Решение задания В15 (системы логических уравнений)

Вишневская М.П., МАОУ «Гимназия №3»
18 ноября 2013 г., г. Саратов

Задание В15 - одно из самых сложных в ЕГЭ по информатике!!!

Проверяются умения:

- преобразовывать выражения, содержащие логические переменные;
- **описывать на естественном языке множество значений логических переменных, при которых заданный набор логических переменных истинен;**
- подсчитывать число двоичных наборов, удовлетворяющих заданным условиям.

Самое **сложное**, т.к. нет формальных правил, как это сделать, требуется догадка.

Без чего не обойтись!

Свойства логических операций

Конъюнкция	Дизъюнкция	Инверсия
$A \wedge \overline{A} = 0$	$A \vee \overline{A} = 1$	$\overline{\overline{A}} = A$
$A \wedge A = A$	$A \vee A = A$	
$A \wedge 1 = A$	$A \vee 1 = 1$	
$A \wedge 0 = 0$	$A \vee 0 = A$	

Законы логики

Закон	Аналог в алгебре
Переместительный закон	
$A \vee B = B \vee A$	$A + B = B + A$
$A \wedge B = B \wedge A$	$A \cdot B = B \cdot A$
Сочетательный закон	
$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Распределительный закон	
$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$
$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$	аналога нет

Без чего не обойтись!

Закон инверсии, или формулы де Моргана	
$A \vee B = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$	аналога нет
$A \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$	аналога нет
Закон контрапозиции	
$A \rightarrow B = \overline{B} \rightarrow \overline{A}$	аналога нет

Формулы склеивания и поглощения

Склеивания	Поглощения
$(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) = A$	$A \vee (A \wedge B) = A$
$(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) = A$	$A \wedge (A \vee B) = A$
	$A \vee (\overline{A} \wedge B) = A \vee B$
	$A \wedge (\overline{A} \vee B) = A \wedge B$

Запись импликации, эквиваленции и сложения по модулю «2»
с помощью инверсии, импликации и дизъюнкции

$$\begin{cases} A \rightarrow B = \overline{A} \vee B \\ A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B}) = (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) \\ A \oplus B = (A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B}) = (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) \end{cases}$$

$$A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B}$$

Условные обозначения

- конъюнкция :A /\ B , A• B, AB, A&B, A and B
- дизъюнкция: A \/ B , A+ B, A | B, A or B
- отрицание: ¬ A , $\overline{A}$, not A
- эквиваленция: A ⇔ B, A ~ B, A ≡ B
- исключающее «или»: A⊕ B , A xor B

Метод замены переменных

Сколько существует различных наборов значений логических переменных x1, x2, …, x9, x10, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям:

$$((x1 \equiv x2) \lor (x3 \equiv x4)) \land (\neg(x1 \equiv x2) \lor \neg(x3 \equiv x4)) = 1$$
$$((x3 \equiv x4) \lor (x5 \equiv x6)) \land (\neg(x3 \equiv x4) \lor \neg(x5 \equiv x6)) = 1$$
$$((x5 \equiv x6) \lor (x7 \equiv x8)) \land (\neg(x5 \equiv x7) \lor \neg(x7 \equiv x8)) = 1$$
$$((x7 \equiv x8) \lor (x9 \equiv x10)) \land (\neg(x7 \equiv x8) \lor \neg(x9 \equiv x10)) = 1$$

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы x1, x2, …, x9, x10, при которых выполняется данная система равенств. В качестве ответа необходимо указать **количество** таких наборов (демо-версия 2012 г.)

Решение
Шаг 1. Упрощаем, выполнив замену переменных

$t1 = x1 \equiv x2$

$t2 = x3 \equiv x4$

$t3 = x5 \equiv x6$

$t4 = x7 \equiv x8$

$t5 = x9 \equiv x10$

$\neg(t1 \equiv t2) = 1$

$\neg(t2 \equiv t3) = 1$

$\neg(t3 \equiv t4) = 1$

$\neg(t4 \equiv t5) = 1$

После упрощения:

$(t1 \lor t2) \land (\neg t1 \lor \neg t2) = 1$

$(t2 \lor t3) \land (\neg t2 \lor \neg t3) = 1$

$(t3 \lor t4) \land (\neg t3 \lor \neg t4) = 1$

$(t4 \lor t5) \land (\neg t4 \lor \neg t5) = 1$

Рассмотрим одно из уравнений:

$(t1 \lor t2) \land (\neg t1 \lor \neg t2) = 1$

Очевидно, оно =1 только если одна из переменных равна 0, а другая – 1.

Воспользуемся формулой для выражения операции XOR через конъюнкцию и дизъюнкцию:

$(t1 \lor t2) \land (\neg t1 \lor \neg t2) = t1 \oplus t2 = \neg(t1 \equiv t2) = 1$

Шаг2. Анализ системы

$\neg(t1 \equiv t2) = 1$
$\neg(t2 \equiv t3) = 1$
$\neg(t3 \equiv t4) = 1$
$\neg(t4 \equiv t5) = 1$

t1	t2	t3	t4	t5
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

Т.к. tk = x2k-1 ≡ x2k (t1 = x1≡ x2,….), то каждому значению tk соответствует две пары значений x2k-1 и x2k ,
например:
tk=0 соответствуют две пары - (0,1) и (1,0) ,
а tk=1 – пары (0,0) и (1,1).

Шаг3. Подсчет числа решений.

Каждое t имеет 2 решения, количество t – 5. Т.о. для переменных t существует $2^5 = 32$ решения.

Но каждому t соответствует пара решений x, т.е. исходная система имеет 2*32 = 64 решения.

Ответ: 64

Метод исключения части решений

Сколько существует различных наборов значений логических переменных x1, x2, …, x5, y1,y2,…, y5, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям:

$(x1 \rightarrow x2) \wedge (x2 \rightarrow x3) \wedge (x3 \rightarrow x4) \wedge (x4 \rightarrow x5) = 1$;
$(y1 \rightarrow y2) \wedge (y2 \rightarrow y3) \wedge (y3 \rightarrow y4) \wedge (y4 \rightarrow y5) = 1$;
$y5 \rightarrow x5 = 1$.

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы x1, x2, …, x5, y1,y2,…, y5, при которых выполняется данная система равенств. В качестве ответа необходимо указать **количество** таких наборов.

Решение.

Шаг1. Последовательное решение уравнений

Первое уравнение – конъюнкция нескольких операций импликации, равна 1, т.е. каждая из импликаций истинна. Импликация ложна только в одном случае, когда 1 ⇒ 0, во всех других случаях (0 ⇒ 0, 0 ⇒ 1, 1 ⇒ 1) операция возвращает 1. Запишем это в виде таблицы:

x1	1	0
x2	1	0 1
x3	1	0 1 1
x4	1	0 1 1 1
x5	1	0 1 1 1 1

Шаг1. Последовательное решение уравнений

Т.о. получено 6 наборов решений для x1,x2,x3,x4,x5:
(00000), (00001), (00011), (00111), (01111), (11111).
Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что для y1, y2, y3, y4, y5 существует такой же набор решений.
Т.к. уравнения эти независимы, т.е. в них нет общих переменных, то решением этой системы уравнений (без учета третьего уравнения) будет 6*6=**36** пар «иксов» и «игреков».
Рассмотрим третье уравнение:

$$\mathbf{y5 \to x5 = 1}$$

Решением являются пары:	0	0
	0	1
	1	1
Не является решением пара:	**1**	**0**

Сопоставим полученные решения

(y1y2y3y4y5)	(x1x2x3x4x5)						Кол-во вариантов (пар)
	(00000)	(00001)	(00011)	(00111)	(01111)	(11111)	
(00000)	+	+	+	+	+	+	6
(00001)	–	+	+	+	+	+	5
(00011)	–	+	+	+	+	+	5
(00111)	–	+	+	+	+	+	5
(01111)	–	+	+	+	+	+	5
(11111)	–	+	+	+	+	+	5
Всего возможных вариантов (пар) наборов значений (x1x2x3x4x5) *и* (y1y2y3y4y5) *:*							31

Там, где y5=1, не подходят x5=0. таких пар 5.

Количество решений системы : 36-5=**31**.

Ответ: 31

Понадобилась комбинаторика!!!

Метод динамического программирования

Сколько различных решений имеет логическое уравнение

$$x1 \rightarrow x2 \rightarrow x3 \rightarrow x4 \rightarrow x5 \rightarrow x6 = 1,$$

где x1, x2, …, x6 – логические переменные? В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать **количеств**о таких наборов.

Решение
Шаг1. Анализ условия

1. Слева в уравнении последовательно записаны операции импликации, приоритет одинаков.

2. Перепишем:

$$((((X_1 \rightarrow X_2) \rightarrow X_3) \rightarrow X_4) \rightarrow X_5) \rightarrow X_6 = 1$$

NB! Каждая следующая переменная зависит не от предыдущей, а от результата предыдущей импликации!

Шаг2. Выявление закономерности

Рассмотрим первую импликацию, $\mathbf{X_1 \rightarrow X_2}$. Таблица истинности:

$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_1 \rightarrow X_2}$
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**0**
1	1	**1**

Из одного 0 получили 2 единицы, а из 1 получили один 0 и одну 1. Всего один 0 и три 1, это результат первой операции.

Шаг2. Выявление закономерности

Подключив к результату первой операции x_3 , получим:

$F(x_1,x_2)$	x_3	$F(x_1,x_2)\rightarrow x_3$
0	**0**	**1**
0	**1**	**1**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

Из двух 0 – две 1, из каждой 1 (их 3) по одному 0 и 1 (3+3)

Шаг 3. Вывод формулы

Т.о. можно составить формулы для вычисления количества нулей N_i и количества единиц E_i для уравнения с i переменными:

$$N_i = E_{i-1} \qquad E_i = 2N_{i-1} + E_{i-1}$$

$$N_1 = E_1 = 1$$

Шаг 4. Заполнение таблицы

Заполним слева направо таблицу для i=6, вычисляя число нулей и единиц по приведенным выше формулам; в таблице показано, как строится следующий столбец по предыдущему:

число переменных	1	2	3	4	5	6
Число нулей N_i	**1**	**1**	**3**	**5**	**11**	**21**
Число единиц E_i	**1**	2*1+1 =**3**	2*1+3= **5**	**11**	**21**	**43**

Ответ: 43

Метод с использованием упрощений логических выражений

Сколько различных решений имеет уравнение

$$((J \rightarrow K) \rightarrow (M \wedge N \wedge L)) \wedge ((M \wedge N \wedge L) \rightarrow (\neg J \vee K)) \wedge (M \rightarrow J) = 1$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать **количество** таких наборов.

Решение

1. Заметим, что $\mathbf{J \to K = \neg J \vee K}$
2. Введем замену переменных:

$\mathbf{J \to K = A}$, $\mathbf{M \wedge N \wedge L = B}$

3. Перепишем уравнение с учетом замены:

$$\mathbf{(A \to B) \wedge (B \to A) \wedge (M \to J) = 1}$$

4. $\mathbf{(A \equiv B) \wedge (M \to J) = 1}$
5. Очевидно, что **$A \equiv B$ при одинаковых значениях A и B**
6. Рассмотрим последнюю импликацию $\mathbf{M \to J = 1}$

   Это возможно, если:

a) $\mathbf{M = J = 0}$

b) $\mathbf{M = 0,\ J = 1}$

c) $\mathbf{M = J = 1}$

Решение

7. Т.к. **A** ≡ **B**, то **$\neg$J $\vee$ K= M $\wedge$ N $\wedge$ L**
8. При **M=J=0** получаем **1 + К=0.** Нет решений.
9. При **M=0, J=1** получаем **0 + К=0,** К=0, а N и L - любые , **4 решения**:

K	**N**	**L**
0	**0**	**0**
0	**0**	**1**
0	**1**	**0**
0	**1**	**1**

Решение

10. При **M=J=1** получаем **0+К=1*N*L,** или **K=N*L,**
4 решения:

K	N	L
0	0	0
0	0	1
0	1	0
1	1	1

11. Итого имеет 4+4=8 решений
Ответ: 8

Источники информации:

- О.Б. Богомолова, Д.Ю. Усенков. B15: новые задачи и новое решение // Информатика, № 6, 2012, с. 35 – 39.
- К.Ю. Поляков. Логические уравнения // Информатика, № 14, 2011, с. 30-35.
- http://ege-go.ru/zadania/grb/b15/, [Электронный ресурс].
- http://kpolyakov.narod.ru/school/ege.htm, [Электронный ресурс].