дня};$$

Емкость грузовика – 8 т.

Определить:  $Q_{\text{опт}}$ , период поставок,  $Z_{150}(Q)$ , точку заказа,

## Решение.

1. Количество автомобилей, необходимых для доставки гравия:

$$Q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot M}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1150 \cdot 4}{150}} = 7,8 \text{ т,}$$

то есть для доставки необходим один грузовой автомобиль.

2. Совокупные издержки на заказ и хранение за сутки:

$$Z_1(Q) = \frac{K \cdot M}{Q_{\text{опт}}} + \frac{h \cdot Q_{\text{опт}}}{2} = \frac{1150 \cdot 4}{7,8} + \frac{150 \cdot 7,8}{2} = 1174,74 \text{ руб.}$$

3. Совокупные издержки за 150 дней:

$$Z_{150}(Q) = Z_1(Q) \cdot 150 = 1174,74 \cdot 150 = 176\,211 \text{ руб.}$$

4. Частота поставок (количество поставок за весь период строительства):

$$\frac{M}{Q_{\text{опт}}} = \frac{4}{7,8} = 0,51 \text{ зак./день} \cdot 150 \text{ дн.} = 76,5 \approx 77 \text{ поставок.}$$

## **Пример 4.**

Затраты на заказ партии посуды равны 200 руб., затраты на хранение единицы продукции - 12 руб. в сутки, интенсивность потребления товара - 5 шт. в день, цена товара - 120 руб. за штуку.

Определить оптимальный размер заказа, цену покупки и совокупные затраты на заказ и хранение.

**Дано:**

$$M = 5 \text{ шт./день};$$

$$h = 12 \text{ руб./шт. в сутки};$$

$$K = 200 \text{ руб./зак.};$$

$$C = 120 \text{ руб./шт.}$$

**Определить:**  $Q_{\text{опт}}$ , цену покупки, совокупные затраты на заказ и хранение  $Z_1(Q)$ , построить график циклов изменения запаса.

**Решение.**

1. Размер заказа:

$$Q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot M}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot 5}{12}} = 12,91 \approx 13 \text{ шт.}$$

2. Совокупные издержки на заказ и хранение:

$$Z_1(Q) = \frac{K \cdot M}{Q_{\text{опт}}} + \frac{h \cdot Q_{\text{опт}}}{2} = \frac{200 \cdot 5}{13} + \frac{12 \cdot 13}{2} = 154,92 \text{ руб.}$$

3. Цена оптимального заказа (цена покупки):

$$C_{\text{общ}} = C \cdot Q_{\text{опт}} = 120 \cdot 13 = 1560 \text{ руб.}$$

4. Интервал между поставками:

$$\frac{Q_{\text{опт}}}{M} = \frac{13}{5} = 2,6 \approx 3 \text{ дня},$$

то есть поставка товара осуществляется каждые три дня.